Chapitre E1. Signaux périodiques : spectre et filtrage

En acoustique, un son complexe est composé d'une multitude d'harmoniques réparties sur un large spectre de fréquences. Il est possible d'isoler certaines bandes de fréquences (sons graves, médiums, aigus) afin de leur appliquer un traitement spécifique. Les égaliseurs professionnels les plus perfectionnés peuvent isoler et traiter des bandes de fréquences très étroites, ce qui permet par exemple, d'atténuer ou au contraire de renforcer la "présence" d'un instrument de musique, d'une voix…

INTRO :

Le filtrage est une opération essentielle dans le traitement des signaux.

Tout **signal périodique** de pulsation ω peut s'écrire comme la somme d'une valeur moyenne et de composantes sinusoïdales de pulsations $\omega_n = n.\omega$ avec n un naturel > 0 : **développement en série de Fourier / décomposition spectrale**.

On appelle « **filtre** » un système capable de **sélectionner** certaines composantes d'un signal analogique périodique.

On se limite aux filtres **linéaires**. On peut alors déterminer l'effet du filtre sur un signal en s'appuyant sur sa décomposition spectrale : le spectre du signal filtré comporte autant ou moins de fréquences que le signal d'origine (il y a absence d' « enrichissement spectral »).

Buts de ce chapitre : Commenter le spectre d'un signal périodique ; Décrire et prévoir l'effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique ; Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur.

Prérequis :

MPSI/MP2I : Décomposition spectrale de signaux physiques périodiques ; Filtrage linéaire.

Plan du chapitre :

A) Décomposition spectrale d'un signal périodique

On s'intéresse à des signaux périodiques de période T, de fréquence $f = \frac{1}{T}$ et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

1) Grandeurs associées à un signal périodique

DEFINITIONS :
Soit un signal périodique $u(t)$ de période T :
La **VALEUR MOYENNE** de $u(t)$ est notée $< u >$ et est définie par :

$$\boldsymbol{< u >= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt}$$

Pour caractériser « l'ampleur » du signal $u(t)$, on introduit la **VALEUR EFFICACE** de $u(t)$, définie par :

$$\boxed{\boldsymbol{U_{eff} = \sqrt{< u^2 >} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) \cdot dt}}}$$

Cas particuliers :

◆ Signaux *purement* sinusoïdaux

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi) \qquad ou \qquad u(t) = U\sin(\omega t + \varphi)$$

La valeur moyenne d'un signal *purement* sinusoïdal est nulle :

$$\boxed{\boldsymbol{< U\cos(\omega t + \varphi) >= 0 =< U\sin(\omega t + \varphi) >}}$$

La valeur efficace d'un **signal *purement* sinusoïdal** est telle que $\boxed{\boldsymbol{U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}}}$

NB : $< \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2} =< \sin^2(\omega t + \varphi) >$

➲ Démonstration à connaître : Etablir les résultats ci-dessus.

◆ Signaux sinusoïdaux *avec composante continue*

$$u(t) = U_0 + U\cos(\omega t + \varphi) \qquad ou \qquad u(t) = U_0 + U\sin(\omega t + \varphi)$$

La **valeur moyenne** d'un signal sinusoïdal avec une **composante continue** U_0 vaut U_0 :

$$\boxed{\boldsymbol{< U_0 + U\cos(\omega t + \varphi) >= U_0 =< U_0 + U\sin(\omega t + \varphi) >}}$$

La valeur efficace d'un tel signal vérifie : $U_{eff} = \sqrt{{U_0}^2 + \frac{U^2}{2}}$

NB *:* Pour un signal $u(t) = U_0 + U\cos(\omega t + \varphi)$ ou $u(t) = U_0 + U\sin(\omega t + \varphi)$, un **multimètre** indique :

- U_0 (valeur moyenne) en mode DC ;
- U_{eff} en mode AC + DC (= TRMS) ;
- $\frac{U}{\sqrt{2}}$ en mode AC (= RMS).

