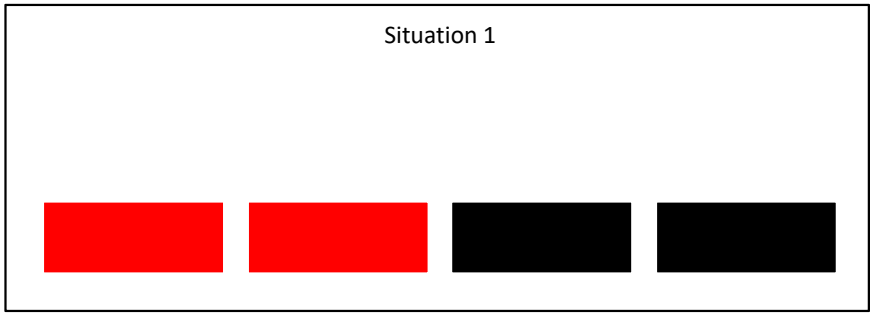
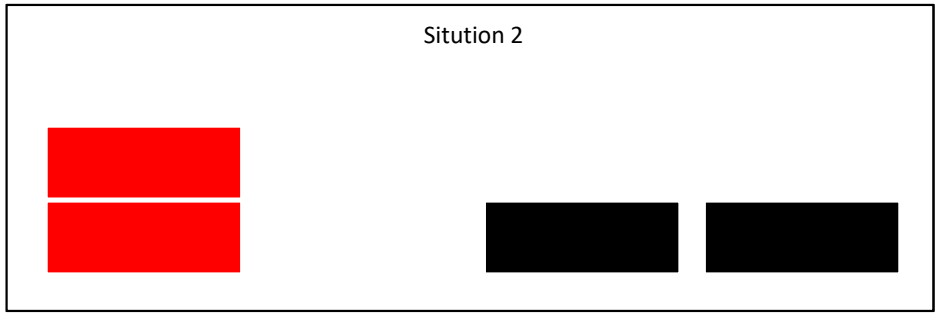
Q1-Etat de la liste x **dans les 2 situations**





- Nombre de tablettes /couleur : N=2
- Couleurs : ci=0 pour le rouge, ci=1 pour le noir

- Situation 1: x = [[0,1] , [0,1] , [1,1] , [1,1]]
- Situation 2: x = [[0,2],[1,1],[1,1]]

Q2-Fonction empile(x, i, j) prenant en paramètres la liste de situations x et les indices i,j de 2 piles pi et pj tels que i≠j.

La fonction retourne la liste de listes LXij des situations atteignables par empilement.

```
def empile( x,i,j ):
    """ empile ( x : list, i : int, j : int )-> list
        entrees : x, liste de listes(ci,hi), represente la situation initiale.
                : i, j, entiers, indices des piles que l'on veut empiler
        sortie; LXij , liste de situations possibles après empilement           """
    LXij = []
    ci , hi = x[i]
    cj , hj = x[j]
    if ci==cj or hi==hj : #empilement possible
        reste = x[:i]+x[i+1:j]+x[j+1:]
        pij = [ci,hi+hj] # pile ci sur cj (arbitrairement)
        X = reste + [pij]
        X.sort()
        LXij.append(X)
        if ci!=cj: # si couleur différente => ajouter la situation avec cj au dessus
            pji = [cj,hi+hj] # pile cj sur ci
            X = reste + [pji]
            X.sort()
            LXij.append(X)
    return LXij
```

- Q3 **Fonction coups(x)** qui prend en paramètre une situation x (liste) et retourne une liste

```
def coups(x):
    """ coups(x : list) -> list
      entree: x, liste de liste(ci,hi), situation initiale
      sortie: ensemble des situations possibles avec ttes les combinaisons d'empilement possibles
    """
    LX = []
    for i in range( len(x) ):
        for j in range( i+1 , len(x) ):
            LXij = empile( x,i,j )
            for X in LXij:
                if X not in LX: # On n'ajoute la situation que si elle n'a pas déjà été stockée
                    LX.append(X)
    return LX
x = [ [0,2],[0,3],[1,1],[1,2] ]
lesCoups1 = coups(x)
print( lesCoups1 )
# affiche [[[0, 5], [1, 1], [1, 2]], [[0, 3], [0, 4], [1, 1]], [[0, 3], [1, 1], [1, 4]],
[[0, 2], [0, 3], [1, 3]]]
x = [[0,1],[0,1],[1,1],[1,1]]
lesCoups2 = coups(x)
print( lesCoups2 )
# affiche [[[0, 2], [1, 1], [1, 1]], [[0, 1], [0, 2], [1, 1]], [[0, 1], [1, 1], [1, 2]],
[[0, 1], [0, 1], [1, 2]]]
```

