– Feuille d'exercices – Révisions –
– Exercices de la banque CCINP de sup –

Les questions précédées de $*$ ne peuvent être réalisées pour le moment.

I Analyse

Exercice 1 Exercice de la banque CCINP supprimé depuis

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution de l'exercice 1

1. Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / N \geqslant N_0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon \quad (1)$.
On considère $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ et on fixe un entier N vérifiant (1).
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
2. Au voisinage de $+\infty$,
$$\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{et} \quad \tan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$
Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$. On en déduit, d'après 1. ,qu'à partir d'un certain rang, u_n est négatif.

Exercice 2 Exercice 3 de la banque CCINP

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Solution de l'exercice 2

1. g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$$
2. g et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} combnk 2^{n-k} \mathrm{e}^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! \mathrm{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$$
3. Notons (P_n) la propriété : « Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et : $\forall x \in I$, $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$ »
   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.
   - La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
   - Soit $n \geqslant 0$. Supposons la propriété vraie au rang n.
     Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
     Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
     Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
     Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :
$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right)$$
     En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient :
$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$$
     C'est-à-dire
$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}) \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x)$$
     Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.
     On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.
     On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.
     Donc (P_{n+1}) est vraie.

Exercice 3 Exercice 4 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$.
   On suppose que f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ et que f est dérivable sur $]\,a\,;x_0\,[$ et sur $]\,x_0\,;b\,[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Solution de l'exercice 3

1. **Théorème des accroissements finis :**
   Soit $f : [\,a\,;b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur $]\,a\,;b\,[$. Alors il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On pose $\ell = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [\,a\,;b\,]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et x_0+h, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et x_0+h tel que $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c_h)\,h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} x_0$.
   Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{h\to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]\,-\infty\,;0\,[$ et $]\,0\,;+\infty\,[$.
   g est également dérivable en 0 car $\dfrac{1}{h}(g(h)-g(0)) = h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
   Or $\left|h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)\right| \leqslant |h|$ donc par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right) = 0$.
   Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
   Cependant, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, g'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \left(\text{car } \left|2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2|x|\right)$, mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 Exercice 5 de la banque CCINP

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas $\alpha > 0$**
   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Solution de l'exercice 4

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$

   $\forall n \geqslant 3, \ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leqslant 1$.

   On en déduit que : $\forall n \geqslant 3, u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge. Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$

   Soit $n \geqslant 3$.

   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc

$$\forall k \in [\![3\,;\, n]\!], f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$$

   Alors, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$

   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$

   f étant positive, on peut donc écrire dans $[\,0\,;+\infty\,[$ l'inégalité

$$\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$$

   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,

   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$.

   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2, u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln\left(n^2+n\right)\right)^2}$. Au voisinage de $+\infty$

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty, \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$

   De plus, au voisinage de $+\infty, \ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.

   Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

   Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 5 Exercice 6 de la banque CCINP

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{n!}{n^n}$?

Solution de l'exercice 5

1. Par hypothèse : $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}/\forall n\geqslant N,\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\ell\right|\leqslant\varepsilon.$ (1)
   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-\ell}{2}$.
   Fixons un entier N vérifiant (1).
   Alors $\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant N\Longrightarrow\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\ell\right|\leqslant\dfrac{1-\ell}{2}$.
   Et donc, $\forall n\geqslant N,\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+\ell}{2}$.
   On pose $q=\dfrac{1+\ell}{2}$. On a donc $q\in\,]\,0\,;1\,[$.
   On a alors $\forall n\geqslant N,u_{n+1}\leqslant qu_n$.
   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.
   Or pour tout $n\geqslant N$, $q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}q^n$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]\,0\,;1\,[$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant N}q^{n-N}u_n$ converge par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum u_n$ converge.
2. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.
   $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n>0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
   Or $-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.
   Donc, d'après 1, $\sum u_n$ converge.

Exercice 6 Exercice 7 de la banque CCINP

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Prouver que si $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$, alors, u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que $u_n\underset{+\infty}{\sim}v_n\Longrightarrow\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{((-1)^n+\mathrm{i})\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\ln n}{(\sqrt{n+3}-1)}$.
   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Solution de l'exercice 6

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, N \geqslant N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon \qquad (1)$.
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$
   Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique sur u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \Rightarrow v_n \neq 0$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \Rightarrow v_n > 0$.
   De plus, on a prouvé dans 1.a que :
   $\exists N \in \mathbb{N} / N \geqslant N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ $(*)$.
   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall n in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow u_n > 0$.
   D'après $(*)$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2} \quad (**)$.
   - **Premier cas :** Si $\sum v_n$ converge.
     D'après $(**)$, $\forall n \geqslant N, u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
     Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   - **Deuxième cas** : Si $\sum v_n$ diverge.
     D'après $(**)$, $\forall n \geqslant N, \dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.
     Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
     Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall n \geqslant 2, u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.
   $$|u_n| = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$
   De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$
   On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. Alors, $v_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{5/4}}\right)$ et $5/4 > 1$. On en déduit par théorème de comparaison que la série $\sum v_n$ converge.

D'après 1., $\sum_{n\geqslant 2} |u_n|$ converge. Donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument.

De plus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 7 Exercice 43 de la banque CCINP

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

Solution de l'exercice 7

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Arctan} x$.

1. (a)
   - **Premier cas :** Si $u_1 < u_0$, alors puisque la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\operatorname{Arctan}(u_1) < \operatorname{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
     Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
   - **Deuxième cas** : Si $u_1 > u_0$: Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
   - **Troisième cas** : Si $u_1 = u_0$: La suite (u_n) est constante.

   Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\operatorname{Arctan}(u_0) - u_0$.

   On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{Arctan} x - x$ et on étudie le signe de la fonction g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) < 0$.

   Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
   $\forall x \in \,]0\,;+\infty[\,, g(x) < 0$ et $\forall x \in \,]-\infty\,;0[\,, g(x) > 0$.

   On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :

   - Si $x_0 > 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
   - Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
   - Si $x_0 < 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.

   (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
   0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.

   Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0 , le seul point fixe de f.

   - **Premier cas** : Si $u_0 > 0$
     L'intervalle $]0\,;+\infty[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 , donc elle converge et ce vers 0 , unique point fixe de f.
   - **Deuxième cas** : Si $u_0 < 0$
     Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0 , donc elle converge vers 0 .
   - **Troisième cas** : Si $u_0 = 0$
     La suite (u_n) est constante.

   Conclusion : $\forall u_0 \in \mathbb{R}, (u_n)$ converge vers 0 .