2) Décomposition spectrale

a) Développement en série de Fourier

Soit un signal $\boldsymbol{u(t)}$ **périodique, de forme quelconque, de période** $\boldsymbol{T}$ **et de fréquence** $\boldsymbol{f = \frac{1}{T}}$. Ce signal peut s'écrire comme la **somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de la fréquence** $\boldsymbol{f}$ de $u(t)$.
On parle de **développement en série de Fourier** :

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

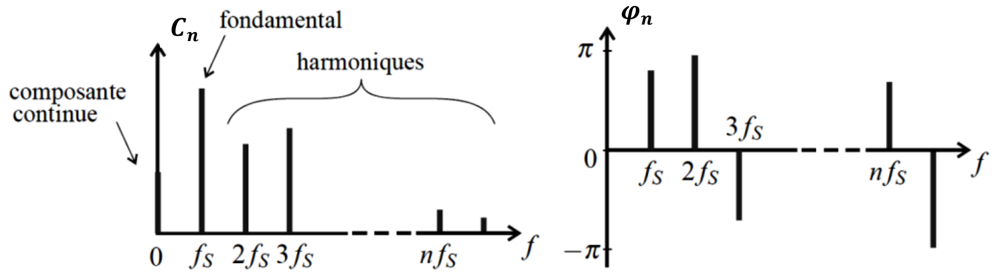
Avec
◆C_0 : **COMPOSANTE CONTINUE** du signal $u(t)$.
◆C_1 : amplitude de la **COMPOSANTE FONDAMENTALE** de fréquence $f_1 = f$ = fréquence fondamentale.
◆ Pour $n > 1$, C_n : amplitude de la **COMPOSANTE HARMONIQUE D'ORDRE** $\boldsymbol{n}$ de fréquence $\boldsymbol{f_n = n \cdot f}$ = fréquence harmonique d'ordre n.
◆φ_n : la **phase initiale** de la composante fondamentale pour $n = 1$ ou de la composante harmonique d'ordre n pour $n > 1$.
On peut aussi donner le développement en série de Fourier en terme de **pulsations** avec :
$\boldsymbol{\omega_1 = \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$ = pulsation fondamentale et $\boldsymbol{\omega_n = n \cdot \omega}$ = pulsation harmonique d'ordre n.

Rq : cf complément p.12 pour une autre forme du développement en série de Fourier.

b) Analyse spectrale

L'analyse spectrale est l'opération qui consiste à **décomposer en série de Fourier un signal** donné.
Le résultat d'une analyse spectrale est donné sous la forme de deux **graphiques** :
- le **spectre d'amplitude** de coordonnées (f_n, C_n) (ou (ω_n, C_n)): cela permet de rendre compte de l'importance relative des différents harmoniques présents dans le signal ;
- le **spectre de phase** qui représente les points de coordonnées (f_n, φ_n) : cela permet d'identifier le déphasage entre les différents harmoniques.

Ex :



NB : C'est généralement le **spectre en amplitude** qui est le plus intéressant. C'est celui que l'on obtient avec les logiciels de traitement de données classiques (ex : Latis Pro, Regressi).

c) Signification physique – Rôle des différentes composantes

◆ Composante continue :
On a $\boldsymbol{< u > = C_0}$
La **composante continue** correspond donc à la **valeur moyenne du signal**.
Dans le spectre, c'est la **composante de fréquence nulle**.

◆ Composante fondamentale :

$$C_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1)$$

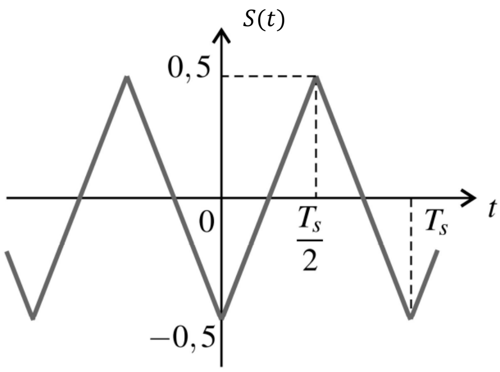
Elle **oscille à la fréquence** $\boldsymbol{f}$ **du signal** $\boldsymbol{u(t)}$.

◆ Composante harmonique de rang n :

$$C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

Elle **oscille à la fréquence $f_n = n.f$** avec f la fréquence du signal $u(t)$**.**

On analyse 2 exemples pour attribuer aux différentes composantes, selon leur rang, le rôle qu'elles jouent dans la forme du signal.