- **Partie 2 : Création du graphe du jeu**
- Q4-**Fonction init(C, N)** prenant en paramètres C le nombre de couleurs et N le nombre de tablettes par couleur et renvoyant la liste x0 situation initiale du jeu triée

```
def init(C,N):
    """ init( C : int, N: int ) -> list
        entrees : C, entier positif, nombre de couleurs differentes
                : N , entier positif, nombre de tablettes par couleur
        sortie : x0, liste de listes (ci,hi) correspondant à la situation initiale
    """
    x0 = []
    for c in range(C):
        for _ in range(N):
            x0.append([c,1])
    x0.sort() # Inutile compte tenu de la programmation avec c croissant
    return x0

test = init( 3, 4 )
print(test)
# affiche [[0, 1], [0, 1], [0, 1], [0, 1], [1, 1], [1, 1], [1, 1], [1, 1], [2, 1], [2, 1]
, [2, 1], [2, 1]]
```

- Q5-F**onction récursive Tuple(L)** réalisant cette transformation de liste en Tuple.

```
def Tuple(L):
    if L==[]:
        return ()
    elif type(L[0])!=list:
        return tuple(L)
    else:
        Res = []
        for l in L:
            Res.append(Tuple(l))
        return tuple(Res)
```

- Q6- **Fonction graphe(C , N)** réalisant le parcours en largeur des possibilités.

```
from collections import deque
def graphe(C,N):
    """ graphe(C : int ,N:int )-> dict
        entrees : C, entier positif, nombre de couleurs differentes
                : N , entier positif, nombre de tablettes par couleur
        sortie : G, dictionnaire, representant le graphe :clé : tuple de la situation,
                                                valeur :liste de liste de situation atteignables   ""
    # constitution de la situation initiale
    x0 = init(C,N)
    G = {} # initialisation du dictionnaire G qui représente le graphe
    file = deque()
    file.append(x0) # initialisation de la file avec la situation initiale x0
    while len(file) != 0:
        x = file.popleft()  # recuperation du 1er element de la file
        Cle = Tuple(x)      # génération de la cle sous forme de tuple
        Lc = coups(x)       # recuperation de la liste des situations atteignables depuis x
        Valeur = Lc
        G[Cle] = Valeur # ajout dans le graphe du couple clé, valeur
        #ajout ds la file des differentes situations(si pas deja été stockées)pr traitt ultérieur
        for c in Lc:
            if Tuple(c) not in G:
                file.append(c)
    return G
```

Q7- Que représentent N1 et N2 ?

```
N1 = len(Graphe)
N2 = sum([len(Graphe[x]) for x in Graphe])
```

N1 : nombre de sommets (12 sur l'exemple)
N2 : nombre d'arêtes (16 sur l'exemple)

Q8- Remplissage tableau :

	N =	1	2	3	4
C = 1	Sommets	1	2	3	5
	Arêtes	0	1	2	5
	Temps (s)	$2{,}1.10^{-5}$	$8{,}0.10^{-6}$	$1{,}6.10^{-5}$	$2{,}9.10^{-5}$
C = 2	Sommets	3	12	43	133
	Arêtes	2	16	90	386
	Temps (s)	$1{,}1.10^{-5}$	$8{,}8.10^{-5}$	$1{,}0.10^{-3}$	$2{,}8.10^{-2}$
C = 3	Sommets	7	92	696	4220
	Arêtes	6	234	2832	23 487
	Temps (s)	$2{,}6.10^{-5}$	$3{,}9.10^{-3}$	1,2	6560
C = 4	Sommets	23	728		
	Arêtes	48	3040		
	Temps (s)	$9{,}1.10^{-4}$	1,6		

- **Partie 2 : Graphe biparti**

Q9- F**onction sommets_12(G,C,N)** prenant en argument le graphe G, N et C, et retournant les 2 Tuples des sommets S1 et S2 des joueurs J1 et J2

```
# Question 9 - sommets_12
def sommets_12( G, C, N ):
    S1 = []
    S2 = []
    n = N*C
    for e in G:
        if len(e)%2 == n%2:
            S1.append(e)
        else:
            S2.append(e)
    return tuple(S1),tuple(S2) # S1 et S2 déjà Tuples, donc Tuples inutile
```

