– Cahier de vacances de MPSI/MP2I à MP/MPI (correction) –

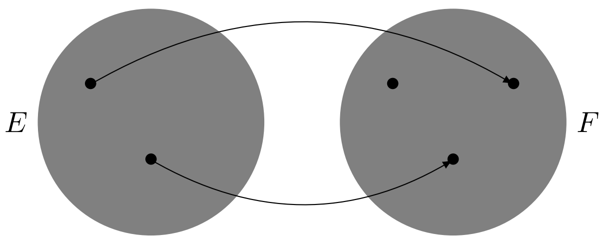
Voici la version corrigée du cahier de vacances envoyé en début de vacances.

Le jour de la rentrée, n'hésitez pas à venir avec vos questions.

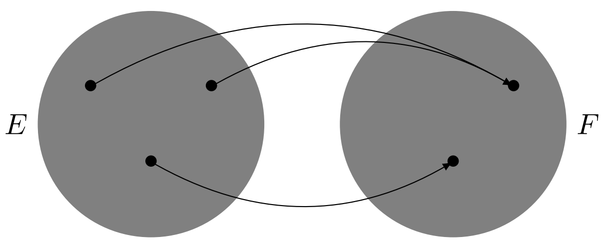
I Ensembles – Applications – Dénombrement

1. Soit E un ensemble non vide :
   Compléter :
   - $\mathcal{P}(E) =$ l'ensemble des parties de E.
   - $E \backslash A = \bar{A} = \complement_E^A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$
   - $A \backslash B = \{x \in A \text{tel que} x \notin B\}$
2. **Pour montrer que 2 ensembles sont égaux**, on utilise :
   $$\underline{\mathbf{A = B}} \Longleftrightarrow A \subset B \text{et} B \subset A$$
   Remarque : si A et B sont des ensembles finis, on peut aussi utiliser le cardinal :
   $$A = B \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \subset B \\ \operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(B) \end{array} \right.$$
3. La fonction indicatrice de $\mathbf{1}_A$ c'est l'application $\mathbf{1}_A : E \longmapsto \{0,1\}$ tel que $\mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right.$
4. **Pour montrer que 2 <u>applications</u> sont égales** :
   Soient 2 applications f et g ayant même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F.
   Par définition, $\underline{f = g} \Longleftrightarrow \forall x \in E \quad f(x) = g(x)$
5. Soient E et F deux ensembles et soit une application $f : E \longrightarrow F$:
   - **Caractérisation 1 :**
   $$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow \left[\forall \left(x, x'\right) \in E^2, f(x) = f\left(x'\right) \Longrightarrow x = x'\right]$$
   - **Caractérisation 2 :**
   $$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow [\forall y \in F, \exists x \in E, \quad y = f(x)]$$
   Faire un dessin avec deux "patates" représentant E et F, d'une fonction f injective et non surjective puis un 2ème dessin d'une fonction f surjective et non injective.

Une application injective non surjective



Une application surjective non injective



- **Définition 3 :** image directe et image indirecte
  Soit $A \subset E$, alors $f(A) = \{y \in F / \exists x \in A$ tel que $y = f(x)\} = \{f(x)/x \in A\}$ (image directe)
  Soit $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$ (image réciproque).

II Cardinal d'un ensemble fini :

Définition : Soit E un ensemble non vide. On dit que E est fini s'il existe un entier n et une bijection de E dans $[\![1\,;\,n]\!] (= \{1, 2, \ldots, n\})$: n est appelé le cardinal de E.
On note alors $\operatorname{Card} E = n$. Autre notation : $|E|$ ou $\#E$.

Convention : $\operatorname{Card} \emptyset = 0$
Propriétés :
Soient 2 ensembles finis E et F de même cardinal, et une application f de E dans F, alors

$$[f \text{ est bijective}] \iff [f \text{ est injective }] \iff [f \text{ est surjective}]$$

Opération sur les ensembles finis : Soient E et F deux ensembles finis.

(a) Si $E \cap F = \emptyset$ (on dit que E et F sont disjoints) alors : $\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F$.

Généralisation : si $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des parties de E, 2 à 2 disjointes, alors

$$\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \operatorname{Card} A_1 + \operatorname{Card} A_2 + \cdots + \operatorname{Card} A_p$$

(b) $\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F - \operatorname{Card}(E \cap F)$

(c) **Définition :** $E \times F = \{(x, y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F\}$

$$\boxed{|E \times F| = \operatorname{Card} E \times \operatorname{Card} F}$$

Généralisation : si $E_1, E_2, \ldots, E_p$ sont des ensembles finis, alors

$$|E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p| = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(E_i)$$

6. **p-listes :**
Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$.
Définition : Une p-liste de E (ou un p-uplet) est un élément de E^p

Théorème 1 :

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de p-listes de E est n^p

Conséquence : Si on note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F, alors

$$\operatorname{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}$$

Autre notation : $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi notée F^E.

Corollaire : Si E est un ensemble fini, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^{\operatorname{Card} E}$

Théorème 2 :

Si $\operatorname{Card} E = n$, et $p \leqslant n$ le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est
(On note parfois ce nombre A_n^p et on parle d'arrangements de E).
Conséquence :
Le nombre d'applications injectives de X_p à p éléments dans Y_n à n éléments est A_n^p.

