THÉORIE DES JEUX
JEUX A DEUX JOUEURS
ATTRACTEUR & STRATÉGIE

Informatique Tronc Commun

E. CLERMONT

JEUX D'ACCESSIBILITÉ

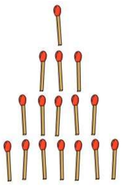
- Le programme limite l'étude aux jeux d'accessibilité (Impartial Game) à 2 joueurs pour lesquels :
  - 2 joueurs prennent à tour de rôle une décision parmi un ensemble fini de décisions possibles.
  - Chaque décision amène à une nouvelle situation.
  - Les 2 joueurs ont la même vision d'ensemble de la situation : **jeu à information complète.**
  - Une décision est prise en fonction de la situation présente, et non des situations passées : jeu sans mémoire
  - Une décision ne dépend que de la situation et non du joueur : **jeu impartial.**
  - Dans une situation donnée, une décision amène toujours à la même situation : **jeu sans hasard.**

- Ces jeux sont modélisés par des **graphes orientés finis.**
- Une **situation** (ou **position ou configuration**) de jeu correspond à un sommet du graphe.
- Une **décision** correspond au **choix d'un arc** amenant à une nouvelle position.

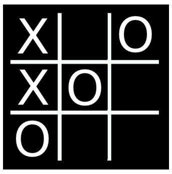
JEUX D'ACCESSIBILITÉ

- **Jeu de Nim.**
- Le jeu de Nim (ou jeu de la soustraction) est un jeu d'accessibilité dont il existe de nombreuses variantes. Il faut déplacer, poser de retirer un certain nombre d'objets simples (pièces, allumettes, graines, des billes. . .).
- Le dernier à jouer gagne ou perd (variante misère).
- Le jeu de Nim fait donc nécessairement un perdant et un gagnant.

- **Variantes du jeu de Nim :**
- le jeu de Marienbad (avec des cartes ou des allumettes)
- le jeu des bâtonnets (Fort boyard),
- le jeu de Grundy.

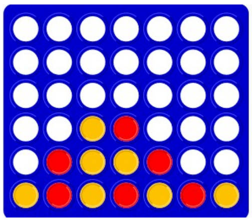


- **Jeu du morpion ou Tic-Tac-Toe**

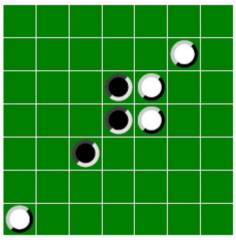


JEUX D'ACCESSIBILITÉ

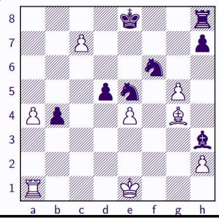
- **Jeu de puissance 4.**



- **Jeu Othello (ou Reversi)**



- **Jeu d'échecs**



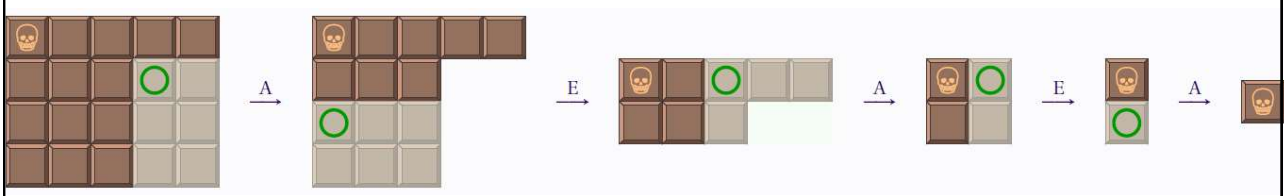
JEUX D'ACCESSIBILITÉ

- **Jeu de chomp**

On dispose d'une tablette de chocolat rectangulaire de format *p x q*.

- Le carré supérieur gauche est empoisonné.
- Chaque joueur choisit a tour de rôle un carré et le mange, ainsi que tous les morceaux situés à la droite et en dessous du carre choisi.
- Le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carre empoisonné a perdu.

- Exemple de partie en 4x5 : Adam joue en premier. Il gagne le partie.



