– Cahier de vacances de MPSI/MP2I à MP/MPI –

Ce formulaire à trous est à remplir pour la rentrée. Je vous enverrai la version corrigée dans la deuxième quinzaine d'août.

Pour chaque trou à remplir, vous essayez d'y répondre de mémoire, sinon vous allez chercher dans votre cours MPSI. Le fait de remplir les trous ne dispensent pas d'approfondir la notion sous-jacente.

Le jour de la rentrée, venez avec les questions que vous aurez pu rencontrer lors du remplissage de ce cahier de vacances.

I Ensembles – Applications – Dénombrement

1. Soit E un ensemble non vide :
   Compléter :
   - $\mathcal{P}(E) =$
   - $E \backslash A = \bar{A} = \complement_E^A = \{x \in E \text{ tel que } \quad \}$
   - $A \backslash B = \{x \in \quad \text{ tel que } \quad \}$
2. **Pour montrer que 2 ensembles sont égaux**, on utilise :

$$\underline{\mathbf{A = B}} \Longleftrightarrow \qquad \text{et}$$

Remarque : si A et B sont des ensembles finis, on peut aussi utiliser le cardinal :

$$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \end{cases}$$

3. La fonction indicatrice de $\mathbf{1}_A$ c'est l'application $\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}$ tel que $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} & \text{si} \\ & \text{si} \end{cases}$
4. **Pour montrer que 2 <u>applications</u> sont égales** :
   Soient 2 applications f et g ayant même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F.
   Par définition, $\underline{f = g} \Longleftrightarrow$
5. Soient E et F deux ensembles et soit une application $f : E \longrightarrow F$:
   - **Caractérisation 1 :**

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \left[\forall\left(x, x'\right) \in \mathrm{e}^2, f(x) = f\left(x'\right) \Longrightarrow \qquad \right]$$

   - **Caractérisation 2 :**

$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow [\forall y \in F, \qquad]$$

   Faire un dessin avec deux "patates" représentant E et F, d'une fonction f injective et non surjective puis un 2ème dessin d'une fonction f surjective et non injective.
   - **Définition 3 :** image directe et image indirecte
     Soit $A \subset E$, alors $f(A) = \{y \in F / \quad \text{tel que} \quad \} = \{f(x) / x \in A\}$ (image directe)
     Soit $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E / \qquad \}$ (image réciproque).

II Cardinal d'un ensemble fini :

Définition : Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier n et une
de E dans $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket (= \{1, 2, \ldots, n\})$: n est appelé le cardinal de E.
On note alors $\operatorname{Card} E = n$. Autre notation : $|E|$ ou $\# E$.

Convention : $\operatorname{Card} \emptyset =$

Propriétés :
Soient 2 ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, alors

$$[f \text{ est bijective}] \qquad [f \text{ est injective }] \qquad [f \text{ est surjective}]$$

Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.

(a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}\, E \quad \text{Card}\, F$.

Généralisation : si $A_1, A_2, \dots, A_p$ sont des parties de E, 2 à 2 disjointes, alors

$$\text{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p) = \text{Card}\, A_1 \quad \text{Card}\, A_2 \quad \cdots \quad \text{Card}\, A_p$$

(b) $\text{Card}(E \cup F) =$

(c) **Définition :** $E \times F = \{(x, y) \text{ tel que } x \in E \text{ et } y \in F\}$

$$\boxed{|E \times F| = \qquad\qquad}$$

Généralisation : si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$|E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p| =$$

6. **p-listes :**
Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.
Définition : Une p-liste de E (ou un p-uplet) est un élément de e^p

Théorème 1 :

Si $\text{Card}\, E = n$, le nombre de p-listes de E est

Conséquence : Si on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, alors

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\text{Card} \qquad)^{\text{Card}}$$

Autre notation : $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi notée F^E.

Corollaire : Si E est un ensemble fini, alors $|\mathcal{P}(E)| =$ ....

Théorème 2 :

Si Card $E = n$, et $p \leqslant n$ le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est
(On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E).
Conséquence :
Le nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments est

A savoir : pour $n \geqslant 1, A_n^p = n(n-1) \cdots (\qquad)$.

Permutations : On appelle permutation de n éléments toute bijection de l'ensemble de ces n éléments sur lui-même.
Le nombre de permutations de n éléments est .