A savoir : pour $n \geqslant 1, A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Permutations : On appelle permutation de n éléments toute bijection de l'ensemble de ces n éléments sur lui-même.
Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

7. **Combinaisons**

(a) **Théorème 3 :**

Si $\operatorname{Card} E = n$, le nombre de parties à p éléments (distincts) de E est noté $\binom{n}{p}$.
(On appelle ce nombre coefficient binomial)
Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$ et si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$

(b) **Calcul (on écrira les valeurs simplifiées, c'est-à-dire sans factoriels) :**

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{1}$, $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ et **Formule de Pascal :** $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

$\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

$\boxed{\textbf{Formule du binôme de Newton}}$: $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

8. **Application :** Le nombre des applications strictement croissantes de $[\![1 \,;\, p]\!]$ dans $[\![1 \,;\, n]\!]$ est $\binom{n}{p}$ (se donner une telle application strictement croissante revient à se donner p nombres de $[\![1 \,;\, n]\!]$ et à les trier dans l'ordre croissant).

9. **Calculs classiques :** Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, les sommes suivantes :

- $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}$, en faisant le changement d'indice $p = k-1$. Donc
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}2^k = 2n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}2^p$, en faisant le changement d'indice $p = k-1$. Donc, avec la formule du binôme de Newton,
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k = 2n3^{n-1}$$
- Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Donc,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p} - 1\Big) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n\sum_{p=0}^{n-1}(p+1)\binom{n-1}{p}$
$\displaystyle= n\sum_{p=0}^{n-1} p\binom{n-1}{p} + n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + n2^{n-1}$
$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$.

10. **Formule d'inversion de Pascal** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_k$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k$$

On montre par récurrence forte que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $y_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x_k$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} (-1)^{0-k} \binom{0}{k} x_k = x_0$. Or $x_0 = y_0$ par hypothèse. On a donc $\mathscr{P}(0)$ vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(0), \dots \mathscr{P}(n)$ vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
  D'après la formule donnée par l'hypothèse, $y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} y_k$. Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} x_j \right) \\ &= x_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} x_j \\ &= x_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j} x_j \end{aligned}$$

  Car $\binom{n+1}{k} \binom{k}{j} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!(k-j)!j!} = \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{k-j}$. D'où

$$y_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} x_j \left(\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{n+1-j}{k-j} \right)$$

  Or pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$, $\sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{n+1-j}{k-j} = \sum_{k'=0}^{n-j} (-1)^{k'} \binom{n+1-j}{k'}$ avec le changement d'indice $k' = k - j$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{k-j} \binom{n+1-j}{k-j} &= \sum_{k'=0}^{n+1-j} (-1)^{k'} \binom{n+1-j}{k'} - (-1)^{n+1-j} \\ &= (1-1)^{n+1-j} - (-1)^{n+1-j} = -(-1)^{n+1-j} \end{aligned}$$

  car $n + 1 - j \neq 0$. Alors $y_{n+1} = x_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} x_j = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} x_j$ et $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ vraie.

III Trigonométrie

1.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	$\sqrt{3}$	0

2. **Parité - Périodicité - Symétries :**
   (a) $\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\tan(-x) = -\tan x$
   (b) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ $\quad$ $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
   (c) $\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\quad$ $\sin(x + \pi) = -\sin x$ $\quad$ $\tan(x + \pi) = \tan x$
   (d) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ $\quad$ $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$
   (e) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\quad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
3. **Formules d'Euler :**
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$
   Formules d'Euler généralisées : Savoir factoriser par l'angle moitié $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$ et retrouver les 2 formules :
   $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$ $\quad$ et $\quad$ $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$
4. **Formules d'addition** : (Elles sont basées sur la formule $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$)
$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \end{aligned}$$
5. **Formules du double-angle**
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{d'où} \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$
6. **Formules de transformation :** (On les retrouvent à l'aide des formules d'addition)
   - $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
   - $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
   - $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$
   - $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
   - $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
   - $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
   - $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$
7. **Formules de paramétrisation :**
   Si $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ alors on a $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad$ $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\quad$ $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

IV $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

1. **Valeur absolue :** $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|\,, \quad |x+y| \geqslant ||x|-|y|| \qquad \text{et} \qquad |x| \leqslant \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$$

pour $\alpha \geqslant 0$

2. **Partie entière** : $n = \lfloor x \rfloor \Longleftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leqslant x < n+1 \end{cases}$ **Conséquence** : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
3. **Somme et produit** :
   - $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$
   - $\sum\limits_{i+j=n} x_i y_j = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0$
   - $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$
4. **Complexes :**
   Si $z = a + \mathrm{i}b$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$ et $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$

   Théorème : Soient $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = \rho' \mathrm{e}^{i\theta'}$, avec $\rho > 0$, $\rho' > 0$ et θ, θ' des réels.

   On a $\boxed{z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que } \theta' = \theta + 2k\pi \end{cases}}$
5. **Application des racines n-ième de 1** :
   Factorisation de $X^n - 1 = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) \qquad$ avec $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.

V Polynômes

1. **Division euclidienne :**

$$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ avec } B \neq 0 : \exists! (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tel que } A = BQ + R \text{ et } \boxed{\deg R < \deg B}.$$

2. **Relation coefficients-racines :**
   - Si $(X-\alpha)(X-\beta) = X^2 + aX + b$ alors $\alpha + \beta = -a$ et $\alpha\beta = b$.
   - Si $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 + aX^2 + bX + c$ alors

$$\alpha + \beta + \gamma = -a, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta\gamma = -c$$

   - Si $\prod\limits_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ alors

$$a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \qquad \text{et} \qquad a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$$

3. **Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine α d'un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$** : α est racine de P d'ordre exactement m si et seulement si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \quad P = (X-\alpha)^m Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

   si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

VI Algèbre linéaires : espaces vectoriels et applications linéaires

VI.1 Espaces, sous-espaces :

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -ev si :

(a) $(E, +)$ est un groupe

(b) $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$
(c) $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
(d) $\forall(\lambda, \mu, x) \in \mathbb{K}^2 \times E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda.x + \mu.x$
(e) $\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E^2, \quad \lambda.x + \lambda.y = \lambda \cdot (x + y)$

Soit E un $\mathbb{K}$ e.v. et $F \subset E$. Alors, F est un s.e.v de E si $\begin{cases} F \neq \emptyset \qquad (0_E \in F) \\ \forall (x,y) \in F^2, x + y \in F \\ \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F \end{cases}$

- **Théorème :** si F est un s.e.v de E, alors $(F, +, \cdot)$ est aussi $\mathbb{K}$-ev.