GRAPHES DES JEUX

- **Définition : Graphe du jeu**

On appelle **graphe du jeu** ou **arène** associé à un tel jeu un graphe $G = (S, A)$ tel que :

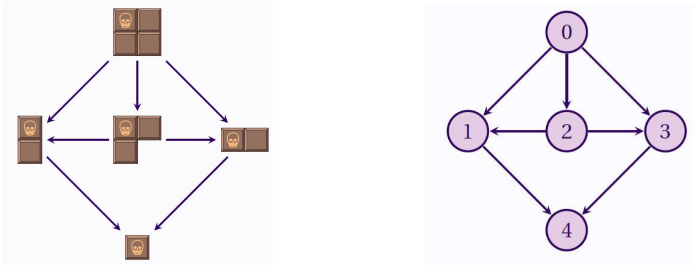
- Chaque sommet dans S représente une **position (configuration)** du jeu à partir de laquelle soit Adam, soit Ève doit jouer .

L'une d'entre elles est la position de départ.

- Chaque arête $a = (s1, s2) \in A$ signifie qu'un des deux joueurs peut passer de la position $s1$ à la position $s2$ en un coup.

GRAPHES DES JEUX BIPARTIS

- **Exemple : Arène associée au jeu de Chomp pour une tablette (2, 2)**



- Pour visualiser une partie de Chomp, il suffit d'imaginer un jeton initialement posé sur la position initiale s_0. A tour de rôle, chaque joueur le déplace le long d'une arête issue de la position courante s et le pose sur un successeur de s.
- Une partie est donc un chemin d'origine s_0 dans l'arène.
- Ce jeu fait partie des jeux d'accessibilité : le graphe associe ne comporte pas de cycle (ce qui assure que toute partie est finie), et il est déterminé par un ensemble de positions (les cibles) qui sont sans successeurs.
- => dans le jeu de Chomp le nœud du graphe associe au seul carre empoisonné est la seule cible du jeu, et l'atteindre signifie la fin de la partie (et la victoire pour celui qui l'atteint).

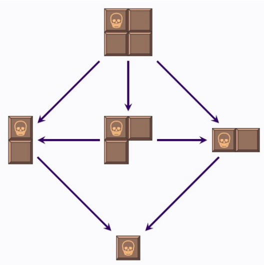
GRAPHES BIPARTIS

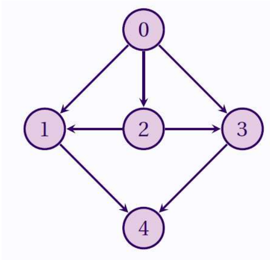
- **Graphe biparti**
- Un graphe $G = (S, A)$ est dit **biparti**
  - si l'ensemble S des sommets peut être partitionné en 2 sous-ensembles S_A et S_E tels que $S = S_A \, U \, S_E$ et $S_A \cap S_E = \emptyset$
  - de telle sorte qu'un arc ne puisse relier entre eux deux sommets de S_A, ni relier entre eux deux sommets de S_E.

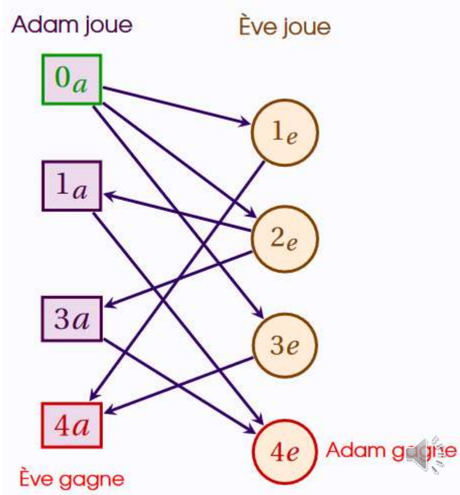
GRAPHES BIPARTIS

- **Graphe biparti**
- Dans le graphe précédent, on n'a pas tenu compte de qui joue. Il faut doubler les sommets qui peuvent être atteints par les 2 joueurs.

Le graphe biparti est le suivant :







Remarque : Le jeu peut être dans le même état au moment où soit Adam, soit Ève joue : ce sont deux positions différentes (donc deux sommets différents dans le graphe biparti).