7. **Combinaisons**

(a) **Théorème 3 :**

Si $\text{Card}\, E = n$, le nombre de parties à p éléments (distincts) de E est noté $\binom{n}{p}$.
(On appelle ce nombre coefficient binomial)
Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p}$ et si $p > n$, $\binom{n}{p} =$

(b) **Calcul (on écrira les valeurs simplifiées, c'est-à-dire sans factoriels) :**
$\binom{n}{0} = \qquad , \binom{n}{n} = \qquad , \binom{n}{1} = \qquad , \binom{n}{2} = \qquad , \binom{n}{3} = \frac{\qquad}{6}$

$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{\ }$ et **Formule de Pascal :** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \qquad .$

$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{\ }{\ }.$

$\boxed{\textbf{Formule du binôme de Newton}}$: $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \qquad\qquad = \sum_{k=0}^{n}$$

8. **Application :** Le nombre des applications strictement croissantes de $[\![1\,;\,p]\!]$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$ est .

9. **Calculs classiques :** Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, les sommes suivantes :

• $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ • $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ • $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

10. **Formule d'inversion de Pascal** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ y_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}\ x_k$$

III Trigonométrie

1.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
sin							
cos							
tan							

2. **Parité - Périodicité - Symétries :**

(a) $\cos(-x) =$ $\qquad \sin(-x) =$ $\qquad \tan(-x) =$

(b) $\cos(x+2\pi) =$ $\qquad \sin(x+2\pi) =$

(c) $\cos(x+\pi) =$ $\qquad \sin(x+\pi) =$ $\qquad \tan(x+\pi) =$

(d) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$ $\qquad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) =$

(e) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) =$

3. **Formules d'Euler :**

$$\cos\theta = \frac{\qquad}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\qquad}{2\mathrm{i}}$$

Formules d'Euler généralisées : Savoir factoriser par l'angle moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$ et retrouver les 2 formules :
$\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\mathrm{i}$......................

4. **Formules d'addition** : (Elles sont basées sur la formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$)

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \\ \sin(a+b) &= \\ \tan(a+b) &= \end{aligned}$$

5. **Formules du double-angle**

$\cos(2a) \quad =$ d'où $\cos^2 a \quad =$

$\sin(2a) \quad =$ $\sin^2 a \quad =$

6. **Formules de transformation :** (On les retrouvent à l'aide des formules d'addition)
   - $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
   - $\sin a \sin b =$
   - $\sin a \cos b =$
   - $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
   - $\cos p - \cos q =$
   - $\sin p + \sin q =$
   - $\sin p - \sin q =$
7. **Formules de paramétrisation :**
   Si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ alors on a $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\qquad \sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\qquad \tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

IV $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1. **Valeur absolue :** $|x| = \begin{cases} & \text{si } x \geqslant 0 \\ & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   $|x+y| \leqslant \qquad , \quad |x+y| \geqslant ||x|-|y|| \quad$ et $\quad |x| \leqslant \alpha \iff .... \leqslant x \leqslant .....$

   pour $\alpha \geqslant 0$
2. **Partie entière** : $n = \lfloor x \rfloor \iff \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n+1 \end{cases}$ **Conséquence** : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
3. **Somme et produit** :
   - $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
   - $\sum\limits_{i+j=n} x_i y_j = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0$
   - $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$
4. **Complexes :**
   Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$ et $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\qquad}$

   Théorème : Soient $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = \rho'\mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $\rho > 0$, $\rho' > 0$ et θ, θ' des réels.

   On a $\boxed{z = z' \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \qquad \text{tel que } \theta' = \theta + 2k\pi \end{cases}}$
5. **Application des racines n-ième de 1** :

   Factorisation de $X^n - 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$ $\qquad$ avec $\omega_k = \qquad$.

V Polynômes

1. **Division euclidienne :**

   $\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$: $\exists ! (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\boxed{\deg R \qquad\qquad\qquad}$

2. **Relation coefficients-racines :**
   - Si $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 + aX + b$ alors $\alpha + \beta =$ et $\alpha\beta =$.
   - Si $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 + aX^2 + bX + c$ alors

     $$\alpha + \beta + \gamma = \quad , \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta\gamma =$$

   - Si $\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ alors

     $$a_{n-1} = \qquad\qquad\qquad \text{et} \qquad a_0 =$$

3. **Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine α d'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$** : α est racine de P d'ordre exactement m si et seulement si

   $$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad P = (X-\alpha)^m Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

   si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = \qquad = 0$ et $P^{(m)}(\alpha)$...........