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\operatorname{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\operatorname{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \ldots$.
Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}, h(x) = h(u_n)$.
De plus $\lim n \to +\infty h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante. Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

Exercice 8 Exercice 46 de la banque CCINP

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Solution de l'exercice 8

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.
Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) - \dfrac{1}{8n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.
Donc, au voisinage de $+\infty, \pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.
D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.
Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \quad (*)$.
$\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées).
De plus, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge donc par critère de domination, $\sum\limits_{n\geqslant 1} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.
Donc d'après $(*)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2 „ on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.
Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}|v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.

Exercice 9 Exercice 55 de la banque CCINP

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Solution de l'exercice 9

1. (a) Montrons que E est un sous-espace-vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).
   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
   Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + \lambda v_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.
   Or, $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda\left(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n\right)$
   c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a\left(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}\right) + 4(ia - 1)\left(u_n + \lambda v_n\right)$
   ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.
   Donc $w \in E$.
   Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

   (b) On considère l'application φ définie par : $\varphi\colon \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$.
   Par construction, φ est linéaire et bijective.
   Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.
2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   On introduit l'équation caractéristique (E) : $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.
   On a deux possibilités :

   - si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.
   - si (E) a une unique racine double r, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)r^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

   Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.

   - **Premier cas** : $a = -2i$
     $r = a = -2i$ est racine double de (E).
     Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.
     Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.
     On en déduit que $\alpha = \dfrac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.
   - **Deuxième cas** : $a \neq -2i$
     On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.
     Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha(2(a + i))^n + \beta(-2i)^n$.
     Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.

   On en déduit, après résolution, que $\alpha = \dfrac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \dfrac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.

II Algèbre

II.1 Algèbre linéaire

Exercice 10 Exercice 59 de la banque CCINP

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C})$ de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. (*) f est-il diagonalisable ?

Solution de l'exercice 10

1. f est clairement linéaire. (*)
   De plus, $\forall P \in E \backslash \{0\}, \deg P' < \deg P \operatorname{donc} \deg (P - P') = \deg P$.
   Et, si $P = 0$, alors $P - P' = 0$ donc $\deg (P - P') = \deg P = -\infty$.
   On en déduit que $\forall P \in E, \deg f(P) = \deg P$.
   Donc $f(E) \subset E$. $(**)$.
   D'après $(*)$ et $(**)$, f est bien un endomorphisme de E.
   (a) Déterminons $\operatorname{Ker} f$.
   Soit $P \in \operatorname{Ker} f$.
   $f(P) = 0$ donc $P - P' = 0$ donc $\deg (P - P') = -\infty$.
   Or, d'après ce qui précéde, $\deg (P - P') = \deg P \operatorname{donc} \deg P = -\infty$.
   Donc $P = 0$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
   Donc f est injectif.
   Or, $f \in \mathcal{L}(E)$ et E est de dimension finie ($\dim E = n + 1$) donc f est bijectif.
   (b) Soit $e = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E. Soit A la matrice de f dans la base e.
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & -n \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$
   $\det A = 1$ d'où $\det A \neq 0$.
   Donc f est bijectif.
2. Soit $Q \in E$.
   D'après 1. : $\exists ! P \in E$, tel que $f(P) = Q$.
   $P - P' = Q, P' - P'' = Q', \dots, P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$.
   Or $P^{(n+1)} = 0$, donc, en sommant ces $n + 1$ égalités, $P = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$.
3. Reprenons les notations de 1.(b).
   Tout revient à se demander si A est diagonalisable.
   Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.

D'après 1.(b), on a $\chi_A = (X-1)^{n+1}$.
Donc 1 est l'unique valeur propre de A.
Ainsi, si A était diagonalisable, alors A serait semblable à la matrice unité I_{n+1}.
On aurait donc $A = \mathrm{I}_{n+1}$.
Ce qui est manifestement faux car $f \neq \mathrm{Id}$.
Donc A n'est pas diagonalisable et par conséquent, f n'est pas diagonalisable.

Exercice 11 Exercice 60 de la banque CCINP

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

Solution de l'exercice 11

1. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$
   Alors $M \in \operatorname{Ker} f \iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a &= -2c \\ b &= -2d \end{cases}$.
   C'est-à-dire, $M \in \operatorname{Ker} f \iff \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $(*)$.
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\operatorname{Ker} f$.
   De plus, les matrices M_1 et M_2 ne sont pas colinéaires ; donc la famille (M_1, M_2) est libre et c'est une base de $\operatorname{Ker} f$.
2. $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
   Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que f est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\operatorname{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$.
   Comme $\operatorname{rg} f = 2, (M_3, M_4)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. (1)
   Prouvons que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
   Soit $M \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a = c \\ -2b = 2d \\ a = 2c \\ b = 4d \end{cases}$.

On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
Donc $M = 0$.
Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im} f = \{0\}$
Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im} f$.

Exercice 12 Exercice 62 de la banque CCINP

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\,\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \text{Ker}\,(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$:
   (a) (*) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.

Solution de l'exercice 12

1. f est linéaire donc :
   $$f^2 - f - 2\text{Id} = 0 \iff f \circ (f - \text{Id}) = (f - \text{Id}) \circ f = 2\text{Id} \iff f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}\right) = \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}\right) \circ f = \text{Id}$$
   On en déduit que f est inversible, donc bijectif, et que $f^{-1} = \dfrac{1}{2}f - \dfrac{1}{2}\text{Id}$.
2. (a) On pose $P = X^2 - X - 2$. On a $P = (X + 1)(X - 2)$.
   $P_1 = X + 1$ et $P_2 = X - 2$ sont premiers entre eux.
   Donc, d'après le lemme des noyaux, $\text{Ker } P(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f)$.
   Or P est annulateur de f, donc $\text{Ker } P(f) = E$.
   Donc $E = \text{Ker}\,(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.

   (b)
   - Analyse (unicité) :
     Soit $x \in E$. Supposons que $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}\,(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.
     Alors par linéarité de f, $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$.
     On en déduit que $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.
   - Synthèse (existence) :
     Soit $x \in E$. On pose $a = \dfrac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \dfrac{x + f(x)}{3}$.
     On a bien $x = a + b$. $(*)$
     $(f + \text{Id})(a) = \dfrac{1}{3}\left(2f(x) - f^2(x) + 2x - f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(-f^2(x) + f(x) + 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.
     Donc $a \in \text{Ker}\,(f + \text{Id})$. $(**)$
     $(f - 2\text{Id})(b) = \dfrac{1}{3}\left(f(x) + f^2(x) - 2x - 2f(x)\right) = \dfrac{1}{3}\left(f^2(x) - f(x) - 2x\right) = 0$ car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.
     Donc $b \in \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$. $(***)$
     D'après $(*), (**)$ et $(***), x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}\,(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.
   - Conclusion : $E = \text{Ker}\,(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.
3. Prouvons que $\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}\,(f - 2\,\text{Id})$.
   Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$. $\exists x \in E / y = f(x) + x$.
   Alors $(f - 2\,\text{Id})(y) = f(y) - 2y = f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$ car $f^2 - f - 2\,\text{Id} = 0$.
   Donc $y \in \text{Ker}\,(f - 2\text{Id})$.