STRATÉGIES ET POSITIONS GAGNANTES

- On considère une arène $G = (S, A)$, graphe biparti avec $S = S_A \cup S_E$.

Les sommets de S_A sont les positions contrôlées par Adam et ceux de S_E sont celles contrôlées par Ève.

- On note *Va*, *Ve* et *N* respectivement les ensembles de **sommets de victoire** d'Adam, de victoire d'Ève et de nul.
- On définit une fonction Succ tel que pour tout $s \in S$, $\mathrm{Succ}(s) = \{s' \in S, (s, s') \in A\}$.

Le graphe est biparti => $\mathrm{Succ}(S_E) \subset S_A$ et $\mathrm{Succ}(S_A) \subset S_E$.

- **Définition : Partie**

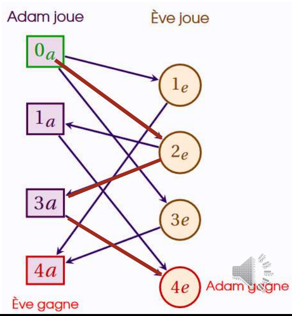
Une **partie** est un chemin dans le graphe, c'est-à-dire une suite, finie ou non (sn) de positions (sommets) tel(le)s que pour tout i, $(s_i, s_{i+1}) \in A$ càd $s_{i+1} \in \mathrm{Succ}(s_i)$.

- **Définition : Partie gagnante**

Une **partie gagnante** pour Adam est une partie finie dont la dernière position appartient à *Va* et dont aucune autre n'est dans *Va U Ve* .
La définition est analogue pour Ève.

- **Exemple de partie gagnante pour Adam avec le jeu de Chomp** 2 *x* 2

(0*a*,2*e* ,3*a*,4*e*)



Remarque : Si la dernière position est dans $S \setminus (Va \cup Ve)$ et s'il n'existe pas d'arête partant de celle-ci, il y a **match nul** (c'est une position de *N*).

STRATÉGIES ET POSITIONS GAGNANTES

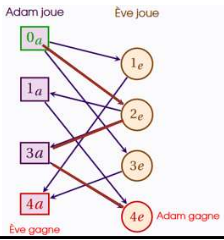
- **Définition : Stratégie**
- Une **stratégie** (sans mémoire) pour un joueur est la donnée de coups de ce joueur pour certaines de ses positions, sans tenir compte des coups précédents.
- Ainsi, une stratégie pour Adam est une fonction $f : S'_a \subset S_a \rightarrow S_e$

  telle que $\forall\, s_a \in S'_a$, $(s_a, f(s_a)) \in A$ ie $f(s_a) \in \mathrm{Succ}(s_a)$.

(Idem pour Ève).

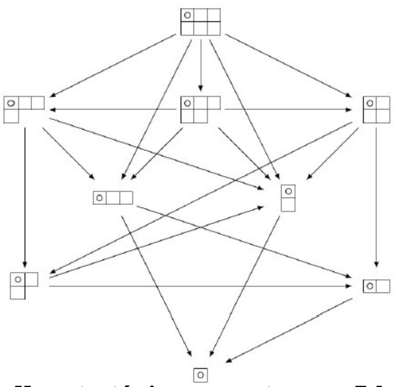
- On dit que c'est une **stratégie gagnante** pour ce joueur lorsque toutes les parties qu'il joue avec les coups donnés par cette stratégie sont gagnants pour ce joueur.
- Parfois, on demande que f soit définie sur S_a tout entier, mais seules les images des positions gagnantes sont utilisées. Nous avons fait le choix dans ce cours de ne définir f que sur une partie S_0 de S_a.

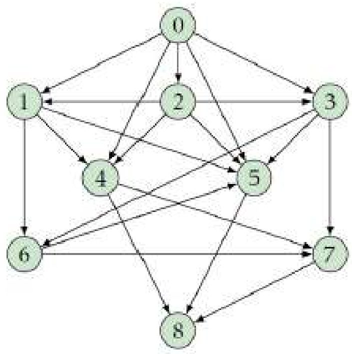
Exemple : pour le jeu de Chomp $2x2$
La stratégie $f(0) = 2$, $f(1) = f(3) = 4$ est gagnante pour Adam.
Il n'y a pas de stratégie gagnante pour Ève.

