

– Feuille d'exercices – Révisions –

– Exercices de la banque CCINP de sup –

Les questions précédées de * ne peuvent être réalisées pour le moment.

I Analyse

Exercice 1 Exercice 1 de la banque CCINP

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

1. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 Exercice 3 de la banque CCINP

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Exercice 3 Exercice 4 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a; b[$.

On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$.

Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) \implies (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Exercice 4 Exercice 5 de la banque CCINP

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

- (b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice 5 Exercice 6 de la banque CCINP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 6 Exercice 7 de la banque CCINP

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.

On suppose que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.

Montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice 7 Exercice 43 de la banque CCINP

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
(b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan } x)$.

Exercice 8 Exercice 46 de la banque CCINP

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 9 Exercice 55 de la banque CCINP

Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
(b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

II Algèbre

II.1 Algèbre linéaire

Exercice 10 Exercice 59 de la banque CCINP

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n . On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
(a) sans utiliser de matrice de f ,
(b) en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. (*) f est-il diagonalisable ?

Exercice 11 Exercice 60 de la banque CCINP

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercice 12 Exercice 62 de la banque CCINP

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
(a) (*) en utilisant le lemme des noyaux.

(b) sans utiliser le lemme des noyaux.

3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Exercice 13 Exercice 64 de la banque CCINP

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
- (a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
(b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Exercice 14 Exercice 71 de la banque CCINP

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- Soit p la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice 15 Exercice 90 de la banque CCINP

\mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

- Montrer que $\Phi: \begin{cases} \mathbb{K}_2[X] \longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
(a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
(b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
- Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
- Application : on se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1)$, $B(1, 3)$, $C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

II.2 Algèbre bilinéaire

Exercice 16 Exercice 63 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.

Pour tout endomorphisme u de E , on note u^* l'adjoint de u .

- Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
- ii) $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x)|u(y) \rangle = \langle u^*(x)|u^*(y) \rangle$.
- iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 17 Exercice 76 de la banque CCINP

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \forall x \in [a; b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

Exercice 18 Exercice 77 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 19 Exercice 78 de la banque CCINP

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $\langle x|y \rangle$ le produit scalaire de x et de y et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - (a) Démontrer que : $\forall (x, y) \in E^2 \langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle$.
 - (b) Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Exercice 20 Exercice 79 de la banque CCINP

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a; b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall (f, g) \in E^2, \langle f|g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 21 Exercice 80 de la banque CCINP

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $\langle f|g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E .

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 22 Exercice 81 de la banque CCINP

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .

3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .

4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

Exercice 23 Exercice 82 de la banque CCINP

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(. | .)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

II.3 Complexes et polynômes

Exercice 24 Exercice 84 de la banque CCINP

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
- En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 25 Exercice 85 de la banque CCINP

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 - Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$.
 - Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
 a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0; r - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$
- Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 26 Exercice 87 de la banque CCINP

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, n + 1$ réels deux à deux distincts.

- Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n + 1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(a_i) = b_i$$

- Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

- Prouver que $\forall p \in \llbracket 0; n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Exercice 27 Exercice 89 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

- On suppose $k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$.

Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

- On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 28 Exercice 92 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
 Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
 On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
 On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
 (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
 Déterminer F^\perp .

II.4 Arithmétique

Exercice 29 Exercice 86 de la banque CCINP

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
 2. Soit p un nombre premier.
- (a) Prouver que $\forall k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket, p$ divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
 (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : procéder par récurrence.
 (c) En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 30 Exercice 94 de la banque CCINP

1. Énoncer le théorème de Bézout dans \mathbb{Z} .
 2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
 Soit $c \in \mathbb{N}$.
 Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \iff ab \mid c$.
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à \mathbb{Z} .
- (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans \mathbb{Z} .
 (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans \mathbb{Z} du système (S) .

III Dénombrement

Exercice 31 Exercice 112 de la banque CCINP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
 2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
 3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.