Donc $\mathrm{Im}(f+\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}\,(f-2\mathrm{Id})$. $(*)$.
Posons $\dim E = n$.
D'après 2., $n = \dim \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}\,(f-2\,\mathrm{Id})$.
De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim \mathrm{Ker}\,(f+\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Im}(f+\mathrm{Id})$.
On en déduit que $\dim \mathrm{Im}(f+\mathrm{Id}) = \dim \mathrm{Ker}\,(f-2\,\mathrm{Id})$. $\quad (**)$
Donc, d'après $(*)$ et $(**)$, $\mathrm{Im}(f+\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f-2\,\mathrm{Id})$.

Exercice 13 Exercice 64 de la banque CCINP

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\ f \Longrightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\ f$.

Solution de l'exercice 13

1. Supposons $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\ f$.
   Indépendamment de l'hypothèse, on a toujours que $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$ $(*)$.
   Montrons que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$. Alors, $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Or $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\ f$, donc $\exists (a,b) \in E \times \mathrm{Ker}\ f$ tel que $x = f(a) + b$.
   On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im}\, f^2$.
   Ainsi $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Im}\, f^2 \quad (**)$
   D'après $(*)$ et $(**), \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
2. (a) On a toujours $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\ f \subset \mathrm{Ker}\ f^2$.
   On en déduit que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f \Longleftrightarrow \mathrm{rg}\, f^2 = \mathrm{rg}\, f$ et $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2 \Longleftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\ f = \dim \mathrm{Ker}\ f^2$.
   Alors, en utilisant le théorème du rang,
   $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}\ f = \dim \mathrm{Ker}\ f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Ker}\ f^2$.
   (b) Supposons $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
   Soit $x \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\ f$.
   $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
   On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker}\ f^2$.
   Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker}\ f^2 = \mathrm{Ker}\ f$ donc $a \in \mathrm{Ker}\ f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
   C'est-à-dire $x = 0$.
   Ainsi $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\ f = \{0_E\}$. $\quad (***)$
   De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\ f = \dim E$. $\qquad (****)$
   Donc, d'après $(***)$ et $(****)$, $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\ f$.

Exercice 14 Exercice 71 de la banque CCINP

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Solution de l'exercice 14

1. $D = \operatorname{Vect}((1,2,3))$.
   $(1,2,3) \notin P$ car les coordonnées du vecteur $(1,2,3)$ ne vérifient pas l'équation de P.
   Donc $D \cap P = \{0\}$ $(*)$.
   De plus, $\dim D + \dim P = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$. $\quad (**)$
   D'après $(*)$ et $(**)$, $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   Par définition d'une projection, $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$
   $u - p(u) \in D$ signifie que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \alpha(1,2,3)$.
   On en déduit que $p(u) = (x-\alpha, y-2\alpha, z-3\alpha)$. $(***)$
   Or $p(u) \in P$ donc $(x-\alpha) + (y-2\alpha) + (z-3\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{1}{6}(x+y+z)$.
   Et donc, d'après $(***)$, $p(u) = \dfrac{1}{6}(5x-y-z, -2x+4y-2z, -3x-3y+3z)$.
   Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   Soit A la matrice de p dans la base e. On a $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On pose $e_1' = (1,2,3), e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (0,1,-1)$.
   e_1' est une base de D et (e_2', e_3') est une base de P.
   Or $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ donc $e' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   De plus $e_1' \in D$ donc $p(e_1') = 0$. $e_2' \in P$ et $e_3' \in P$ donc $p(e_2') = e_2'$ et $p(e_3') = e_3'$.
   Ainsi, $\operatorname{Mat}_{e'}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et c'est une matrice diagonale.

Exercice 15 Exercice 90 de la banque CCINP

$\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que $\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. Application : on se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1)$, $B(1,3)$, $C(2,1)$.
   Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

Solution de l'exercice 15

1. Par linéarité de l'évaluation $P \mapsto P(a)$ (où a est un scalaire fixé), Φ est linéaire.
   Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$.
   Alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$, donc P admet trois racines distinctes.
   Or P est de degré inférieur ou égal à 2 ; donc P est nul.
   Ainsi, $\operatorname{Ker}(\Phi) = \{0\}$ i.e. Φ est injective.
   Enfin, $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = \dim\left(\mathbb{K}^3\right) = 3$ donc Φ est bijective.
   Par conséquent, Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathbb{K}_2[X]$ dans $\mathbb{K}^3$.

2. (a) Φ est un isomorphisme donc l'image réciproque d'une base est une base.
   Ainsi, (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

   (b) $L_1 \in \mathbb{R}_2[X]$ et vérifie $\Phi(L_1) = (1,0,0)$ i.e. $(L_1(a_1), L_1(a_2), L_1(a_3)) = (1,0,0)$.
   Donc, comme a_2 et a_3 sont distincts, $(X-a_2)(X-a_3) \mid L_1$.
   Or $\deg L_1 \leqslant 2$, donc $\exists k \in \mathbb{K}$ tel que $L_1 = k(X-a_2)(X-a_3)$.
   La valeur $L_1(a_1) = 1$ donne $k = \dfrac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
   Donc $L_1 = \dfrac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}$.
   Un raisonnement analogue donne $L_2 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$ et $L_3 = \dfrac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$.

3. (L_1, L_2, L_3) base de $\mathbb{K}_2[X]$ donc $\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $P = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3$.
   Par construction, $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}$ donc $P(a_j) = \lambda_j$.
   Ainsi, $P = P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$.

4. On pose $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$. Ces trois réels sont bien distincts.
   On cherche $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $(P(a_1), P(a_2), P(a_3)) = (1,3,1)$.
   Par bijectivité de Φ et d'après 3., l'unique solution est le polynôme $P = 1.L_1 + 3.L_2 + 1.L_3$.
   On a $L_1 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}, L_2 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $L_3 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
   Donc $P = -2X^2 + 4X + 1$.

II.2 Algèbre bilinéaire

Exercice 16 Exercice 63 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E,\ \langle u(x)|x\rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = \langle u^*(x)|u^*(y)\rangle$.
   iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Solution de l'exercice 16

1. On se place sur $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.
   On considère u la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On a bien $\forall x \in E, (u(x) \mid x) = 0$ mais u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. - Prouvons que i. $\Longleftrightarrow$ ii. Procédons par double implication.
     - Supposons que $u \circ u^* = u^* \circ u$. Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$.
       Soit $(x,y) \in E^2$.
       Par définition de l'adjoint, $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid u^* \circ u(y))$.
       Or, par hypothèse, $u \circ u^* = u^* \circ u$.
       Donc $(u(x), u(y)) = (x \mid u \circ u^*(y))$.
       Or, par définition de l'adjoint, $(x \mid u \circ u^*(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$.
       Donc $(u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$.