VI.2 Applications linéaires

Soient E et F deux e.v. sur $\mathbb{K}$.

$f : E \to F$ est une application linéaire (notation : $f \in \mathcal{L}(E, F)$) si :

- $\forall (x, y) \in E^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda \cdot x) = \lambda f(x)$

Vocabulaire - définition

- **Endomorphisme** = application linéaire de E dans E (notation : $f \in \mathcal{L}(E)$).
- **Isomorphisme** = application linéaire et bijective
- **Automorphisme** = endomorphisme bijectif (notation : $f \in GL(E)$)
- **Forme linéaire** = application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- **Propriété** : si f est application linéaire alors $f(0_E) = E_F$
- $\operatorname{Ker} f = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0\})$ et $\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E$ tel que $y = f(x)\} = f(E)$.
- Si f est une application linéaire alors : f est injective $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- f est surjective $\iff f(E) = F$.

VI.3 Familles :

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$:

$$\operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \left\{ u \in E / \exists (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \right\} \text{ (s.e.v. engendré par } (u_1, u_2, \ldots, u_p))$$

- $\mathrm{S} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est génératrice de E ssi $\operatorname{Vect}(\mathrm{S}) = E$,
  c'est à dire si : $\forall u \in E$, $\exists (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$, tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$
- $\mathrm{S} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre ssi

$$\left(\forall (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p\right) \left[\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i = 0 \right) \Longrightarrow \forall 1 \leqslant i \leqslant n \quad \alpha_i = 0 \right]$$

- $\mathrm{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de E si B est libre et génératrice.
- $\mathrm{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base de $E \iff \forall u \in E, \exists! (\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ tel que $u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$
- Soit E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}$, et $\mathrm{S} = (u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$
  - si S est libre alors Card S $\leqslant n$
  - si S est libre et Card S $= n$ alors **S** est une base de E.
  - si S est génératrice de E alors Card S $\geqslant n$.
  - si S est génératrice de E et Card S $= n$ alors S est une base de E.

VI.4 Somme de SEV :

Soient F_1 et F_2 deux s.e.v. de E.

- F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
- F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E ssi $\forall x \in E, \exists!\,(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
  On note alors : $E = F_1 \oplus F_2$.
- **Théorème** : $E = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{cases} F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.; \\ E = F_1 + F_2 \quad (: \forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } x = x_1 + x_2) \end{cases}$
- **Image d'une application linéaire** :

$$\boxed{\text{Si } E \text{ est un e.v. de base } (e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ et si } f \in \mathcal{L}(E, F), \text{ alors } \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n)).}$$

- Soient E et F deux e.v. et f un isomorphisme de E dans F, alors

$$[E \text{ est de dimension finie}] \iff [F \text{ est de dimension finie}], \text{ et dans ce cas } \dim E = \dim F$$

- Soient E et F deux e.v. de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$[f \text{ est injective}] \iff [f \text{ est bijective}] \iff [f \text{ est surjective}]$$

- si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E est un e.v. de dimension finie, on définit $\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f}$.
- **Formule du rang** : soient E (e.v. de dimension finie) et F 2 ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$\boxed{\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f}$$

VII Algèbre linéaire : Matrices

VII.1 Lois

- <u>**+ et .**</u> Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  On définit $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\lambda.A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$
- <u>$\times$</u> : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$. On définit $A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ par

$$\forall (i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!] \times [\![1 \,;\, q]\!] \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

  Exemples :
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 \end{pmatrix}$. Alors,

$$AX = \begin{pmatrix} x + 4y \\ 2x + 5y \end{pmatrix}, \qquad XB = \begin{pmatrix} 9x & 7x \\ 9y & 7y \end{pmatrix}, \qquad BX = 9x + 7y \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 71 \end{pmatrix}$$

- **Formule du binôme de Newton :** Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B commutent ($AB = BA$), alors pour tout N :

$$(A + B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{N-k} B^k$$

VII.2 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E dans E. On appelle matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, la matrice dont la j-ème colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$.

$$\text{Si } \forall j \in [\![1 \,;\, n]\!] : f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i, \text{ alors } M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle de $y = f(x)$:

Soit $x \in E$ de matrice colonne X dans la base $\mathcal{B}$. Alors le vecteur $f(x)$ a pour matrice colonne : $Y = M_{\mathcal{B}}(f)X$ dans la base $\mathcal{B}$.

VII.3 Matrices de passage

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e''_1, \ldots, e'_n)$ une « nouvelle » base de E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ou $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est la matrice dont la j-ième colonne est constituée des coordonnées de e'_j dans $\mathcal{B}$.

VII.4 Formules de changement de bases pour un vecteur :

Soit $x \in E$ de matrice colonne X_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et de matrice colonne X_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Soit $P = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$.

On a la relation suivante entre X_1 et X_2 : $X_1 = PX_2$ et donc $X_2 = P^{-1}X_1$.

VII.5 Formules de changement de bases pour un endomorphisme :

Soit f un endomorphisme de E, et soit $P = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_1}(f) P$$

En particulier, si $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ est diagonale, on la note D et $A = M_{\mathcal{B}_1}(f)$, on a : $D = P^{-1}AP$ et donc $A = PDP^{-1}$.

VII.6 Déterminants

Revoir le cours de MPSI, les calculs des déterminants à l'aide des opérations élémentaires de Gauss.

