Question 1. Bien sûr on démontre que l^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Clairement $(0)\in l^\infty$ et, étant donnés u et v éléments de l^∞, alors pour tout n, $|u_n+v_n|<\|u\|+\|v\|$ donc $u+v\in l^\infty$ et, de plus, $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$. Enfin, il ne fait aucun doute que, si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot u\in l^\infty$ et que $\|\lambda\cdot u\|=|\lambda|\cdot\|u\|$ ce qui achève de montrer que l^∞ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$. De plus, $\|u\|=0$ si et seulement si $\forall n, u_n=0$ et donc $\|.\|$ est une norme de l^∞.

Question 2. $\frac{u_n}{3^n}=O(\frac{1}{3^n})$ et $\sum\frac{1}{3^n}$ est absolument convergente, donc par comparaison, $\sum\frac{u_n}{3^n}$ est (absolument) convergente.

Question 3. On constate que pour tout $u\in l^\infty$, $|\sigma(u)|\leqslant\sum\frac{\|u\|}{3^n}\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{\|u\|}{1-\frac{1}{3}}$ ce qui assure la continuité de σ (qui bien sûr est une forme linéaire)

Question 4. En reprenant la majoration précédente pour $t\in T$, et en tenant compte de ce qu'alors $\|t\|\leqslant 2$, alors $|\sigma(t)|\leqslant 1$. Bien sûr, $\sigma(t)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc il ne fait aucun doute que $\sigma(t)\geqslant 0$.

Question 5. Le calcul donne ici $\sigma(\tau)=\frac{1}{3}$ et $\sigma(\tau')=\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ donc σ n'est pas injective. (Comme vu après, τ est associé à l'écriture ternaire propre de $\frac{1}{3}$ et τ' à l'écriture ternaire impropre de $\frac{1}{3}$.)

Question 6. Par définition de la partie entière, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$\lfloor 3^{n-1}x\rfloor\leqslant 3^{n-1}x<\lfloor 3^{n-1}x\rfloor+1$$

et ainsi : $3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor\leqslant 3^n x<3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor+3$ et il vient $3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor<\lfloor 3^n x\rfloor+1$ et $\lfloor 3^n x\rfloor<3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor+3$ et donc $3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor\leqslant\lfloor 3^n x\rfloor<3\lfloor 3^{n-1}x\rfloor+3$ ce qui assure que la suite $(t_n(x))$ est bien à valeurs dans $\{0,1,2\}$ et ainsi $t(x)\in T$.

Question 7. On remarque que pour tout $n\geqslant 2$, $x_n-x_{n-1}=\frac{t_n(x)}{3^n}$ et donc $0\leqslant x_n-x_{n-1}\leqslant\frac{2}{3^n}$, alors (x_n) est croissante et il vient $y_n-y_{n-1}\leqslant 0$ et (y_n) est donc décroissante. De plus, de la définition de la partie entière il vient que $x_n\leqslant x<y_n$ donc x est la limite commune de (x_n) et de (y_n).

On remarque de plus que pour tout n, $x_n=\sum_{k=1}^n\frac{t_k(x)}{3^k}$ et donc on en déduit que x est la somme de $\sum\frac{t_n(x)}{3^n}$.

Ceci établit que $u\mapsto\sigma(u)$ réaliste une surjection de T dans $[0,1]$.

Question 8.

```
def flotVersTern(n, x):
    chiffres = []
    for i in range(1, n+1):
        x = (x % 1.0) * 3
        chiffres.append(int(x))
    return chiffres
```

Question 9.

```
def ternVersFlot(l):
    x = 0
    puiss3 = 1/3
    for i in range(len(l)):
        x += l[i] * puiss3
```

```
        puiss3 /= 3
    return x
```

Question 10.

```
def ajout(l):
    if sum(l) % 2 == 0:
        l.append(-1)
    else:
        l.append(-2)
    return l

def verif(l):
    return sum(l) % 2 == 1
```