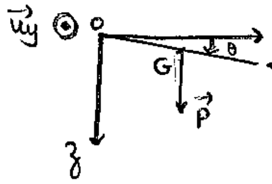
Mouvem^t d'une barre   Vanel CCINP 2023.



$\circlearrowleft^+$ $(\theta<0)$. ← barre lgueur 2ℓ masse m

$\theta(0)=0$.

1) syst {barre} solide en rotat° autour de (Oy) axe fixe ds R_T galiléen.

↳ masse m
mom^t d'inertie $J_{Oy}=\frac{1}{3}m(2\ell)^2$ cf ex toupie

Bdf : $\vec{R}$ exercée en O.

$\vec{P}=mg\vec{u_z}$ exercé en G

TMC / à (Oy) : $\frac{d\sigma_{Oy}}{dt}=\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P}+\vec{R})$. avec $\sigma_{Oy}=J_{Oy}\cdot\omega=J_{Oy}\cdot\dot\theta$

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{R})=\vec{0}$

$\mathcal{M}_{Oy}(\vec{P})=(\vec{OG}\wedge mg\vec{u_z})\cdot\vec{u_y}=-\ell mg\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}_{Oy}(\vec{P})=-\ell mg\cos\theta$

ainsi $J_{Oy}\ddot\theta=-\ell mg\cos\theta \rightarrow \boxed{\ddot\theta=-\frac{\ell mg}{J_{Oy}}\cos\theta}$

$\times\dot\theta$ ↓ $J_{Oy}\dot\theta\ddot\theta=-\ell mg\dot\theta\cos\theta$

$J_{Oy}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\theta^2}{2}\right)=-\ell mg\frac{d}{dt}(\sin\theta)$

$J_{Oy}\frac{\dot\theta^2-\dot\theta_0^2}{2}=-\ell mg(\sin\theta-\underbrace{\sin\theta_0}_{\theta_0=0})$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot\theta^2=\underbrace{-\frac{2\ell mg}{J_{Oy}}\underbrace{\sin\theta}_{<0}}_{>0}+\dot\theta_0^2}$

TEC : $\Delta E_C=W(\vec{P}+\vec{R})$ entre t=0 et t qcq.   or $\mathcal{P}=\mathcal{M}_{Oy}\cdot\dot\theta \Rightarrow \mathcal{P}(\vec{R})=0$

$\mathcal{P}(\vec{P})=-\ell mg\cos\theta\cdot\dot\theta$

$\delta W=\mathcal{P}\cdot dt=-\ell mg\cos\theta\cdot d\theta$

$W(\vec{P})=\int_{\theta_0}^{\theta(t)}-\ell mg\cos\theta d\theta$

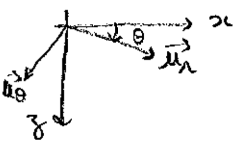
$\Leftrightarrow W(\vec{P})=-\ell mg(\sin\theta(t)-\underbrace{\sin\theta_0}_{0})$

et $E_C=\frac{1}{2}J_{Oy}\cdot\dot\theta^2$

$\rightarrow \frac{1}{2}J_{Oy}(\dot\theta^2-\dot\theta_0^2)=-\ell mg\sin\theta$

$\Leftrightarrow \dot\theta^2=-\frac{2\ell mg}{J_{Oy}}\sin\theta+\dot\theta_0^2$

2) TRC $m\vec{a_G}=\vec{P}+\vec{R}$ avec $\vec{OG}=\ell\vec{u_r}$; $\vec{v_G}=\ell\dot\theta\vec{u_\theta}$ et $\vec{a_G}=-\ell\dot\theta^2\vec{u_r}+\ell\ddot\theta\vec{u_\theta}$



$\vec{u_r}=\cos\theta\vec{u_x}+\sin\theta\vec{u_z}$

$\vec{u_\theta}=-\sin\theta\vec{u_x}+\cos\theta\vec{u_z}$.

$$m\left(-l\dot\theta^2\cos\theta - l\ddot\theta\sin\theta\right)\vec{u_x} + m\left(-l\dot\theta^2\sin\theta + l\ddot\theta\cos\theta\right)\vec{u_z} = mg\vec{u_z} + R_x\vec{u_x} + R_z\vec{u_z}.$$

selon $\vec{u_x}$:
$$R_x = m\left(-l\dot\theta^2\cos\theta - l\ddot\theta\sin\theta\right)$$
$$= m\left(-l\cos\theta.\left(-\frac{2lmg}{J_{oy}}\sin\theta + \dot\theta_0^2\right) - l\sin\theta\left(-\frac{lmg}{J_{oy}}\cos\theta\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow R_x = m\left(\frac{3l^2mg}{J_{oy}}\cos\theta\sin\theta - l\cos\theta\,\dot\theta_0^2\right)$$

selon $\vec{u_z}$:
$$R_z = -mg + m\left(-l\dot\theta^2\sin\theta + l\ddot\theta\cos\theta\right).$$
$$= -mg + m\left(-l\sin\theta\left(-\frac{2lmg}{J_{oy}}\sin\theta + \dot\theta_0^2\right) - \frac{l^2mg}{J_{oy}}\cos^2\theta\right)$$
$$= -mg + m\left(\frac{2l^2mg}{J_{oy}}\sin^2\theta - \frac{l^2mg}{J_{oy}}\cos^2\theta - l\sin\theta\,\dot\theta_0^2\right)$$

Si on recherche plutôt R_r et R_θ :
$$m\left(-l\dot\theta^2\vec{u_r} + l\ddot\theta\vec{u_\theta}\right) = \underbrace{mg\vec{u_z}}_{mg(\sin\theta\,\vec{u_r} + \cos\theta\,\vec{u_\theta})} + R_r\vec{u_r} + R_\theta\vec{u_\theta}$$

$$\rightarrow \begin{cases} R_r = -ml\dot\theta^2 - mg\sin\theta = -ml\left[-\frac{2lmg}{J_{oy}}\sin\theta + \dot\theta_0^2\right] - mg\sin\theta \\ R_\theta = ml\ddot\theta - mg\cos\theta = ml\left(-\frac{lmg}{J_{oy}}\cos\theta\right) - mg\cos\theta \end{cases}$$