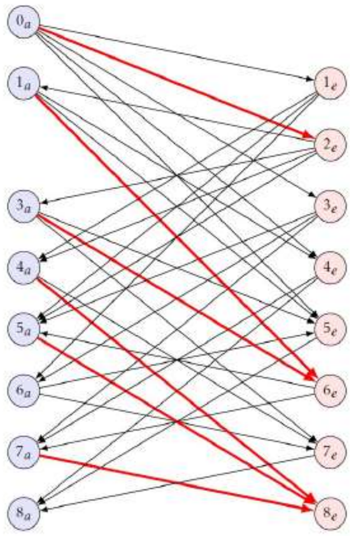


STRATÉGIES ET POSITIONS GAGNANTES

- **Application pour le jeu de chomp (2,3)**







Une **stratégie gagnante pour Adam** est en rouge sur le graphe biparti.
Il doit commencer par poser le jeton sur le sommet 2, puis :

- si Eve joue son coup suivant sur 1 ou 3, poursuivre sur 6. Eve ne peut alors que suivre sur 5 ou 7, et Adam peut alors conclure en jouant sur 8 ;
- si Eve joue son coup suivant sur 4 ou 5, poursuivre (et terminer) sur 8.

Eve possède elle aussi une stratégie gagnante définie par f(1e) =f(3e) =6a et f(4e) =f(5e) = f(7e) = 8a, mais comme elle ne joue pas en premier, il est nécessaire qu'Adam ne joue pas sur le sommet 2 au début de la partie pour qu' Eve puisse suivre cette stratégie.

CALCUL DES POSITIONS GAGNANTES

- On s'intéresse à la possibilité de gagner en au plus *n* coups pour Adam à partir d'une position $s \in S$.
- Soit $\boldsymbol{n = 0}$ et il faut que $s \in V_A$.
- Soit $\boldsymbol{n \geqslant 1}$ et on distingue 3 cas :
  - Soit la position était déjà gagnante en au plus *n* -1 coups.
  - Soit c'est à Adam de jouer, ie $s = s_A \in S_A$, et il faut trouver un coup menant à $s_E \in S_E$ tel que *ce* soit gagnant pour Adam en au plus *n* -1 coups.
  - Soit c'est à Ève de jouer ie $s = s_E \in S_E$ et il faut que :
    - Ève puisse encore jouer;
    - que tous les coups d'Ève mènent à des positions gagnantes pour Adam en au plus *n* -1 coups.

ATTRACTEUR - DÉFINITION

Soit $G = (S, A)$ un graphe,
On appelle **attracteur pour Adam** l'ensemble de toutes les positions gagnantes pour Adam, noté $\mathcal{A}_A$.
On note :
$\mathcal{A}_A{}^n$ = { positions gagnantes pour Adam en au plus *n* coups }
On définit $\mathcal{A}_A{}^n$, incrémentalement, par récurrence :

- $\mathcal{A}_A{}^0 = V_A$
- $\forall n \geq 0 : \mathcal{A}_A{}^n(F_1) = \mathcal{A}_A{}^{n-1}$

$\cup \{s_A \in S_A \;,\; \exists\, s_E \in \mathcal{A}_A{}^{n-1} \;,\; s_E \in \mathrm{Succ}(s_A)\}$

$\cup \{s_E \in S_E \mid \mathrm{Succ}(s_E) \neq \emptyset \text{ et } \mathrm{Succ}(s_E) \subset \mathcal{A}_A{}^{n-1}\}$

ensemble des sommets de S_A qui ont un voisin dans $\mathcal{A}_A{}^{n-1}$

ensemble des sommets de S_E dont tous les voisins sont dans $\mathcal{A}_A{}^{n-1}$

L'attracteur d'Adam est : $\boldsymbol{\mathcal{A}_A = \cup\, \mathcal{A}_A{}^n}$ **pour tout n** $\in \mathbb{N}$ **.**

On fait de même pour l'attracteur d'Eve.