Quelques calcul : Calculer les déterminants suivants :

1. $V_n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Solution : On va établir une relation de récurrence afin de calculer par récurrence la valeur de ce déterminant.

   - **Méthode 1, avec des opérations élémentaires.**
     Pour $n \geqslant 2$, effectuons successivement dans $V_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ les opérations élémentaires suivantes, qui ne changent pas la valeur du déterminant :

$$C_{n+1} \longleftarrow C_{n+1} - x_1\, C_n \quad C_n \longleftarrow C_n - x_1\, C_{n-1} \quad \ldots \quad C_2 \longleftarrow C_2 - x_1\, C_1$$

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1\,x_2 & \dots & x_2^n - x_1\,x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1\,x_3 & \dots & x_3^n - x_1\,x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1\,x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n - x_1\,x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \\
V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2\,(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}\,(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3\,(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-1}\,(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}\,(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}\,(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la première ligne, il vient :

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2\,(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-1}\,(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3\,(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-1}\,(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}\,(x_{n+1} - x_1) & \dots & x_{n+1}^{n-1}\,(x_{n+1} - x_1) \end{vmatrix} \\
&= \left[\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1)\right] \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) = \left[\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1)\right] V_n(x_2,\dots,x_{n+1})$$

On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

- **Initialisation.** Pour $n = 2$,
$$V_2(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (x_j - x_i)$$
Le résultat est vérifié pour $n = 2$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons le résultat vrai pour n. Alors
$$\begin{aligned}
V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \left[\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1)\right] V_n(x_2,\dots,x_{n+1}) \\
&= \left[\prod_{j=2}^{n+1} (x_j - x_1)\right] \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \\
V_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1}) &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$
Donc l'assertion est vraie à l'ordre $n + 1$.
- **Conclusion.** On conclut à l'aide du théorème de récurrence que
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\} \qquad V_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)}$$

- **Méthode 2, à l'aide d'un polynôme.**
Soit
$$P\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto V_n(x_1,\dots,x_{n-1},x) \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par rapport à la dernière ligne, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad P(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{nj}\, x^{j-1}$$

où les A_{ij} sont les cofacteurs de $V_n(x_1, \dots, x_n)$ (en effet, les cofacteurs A_{nj} ne dépendent pas des coefficients de la $n^{\text{ième}}$ ligne du déterminant). P est donc une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à $n-1$. De plus, on sait qu'un déterminant qui a deux lignes identiques est nul, donc

$$\forall k \in [\![1 \,;\, n-1]\!] \qquad P(x_k) = 0$$

On distingue deux cas :

- Si $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts, la fonction polynomiale P est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et admet $n-1$ racines distinctes : on peut écrire

  $$\forall x \in \mathbb{K} \qquad P(x) = A_{nn} \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k)$$

  Or, A_{nn} est le cofacteur relatif à la dernière ligne et la dernière colonne donc

  $$A_{nn} = V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

  Ainsi,

  $$V_n(x_1, \dots, x_n) = P(x_n) = V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$$

  Comme dans la première méthode, on en déduit par récurrence :

  $$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

- Si $x_1, \dots, x_{n-1}$ ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant est nul car il y a deux lignes identiques et on retrouve la même formule.

  $$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

2. $\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$ pour $a \in \mathbb{R}$

Solution : On va établir une relation de récurrence afin de calculer par récurrence la valeur de ce déterminant.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$

Soit $n \geqslant 2$. On développe par rapport à la première colonne ce déterminant. On obtient

$$D_{n+1} = (1+a^2)D_n - a \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 1+a^2 & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On développe le deuxième déterminant par rapport à la première ligne. On obtient

$$D_{n+1} = (1+a^2)D_n - a^2 D_{n-1}$$

De plus, on a $D_1 = 1 + a^2$ et $D_2 = (1 + a^2)^2 - a^2 = 1 + a^2 + a^4$. La suite $(D_n)_{n\geqslant 1}$ suit alors une relation de récurrence linéaire double dont l'équation caractéristique est

$$x^2 = (1 + a^2)x - a^2 \iff x^2 - (1 + a^2)x + a^2 = 0$$

Cette équation a 1 comme racine évidente. Donc l'autre racine est a^2.

- Supposons $a^2 \neq 1$ donc $a \notin \{-1, 1\}$. Il existe alors $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$D_n = \lambda + \mu a^{2n}$$

De plus,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu a^2 &=& 1 + a^2 \\ \lambda + \mu a^4 &=& 1 + a^2 + a^4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu a^2 &=& 1 + a^2 \\ \mu(a^4 - a^2) &=& a^4 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

Si $a = 0$, alors $D_n = \det(I_n) = 1$.

Supposons $a \neq 0$, alors $\mu = \dfrac{a^2}{a^2 - 1}$ et $\lambda = 1 + a^2 - \dfrac{a^4}{a^2 - 1} = -\dfrac{1}{a^2 - 1}$. D'où

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad D_n = \frac{1}{a^2 - 1}\left(a^{2(n+1)} - 1\right)}$$

- Si $a^2 = 1$, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \geqslant 1$,

$$D_n = \lambda + n\mu$$

De plus,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& 2 \\ \lambda + 2\mu &=& 3 \end{array}\right. \iff \mu = 1 \quad \text{et} \quad \lambda = 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $D_n = 1 + n$.

3. Calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Solution : Soit $n \geqslant 1$.

On réalise l'opération suivante $C_1 \leftarrow \sum\limits_{k=1}^{n} C_k$. On obtient alors

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots\ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots\ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On réalise ensuite pour tout $2 \leqslant j \leqslant n$, l'opération $C_j \leftarrow C_j - C_1$ dans la nouvelle matrice. On obtient :

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots\ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots\ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n]} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

la dernière matrice obtenue étant triangulaire inférieure.

