Exercice 1

1. Rappeler le théorème spécial des séries alternées. Que peut-on dire du reste ?
2. Étudier la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec α dans $\mathbb{R}$.
3. Comment peut-on donner une valeur à 10^{-3} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$?
4. Étudier la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.

1. Montrer que $A^n = 0$.
2. Calculer $\det(I_n + A)$.
3. Montrer que $C(A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Soit $M \in C(A) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\det(A + M)$.
5. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de cette preuve que le résultat de la question précédente reste vrai si on a seulement $M \in C(A)$.
6. Que permettent de dire les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ par rapport à l'exercice ?

Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Comparer le spectre de A et celui de M.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$.
3. Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur A quant à la diagonalisabilité de M.

Exercice 2 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

1. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{2} \ln^2 n$. On note v_n cette dernière quantité.
2. Donner un équivalent de $u_n - v_n$.

Exercice 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{tr}(A)$. Montrer que A est la matrice d'une projection.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\cos x = nx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette équation a une et une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre trois en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum \ln(\cos x_n)$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 1

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

1. Donner le rayon de convergence de f.
2. Calculer f.

Exercice 2

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, de matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = [a_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

   Soit $t \in \mathbb{R}^*$; soit $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_1}{t}, \ldots, \frac{e_n}{t^n}\right)$.
   Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sim}(N) = \left\{PMP^{-1}; P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$.
   Montrer que N est nilpotente si, et seulement si, 0 est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.