

Détermination de la valeur propre dominante par la méthode des puissances itérées:

$f: E \rightarrow E$ diagonalisable E euclidien.

$(e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. $x = \alpha_1 \cdot e_1 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$

Soit $x \in E$ de coordonnées $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ selon $(e_1, \dots, e_n)$
tq $\forall i, \alpha_i \neq 0$.

On définit (x_p) suite de E par:

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} \quad \forall p, \quad x_{p+1} = \frac{f(x_p)}{\|f(x_p)\|}$$

On suppose $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$

On remarque que $\forall p, \quad x_p = \alpha_p (\lambda_1^p \cdot \alpha_{p1} + \dots + \lambda_n^p \cdot \alpha_{pn})$
 $\sigma(\lambda_1^p)$

$$\langle f(x_p), x_p \rangle \longrightarrow \lambda_1$$

Décomposition QR :

Th : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ inversible, alors il existe $Q \in O(n)$

et R triangulaire supérieure tq $A = QR$.

La décomposition est unique si on suppose de plus les termes diagonaux de R positifs.

II Supposons que Q, R conviennent

Notons E un espace euclidien de dimension n , muni d'une base orthonormée B .

Notons $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ de matrice A selon B

et $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ de matrice Q selon B .

$(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , notée B'

Q est donc la matrice de passage $P_{B \rightarrow B'}$

R prend la forme $\begin{pmatrix} r_{1,1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & r_{i,i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & r_{n,n} \end{pmatrix}$ et on remarque

que $R = \text{Mat}_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

$$\left(A = \text{Mat}_B(x_1, \dots, x_n), \quad Q = P_{B \rightarrow B'}, \quad A = QR \right)$$

En d'autres termes :

$$x_1 = r_{1,1} e_1,$$

$$x_2 = r_{2,1} e_1 + r_{2,2} e_2$$

$\vdots$

$$x_n = r_{n,1} e_1 + \dots + r_{n,n} e_n.$$

et on remarque que $\forall k, \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$
et $\langle x_k, e_k \rangle = r_{k,k}$.

On reconnaît alors que $(e_1, \dots, e_n)$ est une orthonormalisée de $(x_1, \dots, x_n)$ (qui est de plus unique si on impose, $\forall k, \langle x_k, e_k \rangle > 0$)

Mais alors, si Q, R conviennent et si de plus les termes diagonaux de R sont positifs, alors Q est nécessairement la matrice selon B de l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_1, \dots, x_n)$.

(et R est alors la matrice de $(x_1, \dots, x_n)$ selon $(e_1, \dots, e_n) \dots$)

Synthèse : On suppose toujours A inversible, matrice de $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ selon B base orthonormée de E .

Avec $B' = (e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $(x_1, \dots, x_n)$, $Q = P_{B \rightarrow B'}$ et $R = \text{Mat}_{B'}(x_1, \dots, x_n)$ conviennent. $\square$.

Remarque : Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang p (telle donc que la famille de ses vecteurs colonnes est libre)

alors on peut construire $Q \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $R \in M_p(\mathbb{R})$

tg - Les vecteurs colonnes de Q forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$

- R est triangulaire supérieure (dont on peut prévoir que les coefficients diagonaux sont positifs)

- $A = QR$

(on a alors ${}^t Q Q = I_p$ ($\Delta Q {}^t Q \neq I_n$)
si $p < n$)

Application 1: Si on cherche à résoudre $Y = AX$

Si on connaît une décomposition QR de A :

$Y = QRX$ ssi $RX = {}^t Q Y$.

Application 2: Détermination des valeurs propres de A diagonalisable

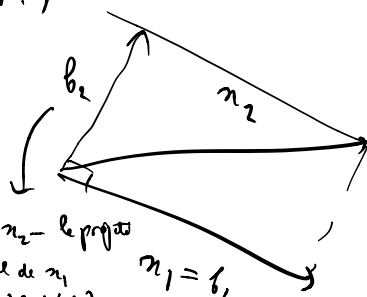
dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$

(toutes de multiplicité 1): voir TD (en janvier!)

Exemple de décomposition QR :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_2 = x_2$ - le projeté orthogonal de x_1 sur $\text{Vect}(b_1)$.



on pose $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qu'on orthogonalise

en b_1, b_2, b_3 (et qu'on normalise encore en e_1, e_2, e_3)

On pose donc $b_1 = x_1$, $\langle b_1, b_1 \rangle = 2$

puis on pose $b_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} \cdot b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(Rappel: Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de F , le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est

$$\langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_p \rangle e_p.$$

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthogonale de F , le projeté orthogonal de $x \in E$ sur F est plutôt :

$$\frac{\langle x, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} \cdot e_1 + \dots + \frac{\langle x, e_p \rangle}{\langle e_p, e_p \rangle} \cdot e_p$$

$$\langle b_2, b_2 \rangle = \frac{1}{4}(1+1+4) = \frac{3}{2}$$

Puis on pose $b_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 - \frac{\langle x_3, b_2 \rangle}{\langle b_2, b_2 \rangle} b_2$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \\ 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle b_3, b_3 \rangle = \frac{4}{3}$$

L'orthonormalisée est ainsi $(e_1, e_2, e_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On pose alors

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\langle b_1, b_1 \rangle = 2 \text{ donc } b_1 = \sqrt{2} e_1$$

$$\langle b_2, b_2 \rangle = \frac{3}{2} \text{ donc } b_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} e_2$$

$$\langle b_3, b_3 \rangle = \frac{4}{3} \text{ donc } b_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_3$$

De plus $x_1 = b_1 = \sqrt{2} e_1$

$$x_2 = b_2 + \frac{1}{2} b_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$$

$$x_3 = b_3 + \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{3} b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} e_2$$

Donc $R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Autres exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\text{can}}(u_1, u_2)$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \sqrt{2} e_1, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_1$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_R$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\langle b_1, b_2 \rangle = \frac{1}{25} (45) = \frac{9}{5}, \quad e_2 = \sqrt{\frac{5}{9}} b_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \sqrt{5} b_1$$

$$u_2 = b_2 + \frac{4}{\sqrt{5}} e_1 = \frac{3}{\sqrt{5}} e_2 + \frac{4}{\sqrt{5}} e_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_Q \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}_R$$