VIII Sommes à connaître absolument

1. **Sommes d'entiers**
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. **Somme géométrique**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{C} \text{ et } q \neq 1 : 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Remarque : Pour $q = 1 : 1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$

3. **Formule de Bernoulli** :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \qquad \begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) \end{aligned}$$

IX SUITES

IX.1 Comparaison de suites :

$$u_n = O(v_n) \text{ ssi } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est une suite bornée}$$
$$u_n = o(v_n) \text{ ssi } \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$
$$u_n \sim v_n \text{ ssi } \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

IX.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, u_0 \in \mathbb{C}, u_1 \in \mathbb{C} \left((a,b) \in \mathbb{C}^2, a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0\right)$$

On pose l'équation caractéristique (E) : $x^2 = ax + b$

- si (E) a 2 racines : r_1 et r_2 alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- si (E) a une racine double : r alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(\lambda + \mu n)$

Remarque : Si $(a, b, u_0, u_1) \in \mathbb{R}^4$ et si (E) admet 2 racines complexes non réelles (conjuguées) : $\rho\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\rho\mathrm{e}^{-i\theta}$, alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$.

IX.3 Théorèmes

1. Soit (u_n) une suite strictement croissante de réels.
   - Ou bien, la suite (u_n) n'est pas majorée et alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
   - Ou bien, la suite (u_n) est majorée et alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sup(u_n)$.
2. La suite (u_n) converge si et seulement si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite.
3. Soit (u_n) une suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$. Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$.
4. Théorème fondamental des suites adjacentes : si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes réelles, alors elles convergent et ont même limites.
5. **Théorème de Bolzano Weierstrass** : De toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

X Fonctions réelles

X.1 Théorème de la limite monotone

Faire un dessin et un tableau de variation de f sur $]\,a\,;b\,[$.

- si f est croissante et majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à gauche en b.
- si f est croissante et n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.
- si f est croissante et minorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à droite en a.
- si f est décroissante et minorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à gauche en b
- si f est décroissante et majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f a une limite à droite en a

Conséquence : si f est croissante sur $]\,a\,;b\,[$, alors pour tout $c \in \,]\,a\,;b\,[\,, f$ a une limite à droite et à gauche en c et $\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$

X.2 Accroissements finis

- **Formule des accroissements finis**
  Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, alors :
  $$\boxed{(\exists \mathbf{c} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[) \text{ tel que } \mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{f}'(\mathbf{c})(\mathbf{b} - \mathbf{a})}$$
- **Inégalité des accroissements finis :**
  Soit f dérivable sur un intervalle I telle que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant K$, alors
  $$\boxed{\forall (a,b) \in I^2,\ |f(b) - f(a)| \leqslant K\,|b-a|}$$

X.3 Théorème de la limite de la dérivée

soit $\alpha \in I$, et soit f une fonction continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{\alpha\}$

Si f' a une limite finie L lorsque x tend vers α, $\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f'(x) = L\right)$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(\alpha) = L$.

X.4 Comparaison des fonctions :

Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$,

$$f(x) \underset{a}{=} O(g(x)) \text{ si } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a.$$
$$f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \text{ si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \text{ si } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Croissances comparées :

- **En 0** : Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a : $\lim\limits_{x\to 0} x^b (\ln|x|)^a = 0 \Leftrightarrow |\ln x|^a = o(x^{-b})$
- **En** $+\infty$: Soit $a > 0, b > 0$ et $c > 0$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln|x|)^a}{x^b} = 0 \Leftrightarrow |\ln x|^a \underset{+\infty}{=} o(x^b)$

  et $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{\mathrm{e}^{cx}} = 0 \Leftrightarrow x^b \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{cx})$

XI Fonctions réciproques classiques

XI.1 Trigonométrie réciproque

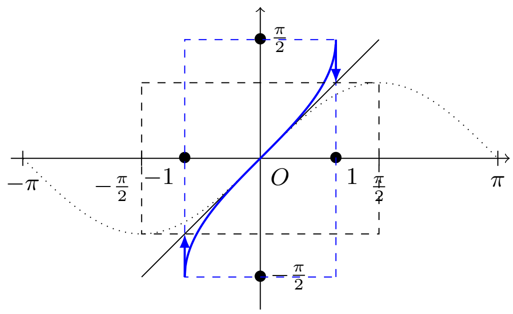
$$\begin{cases} y = \operatorname{Arcsin} x \\ x \in [-1\,;1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arccos} x \\ x \in [-1\,;1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in \end{cases}$$

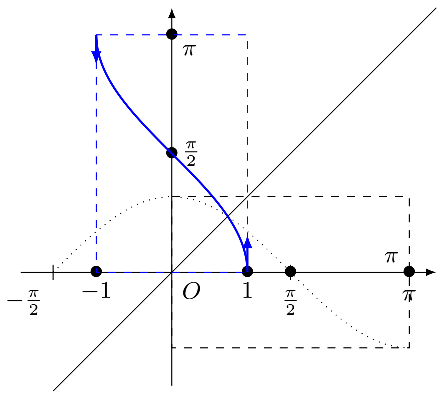
$$\begin{cases} y = \operatorname{Arctan} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \end{cases}$$

Tracer le graphe des 3 fonctions Arcsin, Arccos, Arctan :

