– Programme de colle n° 11 : du 9 au 13/12 –

Les questions de cours et les exercices portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur le chapitre 10 : version algébrique de la réduction.

Chapitre 10 - Réduction (2) - version algébrique.

I. Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

II. Polynômes annulateurs. Polynôme minimal.

II.1. Polynôme annulateur et spectre.
II.2. Polynôme minimal d'un endomorphisme.
II.3. Polynôme minimal d'une matrice carrée.
II.4. Le théorème de Cayley-Hamilton.

III. Lemme de décomposition des noyaux.

IV. Polynômes annulateurs et réduction.

V. Réduction des endomorphismes à polynômes annulateurs scindés.

Chapitre 11 - Suites et séries de fonctions.

⚠ Cours uniquement.

I. Modes de convergence des suites de fonctions.

Convergence simple. Convergence uniforme.

⚠ Ne pas confondre la convergence uniforme sur A et la convergence dans l'espace vectoriel normé des fonctions bornées sur A $(\mathcal{B}(A,F), \|\cdot\|_\infty)$. En effet, pour la convergence uniforme ni les fonctions f_n ni la fonction f ne sont supposées appartenir à $\mathcal{B}(A,F)$. Ce qui appartient à $\mathcal{B}(A,F)$ c'est seulement $f_n - f$, et seulement à partir d'un certain rang.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A on a : $f_n(a_n) - f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Alors, pour tous scalaires $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\alpha f + \beta g$. ✎

II. Continuité. Double limite.

Soit $a \in A$. Si les f_n sont continues en a et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors f est continue en a. ✎

Théorème de la "double limite". Soit a un point adhérent à A. On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers une fonction f.

Alors, la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in F$, et la fonction f admet ℓ pour limite en a. Autrement-dit :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right).$$

III. Intégration d'une limite uniforme sur un segment.

On suppose que $I = [a, b]$ avec $a < b$ et que les fonctions f_n sont continues sur I. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors : $\displaystyle\int_{[a,b]} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{[a,b]} f$. ✎

On suppose que les fonctions f_n sont continues sur I et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f.

Soit a un point de I. On définit φ et φ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les primitives respectivement de f et f_n qui s'annulent en a :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \varphi_n(x) = \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Alors, φ_n converge uniformément sur tout segment de I vers φ.

IV. Dérivation d'une suite de fonctions.

On suppose que : ✎

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I,
- la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$,
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

V. Approximation uniforme.

V.1. Approximation uniforme par des fonctions en escalier.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction ϕ en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - \phi\|_\infty \leqslant \varepsilon$. ✎

Autrement-dit, toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

V.2. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales.

Théorème de Weierstrass. Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

VI. Séries de fonctions.

VI.1. Convergence simple, uniforme et normale d'une série de fonctions.
VI.2. Continuité. Double limite.
VI.3. Intégration terme à terme d'une série.
VI.4. Dérivation terme à terme d'une série.
Savoir prouver que la fonction zêta de Riemann est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$. ✎