- Supposons que $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$. Prouvons que $u \circ u^* = u^* \circ u$.
  Soit $x \in E$.
  Prouvons que $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
  Soit $y \in E$.
  Par bilinéarité du produit scalaire, $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \mid y) = (u \circ u^*(x) \mid y) - (u^* \circ u(x) \mid y)$.
  Or, par définition de l'adjoint, $(u \circ u^*(x) \mid y) = (u^*(x) \mid u^*(y))$ et $(u^* \circ u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(y))$.
  Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \mid y) = (u^*(x) \mid u^*(y)) - (u(x) \mid u(y))$
  Or, par hypothèse, $(u^*(x) \mid u^*(y)) = (u(x) \mid u(y))$.
  Donc $(u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \mid y) = (u(x) \mid u(y)) - (u(x) \mid u(y)) = 0$.
  Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) \in E^\perp$.
  Or $E^\perp = \{0\}$
  Donc $u \circ u^*(x) - u^* \circ u(x) = 0$.

- Prouvons que ii. $\Longleftrightarrow$ iii. Procédons par double implication.

  - On suppose que $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$.
    Donc, en prenant $y = x$, on obtient : $\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = \|u^*(x)\|^2$.
    Or, $\forall x \in E, \|u(x) |\geqslant 0$ et $\|u^*(x)\| \geqslant 0$.
    Donc $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
  - On suppose que $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2, (u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$.
    Soit $(x,y) \in E^2$.
    D'après une identité de polarisation, $(u(x) \mid u(y)) = \dfrac{1}{2}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right)$. Or, u est linéaire donc $\|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2$.
    De plus par hypothèse, $\|u(x+y)\| = \|u^*(x+y)\|, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ et $\|u(y)\| = \|u^*(y)\|$.
    Donc $(u(x) \mid u(y)) = \dfrac{1}{2}\left(\|u^*(x+y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2\right)$.
    Or u^* est linéaire donc $\|u^*(x+y)\| = \|u^*(x) + u^*(y)\|$.
    Donc$(u(x) \mid u(y)) = \dfrac{1}{2}\left(\|u^*(x)+u^*(y))\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2\right)$.
    Or, d'après une identité de polarisation,
    $$(u^*(x) \mid u^*(y)) = \frac{1}{2}\left(\|u^*(x)+u^*(y)\|^2 - \|u^*(x)\|^2 - \|u^*(y)\|^2\right)$$
    Donc $(u(x) \mid u(y)) = (u^*(x) \mid u^*(y))$

Exercice 17 Exercice 76 de la banque CCINP

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
On pose $\forall x \in E$, $\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}), \forall x \in [\,a\,;b\,]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Solution de l'exercice 17

1. (a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.
On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.
Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2, |(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$
Preuve : Soit $(x,y) \in E^2$. Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) = \|x + \lambda y\|^2$.
On remarque que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geqslant 0$.
De plus, $P(\lambda) = (x + \lambda y \mid x + \lambda y)$.
Donc, par bilinéarité et symétrie de $(|), P(\lambda) = \|y\|^2\lambda^2 + 2\lambda(x \mid y) + \|x\|^2$.
On remarque que $P(\lambda)$ est un trinôme en λ si et seulement si $\|y\|^2 \neq 0$.

   - **Premier cas** : si $y = 0$
   Alors $|(x \mid y)| = 0$ et $\|x\|\|y\| = 0$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée.
   - **Deuxième cas** : $y \neq 0$
   Alors $\|y\| = \sqrt{(y \mid y)} \neq 0$ car $y \neq 0$ et $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
   Donc, P est un trinôme du second degré en λ qui est positif ou nul.
   On en déduit que le discriminant réduit Δ est négatif ou nul.
   Or $\Delta = (x \mid y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2$ donc $(x \mid y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$.
   Et donc, $|(x \mid y)| \leqslant \|x\|\|y\|$.

   (b) On reprend les notations précédentes.
Prouvons que $\forall (x,y) \in E^2, |(x \mid y)| = \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow x$ et y sont colinéaires.

   - Supposons que $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$.
     - **Premier cas** : si $y = 0$, alors x et y sont colinéaires.
     - **Deuxième cas** : si $y \neq 0$, alors le discriminant de P est nul et donc P admet une racine double λ_0.
     C'est-à-dire $P(\lambda_0) = 0$ et comme $(|)$ est définie positive, alors $x + \lambda_0 y = 0$.
     Donc x et y sont colinéaires.
   - Supposons que x et y soient colinéaires.
   Alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha y$ ou $y = \alpha x$.
   Supposons par exemple que $x = \alpha y$ (raisonnement similaire pour l'autre cas).
   $|(x \mid y)| = |\alpha| \cdot |(y \mid y)| = |\alpha|\|y\|^2$ et $\|x\|\|y\| = \sqrt{(x \mid x)}\|y\| = \sqrt{\alpha^2(y \mid y)}\|y\| = |\alpha| \cdot \|y\|^2$.
   Donc, on a bien l'égalité.

2. On considère le produit scalaire classique sur $\mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R})$ défini par :

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}([a\,;b], \mathbb{R}), (f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

On pose $A = \left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t, f \in E \right\}$.
$A \subset \mathbb{R}$
$A \neq \emptyset$ car $(b-a)^2 \in A$ (valeur obtenue pour la fonction $t \longmapsto 1$ de E).
De plus, $\forall f \in E, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc A est minorée par 0 .
On en déduit que A admet une borne inférieure et on pose $m = \inf A$.
Soit $f \in E$.
On considère la quantité $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2$.
D'une part, $\left(\int_a^b \sqrt{f(t)} \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \mathrm{d}t \right)^2 = \left(\int_a^b 1 \ \mathrm{d}t \right)^2 = (b-a)^2$.

D'autre part, si on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(\ |\ )$ on obtient :

$$\left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

On en déduit que $\forall f \in E, \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t \geqslant (b-a)^2$.
Donc $m \geqslant (b-a)^2$.
Et, si on considère la fonction $f : t \longmapsto 1$ de E, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t = (b-a)^2$.
Donc $m = (b-a)^2$.