VI Algèbre linéaires : espaces vectoriels et applications linéaires

VI.1 Espaces, sous-espaces :

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev si :

(a) $(E, +)$ est un
(b) $\forall x \in E, 1 \cdot x =$
(c) $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) =$
(d) $\forall (\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x =$
(e) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad$ ..... + ... $= \lambda \cdot (x + y) =$

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. et $F \subset E$. Alors, F est un s.e.v de E si $\begin{cases} F \neq \emptyset \qquad (0_E \in F) \\ \forall (x,y) \in F^2, \text{................} \in F \\ \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \in F \end{cases}$

- **Théorème :** si F est un s.e.v de E, alors $(F, +, \cdot)$ est aussi ....

VI.2 Applications linéaires

Soient E et F deux e.v. sur $\mathbb{K}$.

$f : E \to F$ est une application linéaire (notation : $f \in \mathcal{L}(E,F)$) si :

- $\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x+y) =$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x) =$

Vocabulaire - définition

- **Endomorphisme** = application linéaire de E dans .... (notation : $f \in \mathcal{L}(E)$).
- **Isomorphisme** = application .... et ....
- **Automorphisme** = ... (notation : $f \in GL(E)$)
- **Forme linéaire** = application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- **Propriété** : si f est application linéaire alors $f(0_E) =$
- $\operatorname{Ker} f = \{x \in E / \qquad \} = f^{-1}(\{0\})$ et $\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E$ tel que $\qquad \} = f(E)$.
- Si f est une application linéaire alors : f est injective $\Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\}$.
- f est surjective $\Longleftrightarrow$

VI.3 Familles :

Soit $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in E^p$:

$$\text{Vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left\{ u \in E / \exists\, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{p} \dots\dots\dots \right\} \text{ (s.e.v. engendré par } (u_1, u_2, \dots, u_p))$$

- $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice de E ssi Vect(S) = ... ,
  c'est à dire si : $\forall u \in E$, $\exists\, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \dots\dots\dots$
- $S = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est libre ssi

$$\left(\forall\, (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p \right) \left[\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \right) \Longrightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \right]$$

- $B = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base de E si B est et .
- $B = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est une base de $E \Longleftrightarrow \forall u \in E,$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$
- Soit E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et $S = (u_1, u_2, \dots, u_p) \in e^p$
  - si S est libre alors Card S........n
  - si S est libre et Card $\mathbf{S} = n$ alors $\mathbf{S}$ est .... de E.
  - si S est génératrice de E alors Card S.............n.
  - si S est génératrice de E et Card $S = n$ alors S est .... de E.

VI.4 Somme de SEV :

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de E.

- F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{...\}$.
- F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E ssi $\forall x \in E, \exists!\, (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
  On note alors : $E = F_1 \oplus F_2$.
- **Théorème** : $E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \dots\dots\dots\dots; \\ E = F_1 + F_2 \quad (: \forall x \in E, \dots\dots\dots\dots \text{ tel que } x = x_1 + x_2) \end{cases}$
- **Image d'une application linéaire** :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est un e.v. de base } (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ et si } f \in \mathcal{L}(E, F), \text{ alors } \operatorname{Im} f = \text{Vect}(\qquad\qquad).}$$

- Soient E et F deux e.v. et f un isomorphisme de E dans F, alors

$$[E \text{ est de dimension finie}] \Longleftrightarrow [F \text{ est de dimension finie}], \text{ et dans ce cas } \dim E = \dots\dots$$

- Soient E et F deux e.v. de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$[f \text{ est injective}] \dots\dots\dots\dots [f \text{ est bijective}] \dots\dots\dots [f \text{ est surjective}]$$

- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un e.v. de dimension finie, on définit $\boxed{\text{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f}$.
- **Formule du rang** : soient E (e.v. de dimension finie) et F 2 ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\boxed{\dim \dots\dots = \dim \dots\dots f + \dim \dots\dots\dots f}$$

VII Algèbre linéaire

VII.1 Lois

- <u>+ et .</u> Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On définit $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$

- $\underline{\times}$: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$. On définit $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ par

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!] \times [\![1 \,;\, q]\!] \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Exemples :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = \qquad\qquad , \qquad XB = \qquad\qquad , \qquad BX = \qquad\qquad \text{et} \quad BA =$$

- **Formule du binôme de Newton :** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B commutent ($AB = BA$), alors pour tout N :

$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N}$$

VII.2 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E dans E. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$.

$$\text{Si } \forall j \in [\![1 \,;\, n]\!] : f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, \text{ alors } M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle de $y = f(x)$:

Soit $x \in E$ de matrice colonne X dans la base $\mathcal{B}$. Alors le vecteur $f(x)$ a pour matrice : .... dans la base $\mathcal{B}$.