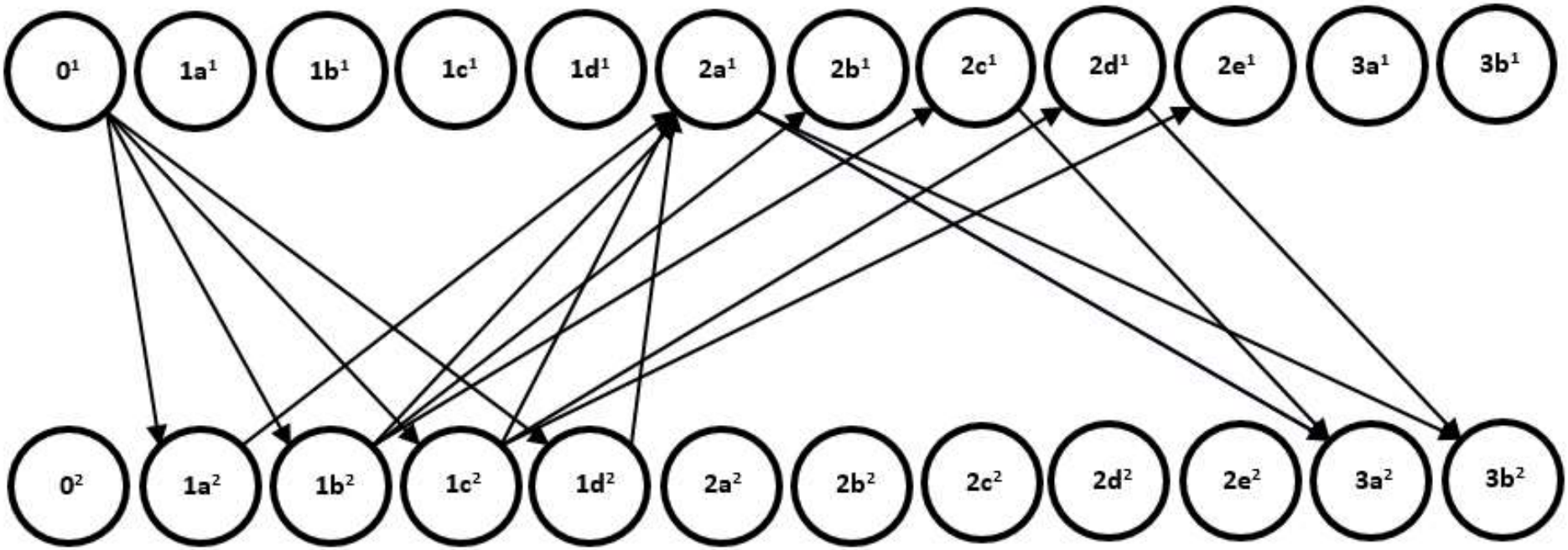
Q10- Créer les Tuples S1 et S2 dans le cas C=N=2.

```
# Question 10 - Création des sommets S1 et S2
C,N = 2,2
Graphe = graphe( C , N )
S1,S2 = sommets_12( Graphe , C , N )
```

Q11- Pour C=N=2, et en prenant à chaque fois le premier successeur identifié dans le graphe, **afficher une partie et préciser le joueur gagnant**

```
C,N = 2,2
Graphe = graphe(C,N)
x0 = init(C,N)
Depart = x0
succ = x0
Joueur = 1
print("Joueur:",Joueur)
print("Jeu:",succ)
L_succ = Graphe[Tuple(succ)]
while len(L_succ)>0:
    if len(L_succ) > 0:
        succ = L_succ[0]
        Joueur = 3 - Joueur
        print("Joueur:",Joueur)
        print("Jeu:",succ)
        L_succ = Graphe[Tuple(succ)]
```

Détermination des positions gagnantes



Positions
2b 2e 3a 3b pas gagnantes car pas de successeurs
2a 2c 2d gagnantes car au moins un successeur n'est pas gagnant
1a et 1d pas gagnants car tous les successeurs sont gagnants (2a)
1b gagnant car au moins un successeur pas gagnant (2b)
1c gagnant car au moins un successeur pas gagnant (2e)
0 gagnant car au moins un successeur pas gagnant (1a et 1d)
Finalement, les positions gagnantes sont: 0 1b 1c 2a 2c 2d!!