Exercice 18 Exercice 77 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Solution de l'exercice 18

1. On a $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$. $(*)$
   En effet, $\forall x \in A, \forall y \in A^{\perp}, (x \mid y) = 0$.
   C'est-à-dire, $\forall x \in A, x \in \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.
   Comme E est un espace euclidien, $E = A \oplus A^{\perp}$ donc $\dim A = n - \dim A^{\perp}$.
   De même, $E = A^{\perp} \oplus \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim A^{\perp}$.
   Donc $\dim \left(A^{\perp}\right)^{\perp} = \dim A \quad (**)$.
   D'après $(*)$ et $(**)$, $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. (a) Procédons par double inclusion.
   - Prouvons que $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.
     Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Soit $y \in F+G$. Alors $\exists (f,g) \in F \times G$ tel que $y = f+g$.

     $$(x \mid y) = \underbrace{(x \mid f)}_{\substack{=0 \\ \text{car} f\in F \text{ et} \\ x \in F^{\perp}}} + \underbrace{(x \mid g)}_{\substack{=0 \\ \text{car} g\in G \text{ et} \\ x \in G^{\perp}}} = 0$$

     Donc $\forall y \in (F+G), (x \mid y) = 0$.
     Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.
   - Prouvons que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
     Soit $x \in (F+G)^{\perp}$.
     $\forall y \in F$, on a $(x \mid y) = 0$ car $y \in F \subset F+G$. Donc $x \in F^{\perp}$.
     De même, $\forall z \in G$, on a $(x \mid z) = 0$ car $z \in G \subset F+G$. Donc $x \in G^{\perp}$.
     On en déduit que $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   Finalement, par double inclusion, $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

(b) D'après 2.(a), appliquée à $F^\perp$ et à $G^\perp$, on a $\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp$.
Donc, d'après 1., $\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = F \cap G$.
Donc $\left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = (F \cap G)^\perp$.
C'est-à-dire, en utilisant 1. à nouveau, $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 19 Exercice 78 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

On note $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2$ $\langle u(x)|u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$.
   (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Solution de l'exercice 19

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall (x,y) \in E^2, \|u(x)\| = \|x\|$.
   (a) Soit $(x,y) \in E^2$.
   On a, d'une part, $\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$. $(*)$
   D'autre part,
   $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2(u(x) \mid u(y)) + \|y\|^2 \quad (**)$.
   On en déduit, d'après $(*)$ et $(**)$, que $(u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$.
   (b) Soit $x \in \operatorname{Ker} u$.
   Par hypothèse, $0 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$. Donc $x = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ et u est injectif.
   Puisque E est de dimension finie, on peut conclure que l'endomorphisme u est bijectif.
2. Montrons que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
   - On a $\mathcal{O}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ en vertu de ce qui précède.
   - On a aussi, évidemment, $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$. Donc $\mathcal{O}(E) \neq \emptyset$.
   - Soit $(u,v) \in (\mathcal{O}(E))^2$.
     $\forall x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \left\|u\left(v^{-1}(x)\right)\right\| = \left\|v^{-1}(x)\right\|$ car $u \in \mathcal{O}(E)$.
     Et $\left\|v^{-1}(x)\right\| = \left\|v\left(v^{-1}(x)\right)\right\| = \|x\|$ car $v \in \mathcal{O}(E)$.
     Donc $\forall x \in E, \left\|u \circ v^{-1}(x)\right\| = \|x\|$.
     On en déduit, d'après 1. (a), que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

   Donc $\mathcal{O}(E)$ des endomorphismes orthogonaux est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
   - Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$.
     Soit $(i,j) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2$.
     $u \in \mathcal{O}(E)$ donc $(u(e_i) \mid u(e_j)) = (e_i \mid e_j)$.
     Or e est une base orthonormée de E donc $(e_i \mid e_j) = \delta_i^j$ où δ_i^j désigne le symbole de Kronecker.
     On en déduit que $\forall (i,j) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2, (u(e_i) \mid u(e_j)) = \delta_i^j$.
     C'est-à-dire $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormée de E.
     Donc, c'est une famille libre à n éléments de E avec $\dim E = n$.
     Donc $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

- Réciproquement, supposons que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.
  Soit $x \in E$.
  Comme e est une base orthonormée de E, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Alors,
  $$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (e_i \mid e_j)$$
  Or e est une base orthonormée de E donc $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (*)$
  De même, par linéarité de u,
  $$\|u(x)\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \mid \sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (u(e_i) \mid u(e_j))$$
  Or $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E, donc $\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad (**)$.
  D'après $(*)$ et $(**)$, $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
  Donc, d'après 1.(a), $u \in \mathcal{O}(E)$.

Exercice 20 Exercice 79 de la banque CCINP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de l'exercice 20

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
   On pose $\forall x \in [a\,;b]$, $F(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
   La fonction h est continue sur $[a\,;b]$ donc F est dérivable sur $[a\,;b]$.
   De plus, $\forall x \in [a\,;b]$, $F'(x) = h(x)$.
   Or h est positive sur $[a\,;b]$ donc F est croissante sur $[a\,;b]$. $(*)$
   Or $F(a) = 0$ et, par hypothèse, $F(b) = 0$. C'est-à-dire $F(a) = F(b)$. (**)
   D'après $(*)$ et $(**)$, F est constante sur $[a\,;b]$.
   Donc $\forall x \in [a\,;b], F'(x) = 0$. C'est-à-dire, $\forall x \in [a\,;b], h(x) = 0$.
2. On pose $\forall (f,g) \in E^2, (f \mid g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Par linéarité de l'intégrale, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}, (|)$ est symétrique.

On en déduit que $(|)$ est une forme bilinéaire symétrique. $(*)$
Soit $f \in E$. $(f \mid f) = \displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$
Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive sur $[\,a\,;b\,]$ et $a < b$ donc $(f \mid f) \geqslant 0$.
Donc $(|)$ est positive. $(**)$
Soit $f \in E$ telle que $(f \mid f) = 0$.
Alors $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$
Or $x \longmapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[\,a\,;b\,]$.
Donc, d'après 1., f est nulle sur $[\,a\,;b\,]$. On en déduit que $(|)$ est définie. $(***)$
D'après $(*)$, $(**)$ et $(***)$, $(|)$ est un produit scalaire sur E.

3. On a $|(f|g)| \leqslant \|f\|\|g\|$ si f et g sont continues sur $[\,a\,;b\,]$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée au produit scalaire défini en 2.
Avec $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, la fonction fg est positive sur $[\,0\,;1\,]$ et on a donc

$$\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 x\mathrm{d}x}\sqrt{\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x}$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}$.
On a donc $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2}}}{2}$.