VII.3 Matrices de passage

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e_1'', \ldots, e_n')$ une « nouvelle » base de E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $\operatorname{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de e_j' dans $\mathcal{B}$.

VII.4 Formules de changement de bases pour un vecteur :

Soit $x \in E$ de matrice colonne X_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et de matrice colonne X_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Soit $P = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$.
On a la relation suivante entre X_1 et X_2 $X_1 =$ .... et donc $X_2 =$ ....

VII.5 Formules de changement de bases pour un endomorphisme :

Soit f un endomorphisme de E, et soit $P = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(f) = \text{.........} M_{\mathcal{B}_1}(f) \text{............}$$

En particulier, si $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ est diagonale, on la note D et $A = M_{\mathcal{B}_1}(f)$, on a : $D = P^{-1}AP$ et donc $A = PDP^{-1}$.

VII.6 Déterminants

Revoir le cours de MPSI, les calculs des déterminants à l'aide des opérations élémentaires de Gauss.

Quelques calcul : Calculer les déterminants suivants :

1. $V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ pour $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
2. $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$ pour $a \in \mathbb{R}$
3. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

VIII Sommes à connaître absolument

1. **Sommes d'entiers**
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \sum_{k=1}^{n} k =$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2+2^2+\dots+(n-1)^2+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 =$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3+2^3+\dots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 =$
2. **Somme géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{C} \text{ et } q \neq 1 : 1+q+q^2+q^3+\dots+q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k =$$

   Remarque : Pour $q = 1 : 1+1+1^2+1^3+\dots+1^n = \sum_{k=0}^{n} 1 =$
3. **Formule de Bernoulli** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \qquad a^n - b^n = (a-b)(\quad + \dots + \quad) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \qquad\right)$$

IX SUITES

IX.1 Comparaison de suites :

$$u_n = O(v_n) \text{ ssi } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est}$$

$$u_n = o(v_n) \text{ ssi } \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} =$$

$$u_n \sim v_n \text{ ssi } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$$

$n! \sim$ ....

IX.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, u_0 \in \mathbb{C}, u_1 \in \mathbb{C}$ $((a,b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 0$ et $b \neq 0)$

On pose l'équation caractéristique (E) : $x^2 = ax + b$

- si (E) a 2 racines : r_1 et r_2 alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$
- si (E) a une racine double : r alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n =$

Remarque : Si $(a, b, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^4$ et si (E) admet 2 racines complexes non réelles (conjuguées) : $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$, alors $\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\qquad\qquad)$.

IX.3 Théorèmes

1. Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels.
   - Ou bien, la suite (u_n) n'est pas .... et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....
   - Ou bien, la suite (u_n) est .... et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....
2. La suite (u_n) converge si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ....
3. Soit (u_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors ....
4. Théorème fondamental des suites adjacentes : ....
5. **Théorème de Bolzano Weierstrass** : De toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ...., on peut extraire une sous-suite ....

X Fonctions réelles

X.1 Théorème de la limite monotone

Faire un dessin et un tableau de variation de f sur $]\,a\,;b\,[$.

- si f est croissante et majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à gauche en b.
- si f est croissante et n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) =$ ....
- si f est croissante et .... sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à droite en a.
- si f est décroissante et .... sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à gauche en b
- si f est décroissante et .... sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à droite en a

Conséquence : si f est croissante sur $]\,a\,;b\,[$, alors pour tout $c \in\,]\,a\,;b\,[$, f a une limite à droite et à gauche en c et $\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$

X.2 Accroissements finis

- **Formule des accroissements finis**
  Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors :

$$\boxed{(\exists \mathbf{c} \in]\mathbf{a},\mathbf{b}[) \text{ tel que } \mathbf{f(b)} - \mathbf{f(a)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

- **Inégalité des accroissements finis :**
  Soit f dérivable sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, |f'(\mathbf{x})| \leqslant K$, alors

$$\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

X.3 Théorème de la limite de la dérivée

soit $\alpha \in I$, et soit f une fonction continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{\alpha\}$

Si f' a une limite finie L lorsque x tend vers α, $\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f'(x) = L\right)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(\alpha) = \ldots\ldots$

X.4 Comparaison des fonctions :

