– Programme de colle n° 12 : du 16 au 20/01 –

Les questions de cours portent sur tout ce qui suit.
Les exercices portent sur les suites de fonctions et séries de fonctions (voir programme précédent).

Chapitre 12 - Séries entières.

⚠ Cours uniquement.

I. Séries entières et rayon de convergence.

I.1. Définition d'une série entière.

I.2. Rayon de convergence d'une série entière.

Lemme d'Abel. ✎

I.3. Domaine de convergence. Disque ouvert de convergence.

Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument. Si $\sum a_n\, z^n$ converge, alors $|z| \leqslant R$. ✎

Les ensembles suivants ont tous les 4 pour borne supérieure dans $[0, +\infty]$ le rayon de convergence R de la série :

$I_1 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ $\quad I_2 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$

$I_3 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n\, r^n \text{ converge}\}$ $\quad I_4 = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum a_n\, r^n \text{ converge absolument}\}$.

⚠ Connaître le rayon de convergence ne nous donne qu'une information partielle sur le domaine de convergence.
En effet, si $R > 0$ on a : $\boxed{D \subset \Omega \text{ et } \Omega \subset \overline{D}}$.

I.4. Détermination du rayon de convergence.

Soit $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

1. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$. ✎

2. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

3. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Règle de d'Alembert. ⚠ La règle de d'Alembert n'est qu'une implication.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.✎

I.5. Somme de deux séries entières.

I.6. Produit de Cauchy de deux séries entières.

Le rayon de convergence R de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ vérifie : $R \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

II. Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe.

Une série entière converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact contenu dans son disque ouvert de convergence. ✎

C'est en particulier le cas sur toute boule fermée (quelque soit son centre) contenue dans le disque ouvert de convergence. La fonction S est continue sur le disque ouvert de convergence.

III. Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle.

III.1. Continuité de la fonction somme.

Théorème d'Abel radial pour la variable réelle (démonstration admise).

III.2. Dérivabilité de la fonction somme.

La fonction S est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et l'on peut dériver terme à terme : $\forall t \in]-R,R[,\ S'(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n\, t^{n-1}$. ✎

Par récurrence, on obtient que la somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Si $\sum a_n\, t^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S. Alors : $\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \dfrac{S^{(p)}(0)}{p!}$.
Unicité du développement en série entière. Primitivation d'une série entière.

IV. Développements en série entière.

IV.1. Fonctions développables en série entière.

Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $D(0,r)$, alors $f+g$, αf et fg aussi.
Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors les dérivées successives et les primitives de f aussi.

IV.2. Développements usuels (variable réelle).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{(2\,n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

- Pour tout $x \in]-1,1[$ on a :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha \ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n.$$ ✎