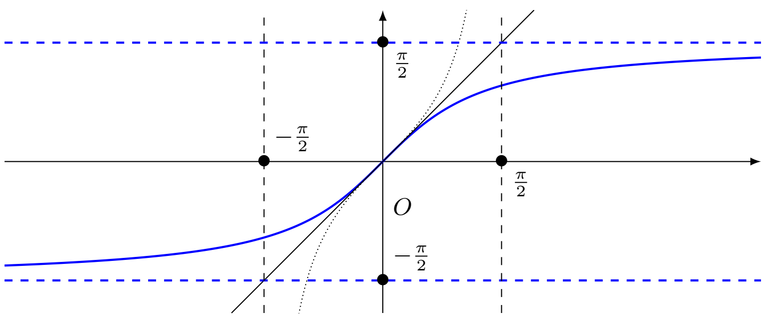
- Fonction Arcsin



- Fonction Arcsin



- Fonction Arctan



Arcsin définie de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$/ Arccos définie de $[-1\,;1]$ dans $[0\,;\pi]$/ Arctan définie de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Dérivées :

$$\forall x \in \left]-1\,;1\right[,\ \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

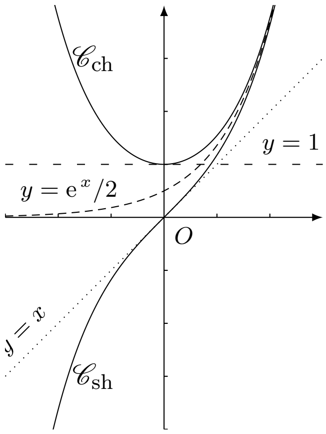
XII Trigonométrie hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

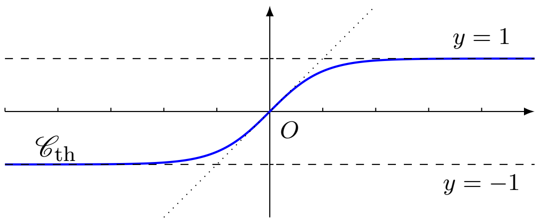
Relation fondamentale : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

Tracer le graphe des 3 fonctions sh, ch, th :

- Fonctions sh et ch :



- Fonction th :



XIII Formules de Taylor - Développement limités

XIII.1 Formule de Taylor avec reste intégral (T.R.I)

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

XIII.2 Inégalité de Taylor-Lagrange (I.T.L)

Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I Soit $(a,b) \in I^2$. On a alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \quad M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où M est un majorant de $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ pour $t \in [\,a\,;b\,]$. $M = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, t \in [\,a\,;b\,]\right\}$ convient.

XIII.3 Formule de Taylor-Young

Soit f de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle I. Soit $(a,x) \in I^2$. On a alors, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

XIII.4 Développements limités usuels à connaître au voisinage de 0

Les 3 premiers termes des D.L. sont à connaitre par cœur. Au voisinage de 0, on a (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) &&= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{sh}\, x &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right) &&= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right) \\
\mathrm{ch}\, x &= \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right) &&= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \mathrm{o}\left(x^{2p+1}\right) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i)\right) \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \\
&= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n) \quad = \quad 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n) \quad = \quad 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) \quad = \quad x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \\
\ln(1-x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) \quad = \quad -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{Arctan}\, x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2p+2}\right)
\end{aligned}$$

Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} = 1+\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=0}^{k-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)\frac{x^k}{k!}+\mathrm{o}(x^n)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1)}{2^k}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{o}(x^n)\\ &= 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\frac{x^k}{k!}+\mathrm{o}(x^n) = 1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{2k}{k}\frac{x^k}{2^{2k}}+\mathrm{o}(x^n)\end{aligned}$$

Alors,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k}}{2^{2k}}+\mathrm{o}(x^{2n})$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\ &= x+\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)2^{2k}}+\mathrm{o}(x^{2n+1})\end{aligned}$$

Or la fonction Arcsin est de classe $\mathscr{C}^{2n+2}$ et impaire, donc on en déduit avec la formule de Taylor Young, qu'elle admet un DL en x^{2n+2} et que le terme devant x^{2n+2} est nul. D'où

$$\text{Arcsin } x = x+\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)2^{2k}}+\mathrm{o}(x^{2n+2})$$

Application : équivalent en 0 :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \quad // \cos x \underset{0}{\sim} 1 \quad // \tan x \underset{0}{\sim} x$$

$$\text{Arctan}\, x \underset{0}{\sim} x \quad // \text{Arcsin}\, x \underset{0}{\sim} x \quad // \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x // \operatorname{th} x \underset{0}{\sim} x$$

Autres équivalents usuels :

$$\text{Arccos}\, x \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad // \ln(x) = \ln(1+(x-1)) \underset{1}{\sim} (x-1) \quad // \text{Arctan}\, x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad // \operatorname{ch} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \quad // \operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2} \quad // \operatorname{th} x \underset{+\infty}{\sim} 1$$

<u>Remarque</u> : si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, alors $f(x) \underset{a}{\sim} L$.

Quelques exercices :

1. Montrer qu'au voisinage de 0, $\tan x = x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.

   Solution : Au voisinage de 0, $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\mathrm{o}(x^6)$ et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\mathrm{o}(x^6)}\\ &= 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)^2-\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3+\mathrm{o}(x^6)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^4}{4}\left(1-\frac{x^2}{12}+\frac{x^4}{360}\right)^2+\frac{x^6}{8}+\mathrm{o}(x^6)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{24}\right)x^4+\left(\frac{1}{720}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)x^6+\mathrm{o}(x^6)\\ &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\mathrm{o}(x^6)\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\tan x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathrm{o}(x^6)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \mathrm{o}(x^6)\right)\\
&= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^6)\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathrm{o}(x^6)}$$

2(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^5} = +\infty$.

Solution : On a au voisinage de 0 :

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ et $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$. D'où

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - x + \mathrm{o}(x^2) = \frac{1}{8}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

Alors, $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^5} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{8x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. On en déduit alors le résultat demandé.

