– TD 9 –
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (1)

Dans tout ce TD, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 1. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de $A - \lambda I_3$ par opérations élémentaires, en fonction du paramètre λ. En déduire le spectre de A ainsi que la dimension de chaque sous-espace propre.

Exercice 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de la matrice : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 3. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de décalage de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$.

Exercice 4. Sous-espaces stables. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E non réduits à $\{0\}$, et soit p la projection sur F parallèlement à G.

1. Reconnaître l'endomorphisme $q = \mathrm{Id}_E - p$.

2. Soit a et b deux scalaires distincts, et $f = ap + bq$. Montrer qu'un sous-espace vectoriel A de E est stable par f si, et seulement si, il vérifie l'égalité : $A = (A \cap F) + (A \cap G)$.

3. En déduire les sous-espaces vectoriels de E stables par une symétrie s.

Exercice 5. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *matrice compagnon* du polynôme P la matrice carrée suivante :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique χ de la matrice $C(P)$.

Exercice 6. Justifier que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Exercice 7. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de chacune de ces deux matrices.

2. En déduire leur trace, leur déterminant, leur rang.

3. Montrer qu'elles sont équivalentes mais pas semblables.

Exercice 8. Soit s une symétrie vectorielle d'un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les éléments propres de s et prouver que s est diagonalisable.

Exercice 9. Étudier la réduction dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

1. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

b. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Sont-elles semblables ?

2. On considère maintenant deux autres matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons montrer, par deux méthodes différentes, que ces deux matrices sont semblables.

a. Première méthode. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Sans aucun calcul, déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $B = M_{\mathcal{B}'}(u)$.

b. Deuxième méthode. Montrer que ces deux matrices ont le polynôme caractéristique que l'on déterminera. Par une étude de fonctions, prouver que leur polynôme caractéristique admet 3 racines réelles distinctes, que l'on ne cherchera pas à calculer. Conclure.

Exercice 11. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices qui commutent. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que A est diagonalisable et que toute matrice de passage qui diagonalise A, diagonalise B.

2. Toute matrice de passage qui diagonalise B, diagonalise-t-elle A ?

3. Résoudre l'équation $M^3 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit le *commutant* de A par :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes. Montrer que : $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A]$.

On pourra bientôt montrer que : $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}[A] = \mathbb{R}_{n-1}[A]$.

2. Donner un exemple de matrice A pour laquelle l'inclusion $\mathbb{R}[A] \subset \mathcal{C}(A)$ est une inclusion stricte.

Exercice 13. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que A et B sont semblables et en déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Montrer qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

Exercice 15. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer deux valeurs propres évidentes.

2. Est-elle diagonalisable ?

Exercice 16. Déterminer les z complexes pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MA$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 18. Pour quelle(s) valeurs de $x \in \mathbb{R}$, la matrice suivante n'est-elle pas diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} -2-x & 5+x & x \\ x & -2-x & -x \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. Soit $a, b,$ et c trois réels non nuls. Étudier la diagonalisabilité de la matrice réelle :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ \frac{1}{a} & 0 & b \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit T une matrice triangulaire inversible.

1. Montrer que T peut être reliée à I_n par un chemin à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.