Q13-**Fonction est_gagnante(G,x)** prenant en argument le graphe du jeu et la position x (liste ou Tuple) et renvoyant le booléen True si la position est gagnante pour le joueur qui y joue, et False sinon

```
'''
Version 1: On vérifie que tous les successeurs sont gagnants
Pour gagner du temps, on s'arrêt dès qu'un successeur pas gagnant a été trouvé
'''


def est_gagnante(G,x): # x liste ou Tuple
    L_succ = G[Tuple(x)]
    if len(L_succ) == 0:
        return False # Non gagnant
    else: # Tous les successeurs sont gagnants
        Tous_Gagnants = True
        for succ in L_succ: # succ est une liste
            Tous_Gagnants = Tous_Gagnants and est_gagnante(G,succ)
            if Tous_Gagnants == False: # gagne du temps
                break  # Position gagnante
        return not(Tous_Gagnants) # Position pas gagnante
```

Q13-F**onction est_gagnante(G,x)** prenant en argument le graphe du jeu et la position x (liste ou Tuple) et renvoyant le booléen True si la position est gagnante pour le joueur qui y joue, et False sinon

```
'''
Version 2: On cherche un successeur pas gagnant
Cela revient au même, mais c'est rédigé un peu autrement
'''


def est_gagnante(G,x): # x liste ou Tuple
    L_succ = G[Tuple(x)]
    if len(L_succ) == 0:
        return False # Pas gagnant
    else: # Aucun successeur pas gagnant
        Res = False
        for succ in L_succ: # succ est une liste
            if not est_gagnante(G,succ): # Un pas gagnant trouvé
                Res = True # Position gagnante
                break # Gagne du temps
        return Res
```

- Q14- Mettre en place une **fonction dico_gagnant(G)** dont les clés sont les positions du graphe et les valeurs, le booléen True ou False indiquant si la position est gagnante ou non.

```
def dico_gagnant(G):
    dico = {}
    for x in G:
        dico[x] = est_gagnante(G,x)
    return dico

C,N = 2,2
Graphe = graphe(C,N)
x0 = init(C,N)
dico_g = dico_gagnant(Graphe)
Statut_x0 = dico_g[Tuple(x0)]
print("Le joueur 1 dispose d'une position gagnante ?",Statut_x0)

''' Résultat
Le joueur 1 dispose d'une position gagnante ? True
'''
```

- Q15- **Fonction dico_gagnant_opt(G)** renvoyant le dictionnaire des états gagnants des positions du graphe avec mémoïsation

```
def dico_gagnant_opt(G):
    def rec(G,x): # Programmé pour que x soit un Tuple (*)
        if x in dico: # Nouveau
            return dico[x] # Nouveau
        else: # Nouveau
            if len(x) == 0:
                dico[x] = False # Nouveau
                return False
            else:
                L_succ = G[x]
                Res = False
                for succ in L_succ:
                    if not rec(G,Tuple(succ)): # (*) x est un Tuple
                        Res = True
                        break
                dico[x] = Res # Nouveau
                return Res
    dico = {}
    for x in G:
        dico[x] = rec(G,x) # x est un Tuple
    return dico
```

- Q17- Mettre en place le code nécessaire et remplir le tableau proposé

```
print("Joueur disposant d'une position gagnante au départ: ")

Cmax = 3
Nmax = 3

Titre = "  N="
for N in range(1,Nmax+1):
    Titre += str(N) + " "
print(Titre)

for C in range(1,Cmax+1):
    Ligne = 'C=' + str(C) + " "
    for N in range(1,Nmax+1):
        G = graphe(C,N)
        x0 = init(C,N)
        dico_g = dico_gagnant(G)
        Statut_x0 = dico_g[Tuple(x0)]
        if Statut_x0:
            Ligne += '1 '
        else:
            Ligne += '2 '
    print(Ligne)
```

```
''' Résultats
  N=1 2 3 4
C=1 2 1 2 1
C=2 1 1 2 2
C=3 1 2 1 1

  N=1 2
C=1 2 1
C=2 1 1
C=3 1 2
C=4 1 1

Soit par reconstruction
  N=1 2 3 4
C=1 2 1 2 1
C=2 1 1 2 2
C=3 1 2 1 1
C=4 1 1
'''
```