(b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3\sin x - \ln(1+x)} = \dfrac{13}{30}$.

Solution : On a au voisinage de 0

$$\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{6}{5}x - 1 - \frac{1}{3}x + \mathrm{o}(x) = \frac{13}{15}x + \mathrm{o}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{13}{15}$$

De plus, $3\sin x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. On en déduit

$$\frac{\sqrt[5]{1+6x} - \sqrt[3]{1+x}}{3\sin x - \ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{13}{2\times 15} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{13}{30}$$

d'où le résultat demandé.

(c) Pour tous $a, b > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}$.

Solution : On pose $h = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$. Pour x au voisinage de $+\infty$ donc h au voisinage de 0.

$a^h = \exp h \ln a = 1 + h\ln(a) + \mathrm{o}(h)$. Donc $\dfrac{a^h + b^h}{2} = 1 + h\ln(\sqrt{ab}) + \mathrm{o}(h)$. On a alors

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x = \exp\left(\frac{1}{h}\ln\left(1 + h\ln(\sqrt{ab}) + \mathrm{o}(h)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{h}h\ln(\sqrt{ab}) + \mathrm{o}(h/h)\right) = \exp(\ln(\sqrt{ab}) + \mathrm{o}(1))$$

On en déduit par composition, $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$.

3. Démontrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)}$$

admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.

Solution : Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0. Pour savoir si le quotient admet un développement limité, on commence par déterminer un $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur sous forme normalisée.

Par différence, au voisinage de 0,

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \cos x - x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + \mathrm{o}(x^2) = x^2\,(1 + \mathrm{o}(1))$$

$$g(x) = x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \mathrm{o}(x^2) = x^2\,\left(\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)\right)$$

Avec les notations précédentes, $p = q$: on peut simplifier par x^2 pour se ramener à un dénominateur de limite non nulle. Comme f et g admettent des développements limités à tout ordre, on a montré l'existence du développement limité du quotient.

On veut un développement limité à l'ordre 2 et on va devoir simplifier par x^2, on doit donc partir de développements limités à l'ordre 4. Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - x + \mathrm{o}(x^4)\\
&= x^2 + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\\
g(x) &= x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \mathrm{o}(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)}{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)} = \frac{2 + \dfrac{x}{3} + \mathrm{o}(x^2)}{1 - \dfrac{2\,x}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \left(2 + \frac{x}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \left(\frac{2\,x}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{2\,x}{3} - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \mathrm{o}(x^2)\right)\\
&= \left(2 + \frac{x}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{2\,x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{4\,x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2)\right)\\
&= \left(2 + \frac{x}{3} + \mathrm{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{2\,x}{3} - \frac{x^2}{18} + \mathrm{o}(x^2)\right)\\
&= 2 + \frac{4\,x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + \frac{2\,x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2)\\
\frac{f(x)}{g(x)} &= 2 + \frac{5\,x}{3} + \frac{x^2}{9} + \mathrm{o}(x^2)
\end{aligned}$$

XIV Primitives de fonctions usuelles

XIV.1 Formules à maîtriser

Avec u fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive
e^x	e^x
$a \neq 0, \mathrm{e}^{ax}$	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$
$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{sh}\ x$
$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\ x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$a \neq -1, x^a$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$

Fonction	Primitive
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\dfrac{\cos x}{\sin x}$
$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\, x} = 1 - \mathrm{th}^2\, x$	$\mathrm{th}\ x$
$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2\, x}$	$-\dfrac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2} (a \neq 0)$	$\dfrac{1}{a} \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\ x$

Théorème : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Alors f admet des primitives sur I. De plus,

1. Pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive de f s'annulant en x_0, c'est la fonction

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

2. Toutes les primitives de f sur I sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

XIV.2 Intégration par parties

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\int_a^b u(t)\, v'(t)\; dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\, v(t)\; dt$$

XIV.3 Formule de changement de variable :

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

avec $x = \varphi(t)$ d'où $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$ donc $a = \varphi(\alpha)$ et si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$ donc $b = \varphi(\beta)$

Un petit exercice : Soit, pour tout entier naturel n,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t$$

1. Démontrer $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \qquad n\, I_n = (n-1)\, I_{n-2}$.
2. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_{2p} pour tout entier naturel p.
3. Calculer I_1. En déduire la valeur de I_{2p+1} pour tout entier naturel p.

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Les fonctions u et v définies sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ par $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \sin^{n-1}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi/2\,]$. De plus, pour tout $t \in [\,0\,;\pi/2\,]$,

$$u'(t) = \sin(t) \qquad \text{et} \qquad v'(t) = (n-1)\sin^{n-2}(t)\cos(t)$$

   On en déduit par intégration par parties que

$$I_n = \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t$$

   Or, $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$. D'où

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \quad \text{et} \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

2. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. De plus, pour tout $p \geqslant 1$,

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)}$$

   On en déduit par récurrence que pour tout $p \geqslant 0$, $I_{2p} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2p \times \cdots \times 2} I_0 = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

3. $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ et pour tout $p \geqslant 1$,

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2(p-1)+1}$$

   On en déduit par récurrence que pour tout $p \geqslant 0$,

$$I_{2p+1} = \frac{2p \times \cdots \times 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

XIV.4 Sommes de Riemann

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,])$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}$$

Quelques questions : Étudier la convergence des suites réelles u définies par

1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2\,n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{\pi^2}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln 2.$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sin(\pi t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\pi^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi^2\int_0^1 x^2\cos(\pi x)\mathrm{d}x$.
   En faisant le changement de variable affine $t = \pi x$, on obtient
   $$\pi^2\int_0^1 x^2\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \pi^2\int_0^\pi \frac{t^2}{\pi^2}\cos t\frac{\mathrm{d}t}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2\cos t\mathrm{d}t$$
   On réalise ensuite deux intégrations par parties successives, les fonctions polynômiales, cos et sin étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$. On obtient
   $$\int_0^\pi t^2\cos t\mathrm{d}t = [t^2\sin t]_0^\pi - 2\int_0^\pi t\sin t\mathrm{d}t = 2[t\cos t]_0^\pi - 2\int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t = -2\pi$$
   Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