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) \underset{a}{=} O(g(x)) \text{ si } \frac{f}{g} \text{ est } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{au voisinage de } a.$$

$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \text{ si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$$

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots.$$

Croissances comparées :

- **En 0** : Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a : $\lim\limits_{x\to 0} x^b(\ln|x|)^a = \qquad \Leftrightarrow |\ln x|^a = o(\qquad)$
- **En** $+\infty$: Soit $a > 0, b > 0$ et $c > 0$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln|x|)^a}{x^b} = \qquad \Leftrightarrow |\ln x|^a \underset{+\infty}{=} o(\qquad)$

  et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{\mathrm{e}^{cx}} = \qquad \Leftrightarrow x^b \underset{+\infty}{=} o(\qquad)$

XI Fonctions réciproques classiques

XI.1 Trigonométrie réciproque

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arcsin} x \\ x \in [-1\,;1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arccos} x \\ x \in [-1\,;1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arctan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \end{cases}$$

Tracer le graphe des 3 fonctions Arcsin, Arccos, Arctan :

Arcsin définie de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ / Arccos définie de $[-1\,;1]$ dans $[0\,;\pi]$ / Arctan définie de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Dérivées :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\ \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\quad} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\quad}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan}'(x) =$$

XII Trigonométrie hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$$

Relation fondamentale : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x =$

Tracer le graphe des 3 fonctions sh, ch, th :

XIII Formules de Taylor - Développement limités

XIII.1 Formule de Taylor avec reste intégral (T.R.I)

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \qquad \mathrm{d}t}$$

XIII.2 Inégalité de Taylor-Lagrange (I.T.L)

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I Soit $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \quad M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où M est un majorant de $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$. $M = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [\,a\,;b\,]\right\}$ convient.

XIII.3 Formule de Taylor-Young

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n}$ sur un intervalle I. Soit $(a,x) \in I^2$. On a alors, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) +$$

XIII.4 Développements limités usuels à connaître au voisinage de 0

Les 3 premiers termes des D.L. sont à connaitre par cœur. Au voisinage de 0, on a (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \\
\operatorname{sh} x &= \qquad + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right) \\
\operatorname{ch} x &= \qquad + \mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right)\\
\cos x &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right)\\
(1+x)^{\alpha} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{n}\right)\\
\frac{1}{1-x} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{n}\right)\\
\frac{1}{1+x} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{n}\right)\\
\ln(1+x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{n}\right)\\
\ln(1-x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{n}\right)\\
\text{Arctan } x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right)\\
\text{Arcsin } x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \qquad\qquad\qquad\qquad +\mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right)
\end{aligned}$$

Application : équivalent en 0 :

$$\sin x \underset{0}{\sim} \quad // \cos x \underset{0}{\sim} \quad // \tan x \underset{0}{\sim}$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} \quad // \operatorname{Arcsin} x \underset{0}{\sim} \quad // \ln(1+x) \underset{0}{\sim} // \operatorname{th} x \underset{0}{\sim}$$

Autres équivalents usuels :

$$\operatorname{Arccos} x \underset{0}{\sim} \quad // \ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{1}{\sim} \qquad // \operatorname{Arctan} x \underset{+\infty}{\sim} \quad // \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \quad // \operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \quad // \operatorname{th} x \underset{+\infty}{\sim}$$

<u>Remarque</u> : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim}$.

Quelques exercices :

1. Montrer qu'au voisinage de 0, $\tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$.

2(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^5} = +\infty$.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+6x}-\sqrt[3]{1+x}}{3\sin x - \ln(1+x)} = \dfrac{13}{30}$.

(c) Pour tous $a, b > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}$.

3. Démontrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x} - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$$

admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.

XIV Primitives de fonctions usuelles

XIV.1 Formules à maîtriser

Avec u fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$a \neq 0, \mathrm{e}^{ax}$	
$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{sh} x$	
$\cos x$	
$\sin x$	
$a \neq -1, x^a$	
$\dfrac{1}{x}$	
$\dfrac{u'}{u}$	

Fonction	Primitive
$\ln x$	
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	
$\dfrac{1}{a^2 + x^2} (a \neq 0)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	

Théorème : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Alors f admet des primitives sur I. De plus,

1. Pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive de f s'annulant en x_0, c'est la fonction
$$F : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
2. Toutes les primitives de f sur I sont de classe ....