Exercice 21 Exercice 80 de la banque CCINP

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Solution de l'exercice 21

1. On pose $\forall (f,g) \in E^2, (f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$
Par linéarité de l'intégrale, $(\ |\ )$ est linéaire par rapport à sa première variable.
Par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\ |\ )$ est symétrique.
On en déduit que $(\ |\ )$ est une forme bilinéaire symétrique. $(*)$
Soit $f \in E$. $(f \mid f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t$.
Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive sur $[0, 2\pi]$ et $0 < 2\pi$, donc $(f \mid f) \geqslant 0$.
Donc $(\ |\ )$ est positive. $(**)$
Soit $f \in E$ telle que $(f \mid f) = 0$. Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}t = 0$
Or $t \longmapsto f^2(t)$ est positive et continue sur $[0, 2\pi]$.
Donc, f est nulle sur $[0, 2\pi]$.
Or f est 2π-périodique donc $f = 0$.
Donc $(\ |\ )$ est définie. $(***)$
D'après $(*)$, $(**)$ et $(***)$, $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E.

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.
   Or la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x) \in F$. De plus, si on note h l'application $x \mapsto \frac{1}{2}$,
   $(h \mid f) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = 0$ et $(h \mid g) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2x)\mathrm{d}x = 0$ donc $h \in F^{\perp}$ (car $F = \mathrm{Vect}(f,g)$).
   On en déduit que le projeté orthogonal de u sur F est $x \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

Exercice 22 Exercice 81 de la banque CCINP

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Solution de l'exercice 22

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, K\right)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{I}_2, K\right)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^{\perp} \iff \varphi\left(M, \mathrm{I}_2\right) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0 \iff a + d = 0$ et $b - c = 0 \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^{\perp}$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. On peut écrire $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^{\perp}$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^{\perp}$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\|$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \mathrm{I}_2 + B$ avec $\mathrm{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^{\perp}$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \mathrm{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p_{\mathcal{F}}(J)\| = \|J - \mathrm{I}_2\| = \|B\| = \sqrt{2}$.

Exercice 23 Exercice 82 de la banque CCINP

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Solution de l'exercice 23

1. On pose $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E, A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E, B = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $(A + A' \mid B) = \left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = (a+a')\,a'' + (b+b')\,b'' + (c+c')\,c'' + (d+d')\,d''$.
   Donc $(A + A' \mid B) = (aa'' + bb'' + cc'' + dd'') + (a'a'' + b'b'' + c'c'' + d'd'') = (A \mid B) + (A' \mid B)$.
   $(\alpha A \mid B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) = \alpha aa'' + \alpha bb'' + \alpha cc'' + \alpha dd'' = \alpha(A \mid B)$.
   On en déduit que $(. \mid .)$ est linéaire par rapport à sa première variable.
   De plus, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.
   Donc $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire et symétrique. $(*)$.
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$
   $(A \mid A) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$. Donc $(\cdot|\cdot)$ est positive. $(**)$
   Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ telle que $(A \mid A) = 0$
   Alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$.
   Comme il s'agit d'une somme de termes tous positifs, on en déduit que $a = b = c = d = 0$ donc $A = 0$.
   Donc $(\cdot|\cdot)$ est définie. $(***)$
   D'après $(*)$, $(**)$, $(***)$, $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
   On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in F$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in F^{\perp}$, car $\forall (a,b,d) \in \mathbb{R}^3, \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) = 0$.
   On en déduit que le projeté orthogonal, noté $p_F(A)$, de A sur F est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $d(A, F) = \|A - p_F(A)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = 1$

II.3 Complexes et polynômes

Exercice 24 Exercice 84 de la banque CCINP

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Solution de l'exercice 24

1. Soit z un complexe non nul. Posons $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
Un argument de z est un réel θ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
2. $z = 0$ n'est pas solution de l'équation $z^n = 1$.
Les complexes solutions s'écriront donc sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $z^n = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ \text{et} \\ n\theta = 0 \bmod 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \text{et} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
Les réels $\dfrac{2k\pi}{n}$, pour $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, sont deux à deux distincts et $\forall k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, $\dfrac{2k\pi}{n} \in [\,0\,;2\pi\,[$.
De plus, si $\ell \in \mathbb{Z}$, alors en faisant la division euclidienne de ℓ par n, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, tel que $\ell = nq + k$. Alors, $\dfrac{2\ell\pi}{n} = 2q\pi + \dfrac{2k\pi}{n}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\ell\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.
On en déduit que les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont exactement les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ et qu'il y en a n.
Remarque : on peut aussi utiliser l'argument suivant. Kes solutions de l'équation $z^n = 1$ étant également racines du polynôme $X^n - 1$, il ne peut y en avoir d'autres et il y en a au plus n. C'est donc l'ensemble déterminé.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = 1$ est $S = \left\{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in [\![0\,;\, n-1]\!]\right\}$.
3. $z = i$ n'étant pas solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$,

$$\begin{aligned}(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n &\iff \left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!] t \text{ tel que } \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0\,;\, n-1]\!] \text{ tel que } z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

En remarquant que $z\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right) = -\mathrm{i}\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}}\right)$ n'admet pas de solution pour $k = 0$, on en déduit que :

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \exists k \in [\![1\,;\, n-1]\!] \text{ tel que } z = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - 1}$$

En utilisant la méthode de l'angle moitié, on a $\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} + 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \dfrac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}$ et on voit que les solutions sont des réels.

$$(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n \iff \exists k \in [\![1\,;\, n-1]\!] \text{ tel que } z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

La fonction cotan est bijective de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}$. L'équation admet donc $n-1$ solutions réelles.
On pouvait aussi voir que si z est solution de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ alors $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$ et donc le point d'affixe z appartient à la médiatrice de $[A,B]$, A et B étant les points d'affixes respectives i et $-$i, c'est-à-dire à la droite des réels.

Exercice 25 Exercice 85 de la banque CCINP

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0\,;\, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution de l'exercice 25

1. (a) $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.
   (b) a est une racine d'ordre r de $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-r}[X]$ tel que $Q(a) \neq 0$ et $P = (X-a)^r Q$

$$\iff \exists\,(q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = (X-a)^r \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^i$$

$$\iff \exists\,(q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \text{ et } P = \sum_{i=0}^{n-r} q_i (X-a)^{r+i}$$

$$\iff \exists\,(q_0, \ldots, q_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r+1} \text{ tel que } q_0 \neq 0 \quad \text{ et } P = \sum_{k=r}^{n} q_{k-r} (X-a)^k$$

   D'après la formule de Taylor (rappelée ci-dessus) et l'unicité de la décomposition de P dans la base $(1, (X-a), \ldots, (X-a)^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ il vient enfin :

$$a \text{ est une racine d'ordre } r \text{ de } P \iff \forall k \in \{0, \ldots, r-1\} \quad P^{(k)}(a) = 0 \text{ et } P^{(r)}(a) \neq 0$$

2. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
1 \text{ est racine double de } P = X^5 + aX^2 + bX &\iff P(1) = P'(1) = 0 \text{ et } P''(1) \neq 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{array} \right. \\
&\iff a = -4 \text{ et } b = 3
\end{aligned}$$

   On obtient $X^5 - 4X^2 + 3X = X(X-1)^2\left(X^2 + 2X + 3\right)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $X^2 + 2X + 3$ est strictement négatif.

