

– Programme de colle n° 9 : du 25 au 29/11 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.

CHAPITRE 9 - RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES.

⚠ Ce chapitre n'est pas terminé.

I. RAPPELS SUR LES RACINES D'UN POLYNÔME.

L'ordre de multiplicité d'une racine α est le plus grand entier r tel que $(X - \alpha)^r \mid P$.

⚠ Ne pas confondre : “ α est une racine d'ordre r ” et “ α est une racine d'ordre au moins r ”.
 α est une racine d'ordre r de P , si, et seulement si,

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Définition d'un polynôme scindé, scindé à racines simples.

⚠ Connaître la formule de Taylor des polynômes (voir cours de mpsi).

II. SOUS-ESPACES VECTORIELS STABLES.

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par un endomorphisme u de E lorsque $u(F) \subset F$. Notion d'endomorphisme induit. Il est noté u_F .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$, et $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Si :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K}).$$

En posant $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ on a : F est stable par u si, et seulement si, $C = 0$. 

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs : $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$.

III. ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME, D'UNE MATRICE CARRÉE.

III.1. Vecteurs propres et valeurs propres d'un endomorphisme.

⚠ Bien connaître les définitions vecteurs propres, valeurs propres et sous-espaces propres. Par définition, un vecteur propre est toujours non nul.

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$), alors tout sous-espace propre de u est stable par v . 

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires deux à deux distincts, alors les sous-espaces $\text{Ker}(u - \lambda_1 \text{Id}_E), \dots, \text{Ker}(u - \lambda_p \text{Id}_E)$ sont en somme directe. 

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

III.2. Cas des endomorphismes d'un espace de dimension finie.

Lorsque E est de dimension finie, on appelle *spectre* de u , et l'on note $\text{sp } u$, l'ensemble des valeurs propres de u .

Si E est de dimension finie égale à n , alors le spectre d'un endomorphisme est fini, et de cardinal au plus n .

⚠ En dimension infinie, un endomorphisme peut avoir une infinité de valeurs propres. Connaître un exemple.

III.3. Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice carrée.

III.4. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

Par définition : $\chi_A = \det(XI_n - A)$ (vu comme déterminant d'une matrice à coefficients dans le corps $\mathbb{K}(X)$).

Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré n . Plus précisément, il est de la forme :

$$\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A). \quad \text{📎}$$

Le spectre de A est égal à l'ensemble des racines de χ_A .

III.5. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur un sous-espace vectoriel stable F , divise le polynôme caractéristique de u (en sachant calculer le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs). 📎

Pour toute valeur propre λ de u , on a : $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$. 📎

IV. ENDOMORPHISMES ET MATRICES CARRÉES DIAGONALISABLES.

IV.1. Définitions de la notion de diagonalisation.

IV.2. Conditions de diagonalisation.

⚠ Les conditions de diagonalisation qui suivent doivent être parfaitement maîtrisées.

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, la somme de ses sous-espaces propres est égale à E . 📎

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si, et seulement si, $\sum_{1 \leq k \leq p} \dim E_{\lambda_k}(u) = n$.

Condition suffisante de diagonalisabilité : si un endomorphisme u de E admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. De plus, les sous-espaces propres sont alors des droites vectorielles.

Condition suffisante de diagonalisabilité : si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable et possède n valeurs propres distinctes et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

⚠ Connaître des contre-exemples prouvant que ces deux conditions suffisantes ne sont pas nécessaires. Un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé et que, pour toute valeur propre de u , la dimension de l'espace propre associé est égale à sa multiplicité. 📎