Remarque : La suite $\mathcal{A}_A{}^n$ est croissante et stationnaire car $\mathcal{A}_A{}^k \subseteq \mathcal{A}_a{}^{k+1} \subseteq S$ pour tout $k \geq 0$.

ATTRACTEUR - DÉFINITION

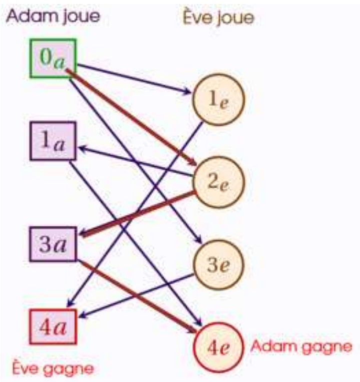
- **Pour le jeu de Chomp** 2 *x* 2

Par Adam :

- $\mathcal{A}_A^0 = \{4e\}$.
- $\mathcal{A}_A^1 = \{4e, 1a, 3a\}$.
- $\mathcal{A}_A^2 = \{4e, 1a, 3a, 2e\}$.
- $\mathcal{A}_A^3 = \{4e, 1a, 3a, 2e, 0a\}$ qui ne bouge plus.

Par Eve :

- $\mathcal{A}_A^0 = \{4a\}$.
- $\mathcal{A}_A^1 = \{4a, 1e, 3e\}$ qui ne bouge plus.



CALCUL D'UNE STRATÉGIE GAGNANTE

- Les positions gagnantes pour Adam sont celles de $\mathcal{A}_A$.
- Les positions gagnantes pour Ève sont celles de $\mathcal{A}_E$.
- Les autres positions conduisent à un match nul (si les deux joueurs jouent de manière optimale).

- **Méthode :** Comment **calculer une stratégie** pour Adam, qui sera gagnante si la position de départ est dans $\mathcal{A}_A$?
- Soit $s_A \in \mathcal{A}_A$ une position gagnante contrôlée par Adam.
- Alors il existe $n \in$ N tel que $s_A \in \mathcal{A}_a^{(n)}$
- Prenons le minimal (on l'appelle alors **rang** de s_A).
- Si $n = 0$, $s_A \in V_A$ et il n'y a rien à faire.
- Sinon, $n \geqslant 1$ et il existe $s_E \in \mathcal{A}_A^{n-1}$ tel que $(s_A, s_E) \in A$ (on a une arête $s_A \text{ -> } s_E$).

On pose alors $f(s_A) = s_E$.

CALCUL D'UNE STRATÉGIE GAGNANTE

Exemple : **Pour le jeu de Chomp** 2 *x* 2

- Il n'y a **pas de stratégie gagnante pour Ève** car la position de départ n'est pas une position gagnante.

- Il y en a une pour Adam car $0_a \in \mathcal{A}_A$:
- 4_e est une position de victoire.

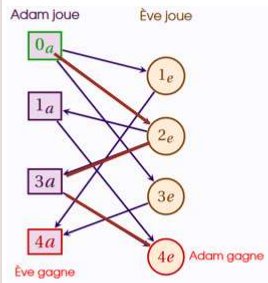
Puis

- $1_a \in \mathcal{A}_A^1 : f(1_a) = 4_e$ car $1_a \to 4_e$ et $4_e \in \mathcal{A}_A^1$
- $3_a \in \mathcal{A}_A^2 : f(3_a) = 4_e$ car $3_a \to 4_e$ et $4e \in \mathcal{A}_A^1$.
- $0_a \in \mathcal{A}_A^3 : f(0_a) = 2_e$ car $0_a \to 2_e$ et $\in \mathcal{A}_A^2$

- **Rappel attracteur**

Par Adam :

- $\mathcal{A}_A^0 = \{ 4e \}$.
- $\mathcal{A}_A^1 = \{ 4e, 1a, 3a \}$.
- $\mathcal{A}_A^2 = \{ 4e, 1a, 3a, 2e \}$.
- $\mathcal{A}_A^3 = \{ 4e, 1a, 3a, 2e, 0a \}$



THÉORIE DES JEUX
JEUX A DEUX JOUEURS
ATTRACTEUR & STRATÉGIE

Informatique Tronc Commun
E. CLERMONT