Exercice 26 Exercice 87 de la banque CCINP

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0\,;\, n]\!], P\left(a_i\right) = b_i$$

2. Soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.
   Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], \quad b_i = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & i \neq k \\ 1 & \text{si} & i = k \end{array} \right.$$

3. Prouver que $\forall p \in [\![0\,;\,n]\!], \sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Solution de l'exercice ??

1. L'application $u : \begin{array}{ll} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
   Montrons que $\mathrm{Ker}\ u = \{0\}$.
   Si $P \in \mathrm{Ker}\ u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet $n+1$ racines distinctes.
   Donc $P = 0$.
   Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.
   La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.
2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme L_k vérifie les conditions :
   $$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0\,;\,n]\!], L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
   Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
   $$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$
   La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :
   $$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$
3. Soit $p \in [\![0\,;\,n]\!]$.
   Les polynômes $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :
   $$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$
   Par l'unicité vue en première question, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 27 Exercice 89 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left| z^k - 1 \right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Solution de l'exercice 27

1. On pose $Z = z^k - 1$.
$Z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}2\mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
c'est-à-dire $Z = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{2}\right)}$
Pour $k \in [\![1 ; n-1]\!]$, on a $0 < \frac{k\pi}{n} < \pi$, donc $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.
Donc le module de Z est $2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et un argument de Z est $\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2}$.
2. On remarque que pour $k = 0$, $\left|z^k - 1\right| = 0$ et $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$.
Donc d'après la question précédente, on a $S = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
S est donc la partie imaginaire de $T = 2\sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}}\frac{k\pi}{n}$.
Or, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} \neq 1$, on a $T = 2\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}} = \frac{4}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}$.
Or $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\right) = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.
On en déduit que $T = \frac{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}}{-2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)$.
En isolant la partie imaginaire de T, et comme $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \neq 0$ $(n \geqslant 2)$, on en déduit que $S = \frac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 28 Exercice 92 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2, \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
Déterminer $F^\perp$.

Solution de l'exercice 28

1. $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire par rapport à sa première variable par linéarité de la trace, de la transposition et par distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans E.
De plus, une matrice et sa transposée ayant la même trace, on a :
$\forall (A,B) \in E^2, \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^T B\right)^T\right) = \operatorname{tr}\left(B^T A\right) = \langle B, A\rangle$.
Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.
On en déduit que $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire et symétrique. (1)

Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.

$$\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(A^T A\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(A^T\right)_{i,k} A_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2$$

Donc $\langle A, A\rangle \geqslant 0$ et $\langle\ ,\ \rangle$ est positive. (2)
Soit $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$ telle que $\langle A, A\rangle = 0$.
Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}^2 = 0$. Or, $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \forall k \in [\![1\,;\, n]\!], A_{k,i}^2 \geqslant 0$.
Donc $\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \forall k \in [\![1\,;\, n]\!], A_{k,i} = 0$. Donc $A = 0$ et $\langle\ ,\ \rangle$ est définie. (3)
D'après (1),(2) et (3), $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.

Remarque importante : Soit $(A, B) \in E^2$.
On pose $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (B_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(A^T B\right)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left(A^T\right)_{i,k} B_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}B_{k,i}$$

Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire canonique sur E.

2. (a) Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.
alors $M^T = M$ et $M^T = -M$ donc $M = -M$ et $M = 0$.
Donc $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. (1)
Soit $M \in E$.
Posons $S = \dfrac{M + M^T}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2}$.
On a $M = S + A$
$S^T = \left(\dfrac{M + M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T + \left(M^T\right)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T + M\right) = S$, donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.
$A^T = \left(\dfrac{M - M^T}{2}\right)^T = \dfrac{1}{2}\left(M^T - \left(M^T\right)^T\right) = \dfrac{1}{2}\left(M^T - M\right) = -A$, donc $A \in A_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $E = S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$.
D'après (1) et (2), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on pouvait également procéder par analyse et synthèse pour prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouvons que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Prouvons que $\forall A \in A_n(\mathbb{R}), \langle S, A\rangle = 0$.
Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$.

$$\langle S, A\rangle = \operatorname{tr}\left(S^T A\right) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}\left(-A^T S\right) = -\operatorname{tr}\left(A^T S\right) = -\langle A, S\rangle = -\langle S, A\rangle$$

Donc $2\langle S, A\rangle = 0$ soit $\langle S, A\rangle = 0$.
On en déduit que $S_n(\mathbb{R}) \subset A_n(\mathbb{R})^{\perp}$
De plus, $\dim A_n(\mathbb{R})^{\perp} = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
Or, d'après 2.(a), $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $\dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \dim A_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.
D'après (1) et (2), $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^{\perp}$.

3. On introduit la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \forall j \in [\![1\,;\, n]\!], E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ avec $e_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a alors $F = \operatorname{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, \ldots, E_{n,n})$.

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$.
Alors, en utilisant la remarque importante de la question 1.,
$M \in F^{\perp} \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!], \langle M, E_{i,i} \rangle = 0 \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!], m_{i,i} = 0$
Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(E_{i,j}$ telles que $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$ et $i \neq j)$.
En d'autres termes, $F^{\perp}$ est l'ensemble des matrices comprenant des zéros sur la diagonale.

II.4 Arithmétique

Exercice 29 Exercice 86 de la banque CCINP

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1 ; p-1]\!], p$ divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k\,!$ puis en déduire que p divise $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \bmod p$.
   Indication : procéder par récurrence.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Solution de l'exercice 29

1. On suppose $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$.
   D'après le théorème de Bézout,
   $\exists\,(u_1, v_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_1 p + v_1 a = 1$. (1)
   $\exists\,(u_2, v_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_2 p + v_2 b = 1$. (2)
   En multipliant les équations (1) et (2), on obtient :
   $\underbrace{(u_1u_2p + u_1v_2b + u_2v_1a)}_{\in \mathbb{Z}} p + \underbrace{(v_1v_2)}_{\in \mathbb{Z}}(ab) = 1.$
   Donc, d'après le théorème de Bézout, $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Soit $k \in [\![1 ; p-1]\!] \cdot \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!} = \dfrac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$.
   Donc $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k! = p(p-1)\dots(p-k+1)$.
   donc $p \mid \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} k!$. (3)
   Or, $\forall i \in [\![1 ; k]\!], p \wedge i = 1$ (car p est premier) donc, d'après 1., $p \wedge k! = 1$.
   Donc, d'après le lemme de Gauss, (3) $\Longrightarrow p \mid \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$.
   (b) On montre par récurrence que la propriété $(P_n)\ :\ n^p \equiv n \bmod p$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Pour $n = 0$ et pour $n = 1$, la propriété est vérifiée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété (P_n) : $n^p \equiv n \bmod p$ soit vérifiée.
     Alors, d'après la formule du binôme de Newton, $(n+1)^p = n^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k + 1$. (4)
     Or $\forall k \in [\![1 ; p-1]\!]$, $p \mid \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ donc $p \mid \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} n^k$.
     Donc d'après (4) et (P_n), $(n+1)^p \equiv n+1 \bmod p$ et (P_{n+1}) est vraie.

