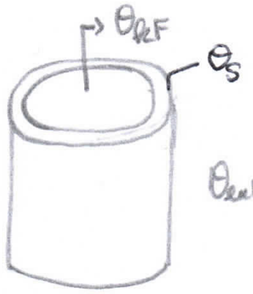
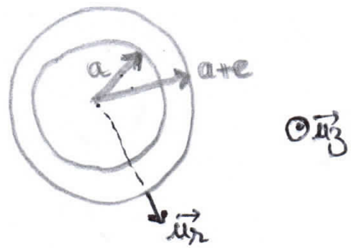
Tasse de café   CCINP   Mopty Villaume Escor   2023.



vue de dessus :



- effets de bords négligés : cylindre ∞. → invariance par translat° selon (Oz), rotat° autour de (Oz) ⇒ $T(r,\cancel{\varphi},\cancel{z},t)$.
- transferts conducto-convectifs au travers de la surface latérale $\vec{j}_{cc} = h(\theta_s - \theta_{ext})\,\vec{u}_r$ ↓ loi de Newton.
- on considère un contact thermique parfait en $r=a$: $\theta(r=a)=\theta_{kF}$
- ARQS ↓ $T(r,\cancel{t})$

$$\theta_{kF} \;-\; \boxed{R_{th c}} \;\xrightarrow{\Phi_{cc}}\; \theta_s ? \;-\; \boxed{R_{th cc}} \;-\; \theta_{ext}$$

on a donc conservat° du flux : $\forall r, \Phi(r) = cste = \Phi_{cc}$ (1er pe)

on a $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \vec{grad}\, T = -\lambda \cdot \dfrac{dT}{dr}\vec{u}_r = -\lambda \dfrac{d\theta}{dr}\vec{u}_r$.

↓ loi de Fourier   ↓ en cyl. avec $T(r)$.

flux au travers de la surface latérale du cylindre de rayon $r \in]a, a+e[$:

$$\Phi = -\lambda \frac{d\theta}{dr} \cdot 2\pi r \cdot H$$

↳ hauteur tasse

et $\Phi_{cc} = h(\theta_s - \theta_{ext}) \cdot 2\pi(a+e) \cdot H$ (flux transféré de la tasse à l'air ext).

ainsi $\quad -\lambda \dfrac{d\theta}{dr} \cdot \cancel{2\pi} r \cancel{H} = h(\theta_s - \theta_{ext}) \cdot \cancel{2\pi}(a+e)\cancel{H}$.

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dr} = \frac{h(\theta_s - \theta_{ext}) \cdot (a+e)}{-\lambda} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow \theta(r) - \theta_{kF} = -\frac{h}{\lambda}(\theta_s - \theta_{ext}) \cdot (a+e) \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

[$r \geq a$ $\ln\left(\frac{r}{a}\right) > 0$. $\theta(r) < \theta_{kF}$ ok]

on veut $\theta_s = \theta(a+e) \leq \theta_{max}$: $\quad \theta_s - \theta_{kF} = -\dfrac{h}{\lambda}(\theta_s - \theta_{ext}) \cdot (a+e) \cdot \ln\left(\dfrac{a+e}{a}\right)$

$$\frac{(\theta_{kF} - \theta_s)}{\theta_s - \theta_{ext}} \cdot \frac{\lambda}{ha} = \Big(1 + \underbrace{\frac{e}{a}}_{x}\Big) \cdot \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{e}{a}}_{x}\Big)$$

on doit résoudre $\quad (1+x)\ln(1+x) = \dfrac{\lambda}{ha} \cdot \dfrac{\theta_{kF} - \theta_s}{\theta_s - \theta_{ext}} \geq \dfrac{1}{5\cancel{0}0 \times 5 \cdot 10^{-2}} \cdot \dfrac{80 - \cancel{50}}{50 - \cancel{20}}$ (30, 30)

résolut° graphique ou numérique $\quad (1+x)\ln(1+x) \geq 0{,}04$.

avec $x = \frac{e}{a} \in [0,1]$

↳ $x \geq 0{,}039 \Rightarrow e \geq 0{,}20$ cm $= 20$ mm

ou résolut° approchée avec $x = \frac{e}{a} \ll 1 \quad \ln(1+x) \simeq x \Rightarrow \dfrac{\theta_{kF} - \theta_s}{\theta_s - \theta_{ext}} \cdot \dfrac{\lambda}{ha} = (1+x) \cdot x$ → éq° de d°2 en x