XV Produit scalaire

XV.1 Définitions

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit φ une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

On dit que φ est un produit scalaire sur E si φ vérifie :

1. φ **est symétrique** : $\forall(x,y)\in E^2 : \varphi(y,x) = \varphi(x,y)$.
2. φ **est bilinéaire** : $\begin{array}{l}\forall\left(x,x',y,\lambda\right)\in E^3\times\mathbb{R} : \varphi\left(\lambda x + x', y\right) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi\left(x',y\right)\\ \forall\left(x,y,y',\lambda\right)\in E^3\times\mathbb{R} : \varphi\left(x, \lambda y + y'\right) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi\left(x,y'\right)\end{array}$
   Remarque : La deuxième ligne se déduit de la première grâce à la symétrie.
3. φ **est définie positive** : $\forall x\in E : \varphi(x,x)\geqslant 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Norme euclidienne : Pour tout $x\in E$, $\|x\| = \sqrt{(x\mid x)}$

Formules de polarisation et de la médiane : pour tout $(x,y)\in E^2$

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ \langle x|y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Pour tout $(x,y)\in E^2$, $|\langle x|y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.
Cas d'égalité : $|\langle x|y\rangle| = \|x\|\|y\| \Longleftrightarrow$ la famille (x,y) est liée.

XV.2 Exemples fondamentaux

1. $E = \mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
   $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n$:
   $$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
2. $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$($\mathbb{R}$-ev des applications continues sur $[\,a\,;b\,]$).
   $$\forall(f,g)\in E^2 \qquad (f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

XV.3 Orthogonalité et base orthonormale

Base orthonormale Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Pour tout $x \in E$ de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, pour tout $y \in E$ de coordonnées $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans $\mathcal{B}$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \quad \text{et } \langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Théorème de Pythagore : Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$x \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Orthogonal d'un sous-espace : Soit E un $\mathbb{R}$ – ev muni d'un produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et soit F un sev de E.

On appelle orthogonal de F le sous-espace noté $F^\perp$:

$$F^\perp = \{x \in E / \forall a \in F,\ \langle x|a\rangle = 0\}$$

Écriture matricielle du produit scalaire :

Soit φ un produit scalaire, noté $(x \mid y)$, sur E et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

On appelle matrice du produit scalaire φ dans la base $\mathcal{B}$, notée $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, la matrice

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \text{ où } a_{i,j} = (e_i \mid e_j)$$

Remarque : Comme φ est symétrique, $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique $\left({}^tA = A\right)$.

Si $\mathcal{B}$ est orthogonale alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est diagonale et si $\mathcal{B}$ est orthonormale alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$.

Ecriture matricielle :

Posons $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Soient x et y, 2 vecteurs de E et soient X et Y leur matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$. On a (en désignant par ${}^tX$ la transposée de X) :

$$(x \mid y) = {}^tXAY \qquad \text{Conséquence : Si } \mathcal{B} \text{ est orthonormale alors } (x \mid y) = {}^tXY$$

XV.4 Projection orthogonale et distance

Soit (E, φ) un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

Alors $E = F \oplus F^\perp$. On appelle *projecteur orthogonal(e)* de E sur le sous-espace vectoriel F le projecteur p_F de E sur F parallèlement à $F^\perp$.

Soit p une application de E dans E. On dit que p est *un projecteur orthogonal* de E lorsque

- p est un projecteur (c'est-à-dire lorsque $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$)
- et $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.

Expression d'un projeté

Théorème : Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle de l'espace préhilbertien (E, φ) et $\mathscr{F} = (f_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ une BON de F. Alors

$$\forall x \in E \qquad p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x|f_k) f_k$$

Un petit exercice : On note F le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(\sin, \cos)$ de $\mathcal{C}([\,0\,; 2\pi\,], \mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de l'identité Id sur F pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Solution : On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\cos = \left[\frac{1}{2}\sin^2(t)\right]_0^{2\pi} = 0$. La famille $(\sin, \cos)$ est donc orthogonale.

De plus, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1+\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$. La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\right)$ est donc une base orthonormale de F. On en déduit que

$$p_F(\mathrm{Id}\,) = \frac{1}{\pi}(\mathrm{Id}\mid\sin)\sin + \frac{1}{\pi}(\mathrm{Id}\mid\cos)\cos$$

De plus, par intégrations par parties, les fonctions $t \mapsto t$, sin et cos étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;2\pi\,]$,

$$(\mathrm{Id}\mid\sin) = \int_0^{2\pi} t\sin(t)\mathrm{d}t = [-t\cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t = -2\pi$$
$$(\mathrm{Id}\mid\cos) = \int_0^{2\pi} t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin t = 0$$

D'où $p_F(\mathrm{Id}\,) = -2\sin$.

Distance

Soient (E, φ) un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x un point de E. L'ensemble $\{d(x,y)/\ y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (F est non vide), minorée par 0. Elle admet par conséquent une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On appelle *distance de x au sous-espace vectoriel F* et on note $d(x,F)$ cette borne inférieure.

$$\boxed{d(x,F) = \operatorname*{Inf}_{y\in F} d(x,y) \in \mathbb{R}_+}$$

1. $d(x,F)$ est un minimum.
2. Ce minimum est atteint en $p_F(x)$: $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$.
3. Ce minimum est atteint uniquement en $p_F(x)$.