- Par principe de récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que p ne divise pas n.
Comme p est premier, alors $p \wedge n = 1$.
La question précédente donne p divise $n^p - n = n\left(n^{p-1} - 1\right)$.
Or comme p est premier avec n, on en déduit, d'après le lemme de Gauss, que p divise $n^{p-1} - 1$.
Ce qui signifie que $n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$. (petit théorème de Fermat).

Exercice 30 Exercice 94 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longleftrightarrow ab \mid c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Solution de l'exercice 30

1. Théorème de Bézout : Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
$$a \wedge b = 1 \Longleftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$$
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $a \wedge b = 1$.
Soit $c \in \mathbb{N}$.
   - Prouvons que $ab|c \Longrightarrow a|c$ et $b \mid c$.
   Si $ab \mid c$ alors $\exists k \in \mathbb{Z} / c = kab$.
   Alors, $c = (kb)a$ donc $a \mid c$ et $c = (ka)b$ donc $b \mid c$.
   - Prouvons que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longrightarrow ab \mid c$.
   $a \wedge b = 1$ donc $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2 / au + bv = 1$. (1)
   De plus $a \mid c$ donc $\exists k_1 \in \mathbb{Z} / c = k_1 a$. (2)
   De même, $b \mid c$ donc $\exists k_2 \in \mathbb{Z} / c = k_2 b$. (3)
   On multiplie (1) par c et on obtient $cau + cbv = c$.
   Alors, d'après (2) et (3), $(k_2 b)\, au + (k_1 a)\, bv = c$, donc $(k_2 u + k_1 v)(ab) = c$ et donc $ab \mid c$.

   On a donc prouvé que $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Longleftrightarrow ab \mid c$.
3. (a) - Première méthode (méthode générale) :
   Soit $x \in \mathbb{Z}$.
$$\begin{aligned} x \text{ solution de}(S) &\Longleftrightarrow \exists \left(k, k'\right) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ x = 4 + 15k' \end{array}\right. \\ &\Longleftrightarrow \exists \left(k, k'\right) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{l} x = 6 + 17k \\ 6 + 17k = 4 + 15k' \end{array}\right. \end{aligned}$$
   Or $6 + 17k = 4 + 15k' \Longleftrightarrow 15k' - 17k = 2$.
   Pour déterminer une solution particulière x_0 de (S), il suffit donc de trouver une solution particulière (k_0, k_0') de l'équation $15k' - 17k = 2$.
   Pour cela, cherchons d'abord, une solution de l'équation $15u + 17v = 1$.

17 et 15 sont premiers entre eux.
Déterminons alors un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $15u_0 + 17v_0 = 1$.
On a : $17 = 15 \times 1 + 2$ puis $15 = 7 \times 2 + 1$.
Alors $1 = 15 - 7 \times 2 = 15 - 7 \times (17 - 15 \times 1) = 15 - 17 \times 7 + 15 \times 7 = 15 \times 8 - 17 \times 7$
Donc $8 \times 15 + (-7) \times 17 = 1$
Ainsi, $16 \times 15 + (-14) \times 17 = 2$.
On peut prendre alors $k'_0 = 16$ et $k_0 = 14$.
Ainsi, $x_0 = 6 + 17 \times k_0 = 6 + 17 \times 14 = 244$ est une solution particulière de (S)

- Deuxième méthode :
  En observant le système (S), on peut remarquer que $x_0 = -11$ est une solution particulière.
  Cette méthode est évidemment plus rapide mais ne fonctionne pas toujours.

(b) x_0 solution particulière de (S) donc $\left\{\begin{array}{lll} x_0 & = & 6\,[17] \\ x_0 & = & 4\,[15] \end{array}\right.$

On a alors x solution de $(S) \iff \left\{\begin{array}{lll} x & = & x_0\,[17] \\ x & = & x_0\,[15] \end{array}\right. \iff (17 \mid x - x_0 \text{ et } 15 \mid x - x_0)$.
Or $17 \wedge 15 = 1$ donc d'après 2., x solution de (S) $\iff (17 \times 15) \mid x - x_0$.
Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + 17 \times 15k, k \in \mathbb{Z}\} = \{244 + 255k, k \in \mathbb{Z}\}$.

III Dénombrement

Exercice 31 Exercice 112 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Solution de l'exercice 31

1. On note $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.
   Soit $p \in [\![1\,;\, n]\!]$. On pose $F_p = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B \quad \text{et} \quad \operatorname{card} B = p\}$.
   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathcal{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\dbinom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall p \in [\![0\,;\, n]\!]$, Card $F_p = \dbinom{n}{p} 2^p$.
   Or $F = \displaystyle\bigcup_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, \ldots, F_n$ deux à deux disjoints.
   Donc $a = \operatorname{card} F = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.
   Conclusion : $a = 3^n$.
   Autre méthode :
   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset B\}$.
   À tout couple (A, B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

$$\varphi_{A,B}: \begin{cases} E \longrightarrow \{1,2,3\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} & x \in A \\ 2 & \text{si} & x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} & x \notin B \end{cases} \end{cases}$$

On note $\mathcal{A}(E,\{1,2,3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1,2,3\}$.

Alors l'application $\Theta: \begin{cases} F \longrightarrow \mathcal{A}(E,\{1,2,3\}) \\ (A,B) \longmapsto \varphi_{A,B} \end{cases}$ est bijective.

Le résultat en découle.

2. $\left\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\right\} = \left\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\right\}$.
   Or card $\left\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\right\} = \text{card}\left\{(A,\bar{B}) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset \bar{B}\right\}$
   $= \text{card}\left\{(A,C) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \subset C\right\}$
   $= a$.
   Donc $b = a$.
3. Compter tous les triplets (A,B,C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A \cup B \cup C = E$ revient à compter tous les couples (A,B) tels que $A \cap B = \emptyset$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A \cup B}$.
   En d'autres termes, $c = \text{card}\left\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 / A \cap B = \emptyset\right\} = b = 3^n$.