XIV.2 Intégration par parties

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \int_a^b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ dt$$

XIV.3 Formule de changement de variable :

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left(\qquad\right) \qquad \mathrm{d}t$$

avec $x = \varphi(t)$ d'où $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$ donc $a = \varphi(\alpha)$ et si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$ donc $b = \varphi(\beta)$

Un petit exercice : Soit, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2}$.
2. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_{2p} pour tout entier naturel p.
3. Calculer I_1. En déduire la valeur de I_{2p+1} pour tout entier naturel p.

XIV.4 Sommes de Riemann

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathscr{C}([a\,;b])$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Quelques questions : Étudier la convergence des suites réelles u définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2\,n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{\pi^2}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

XV Produit scalaire

XV.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que φ est un produit scalaire sur E si φ vérifie :

1. φ **est symétrique** : $\forall (x,y) \in E^2 : \varphi(y,x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
2. φ **est bilinéaire** : $\begin{array}{l} \forall\left(x,x',y,\lambda\right) \in \mathrm{e}^3 \times \mathbb{R} : \varphi\left(\lambda x + x', y\right) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi\left(x',y\right) \\ \forall\left(x,y,y',\lambda\right) \in \mathrm{e}^3 \times \mathbb{R} : \varphi\left(x, \lambda y + y'\right) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi\left(x,y'\right) \end{array}$
   Remarque : La deuxième ligne se déduit de la première grâce à la symétrie.
3. φ **est définie positive** : $\forall x \in E : \varphi(x,x) \geqslant 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Norme euclidienne : Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$

Formules de polarisation et de la médiane : pour tout $(x,y) \in E^2$

$$\begin{aligned} \langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) \\ \langle x|y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ) \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour tout $(x,y) \in E^2$, $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.
Cas d'égalité : $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff$ la famille (x,y) est $\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

XV.2 Exemples fondamentaux

1. $E = \mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
   $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:
   $$\langle x|y\rangle = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
2. $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$($\mathbb{R}$-ev des applications continues sur $[\,a\,;b\,]$).
   $$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

XV.3 Orthogonalité et base orthonormale

Base orthonormale Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, pour tout $y \in E$ de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$\|x\| = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \quad \text{et } \langle x|y\rangle = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème de Pythagore : Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Orthogonal d'un sous-espace : Soit E un $\mathbb{R}-$ev muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et soit F un sev de E.

On appelle orthogonal de F le sous-espace noté $F^\perp$:

$$F^\perp = \{x \in E / \forall a \in F, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\}$$

Écriture matricielle du produit scalaire :

Soit φ un produit scalaire, noté $(x \mid y)$, sur E et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

On appelle matrice du produit scalaire φ dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } a_{i,j} = (e_i \mid e_j)$$

Remarque : Comme φ est symétrique, $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique $({}^tA = A)$.

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale et si $\mathcal{B}$ est orthonormale alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \ldots\ldots$

Ecriture matricielle :

Posons $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Soient x et y, 2 vecteurs de E et soient X et Y leur matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$. On a (en désignant par ${}^tX$ la transposée de X) :

$$(x \mid y) = {}^tXAY \qquad \text{Conséquence : Si } \mathcal{B} \text{ est orthonormale alors } (x \mid y) = \ldots\ldots\ldots$$

XV.4 Projection orthogonale et distance

Soit (E, φ) un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

Alors $E = F \oplus F^\perp$. On appelle *projecteur orthogonal(e)* de E sur le sous-espace vectoriel F le projecteur p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$.

Soit p une application de E dans E. On dit que p est *un projecteur orthogonal* de E lorsque

- p est un projecteur (c'est-à-dire lorsque $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$)
- et $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.

Expression d'un projeté

Théorème : Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de l'espace préhilbertien (E, φ) et $\mathscr{F} = (f_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ une BON de F. Alors

$$\forall x \in E \qquad p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Un petit exercice : On note F le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(\sin, \cos)$ de $\mathcal{C}([0\,;2\pi], \mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de l'identité Id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Distance

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x un point de E. L'ensemble $\{d(x, y)/\ y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (F est non vide), minorée par 0. Elle admet par conséquent une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On appelle *distance de x au sous-espace vectoriel F* et on note $d(x, F)$ cette borne inférieure.

$$\boxed{d(x, F) = \operatorname*{Inf}_{y \in F} d(x, y) \in \mathbb{R}_+}$$

1. $d(x, F)$ est un minimum.
2. Ce minimum est atteint en .... : $d(x, F) =$ ....
3. Ce minimum est atteint uniquement en ....