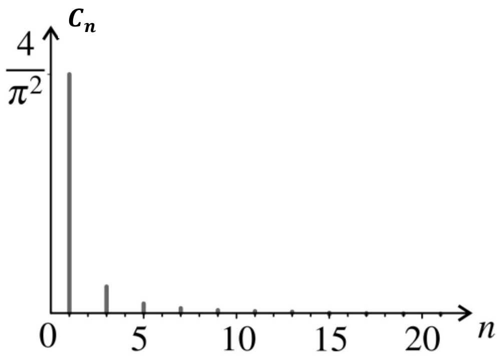


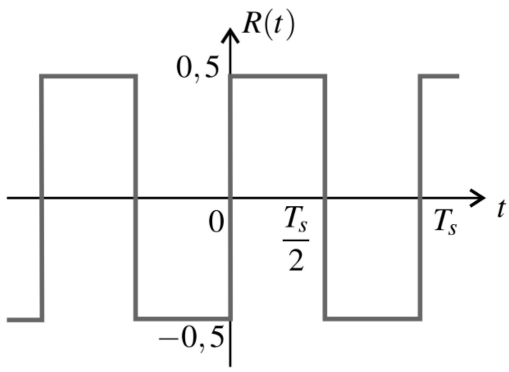
Signal triangulaire

$$S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

$C_n = 0$ pour n pair et $\boldsymbol{C_n = \frac{8E}{\pi^2 n^2}}$ pour $\boldsymbol{n}$ **impair**

avec E l'amplitude du signal, ici $E = 0{,}5\ V$



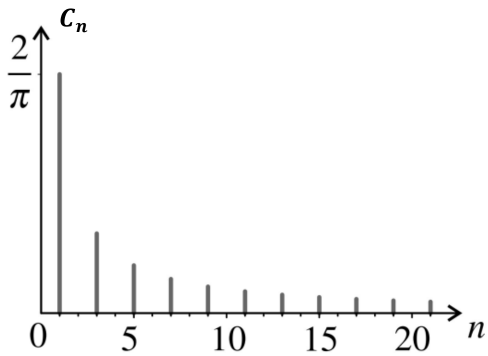


Signal créneau

$$R(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

$C_n = 0$ pour n pair et $\boldsymbol{C_n = \frac{4E}{\pi n}}$ pour $\boldsymbol{n}$ **impair**

avec E l'amplitude du signal, ici $E = 0{,}5\ V$

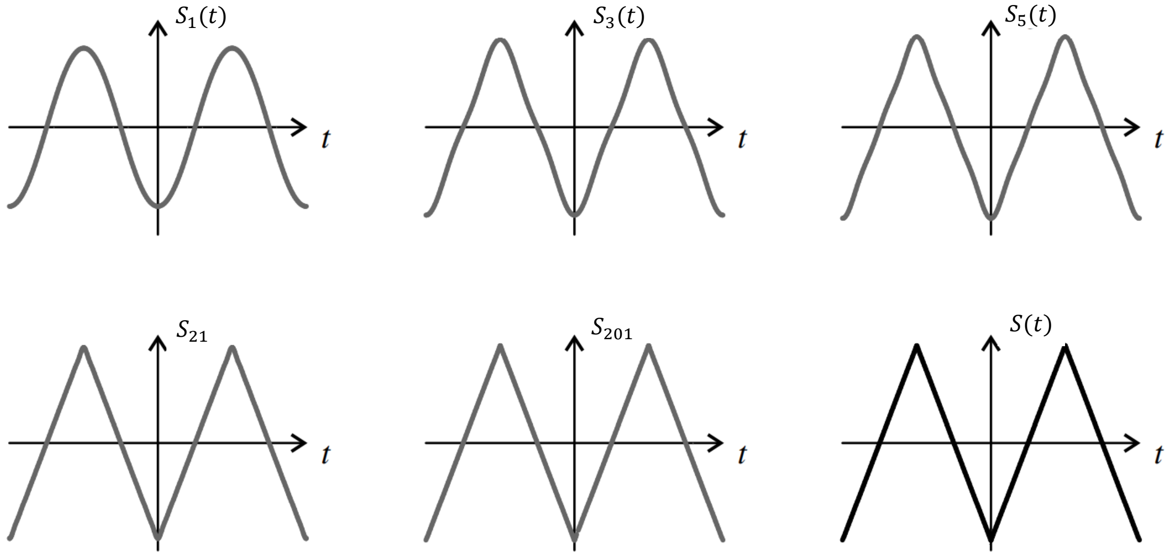


Le spectre en amplitude du signal créneau est beaucoup plus riche en harmoniques que celui du signal triangle. En effet, C_n décroît plus « lentement » pour le signal créneau : en $\frac{1}{n}$ et non en $\frac{1}{n^2}$.

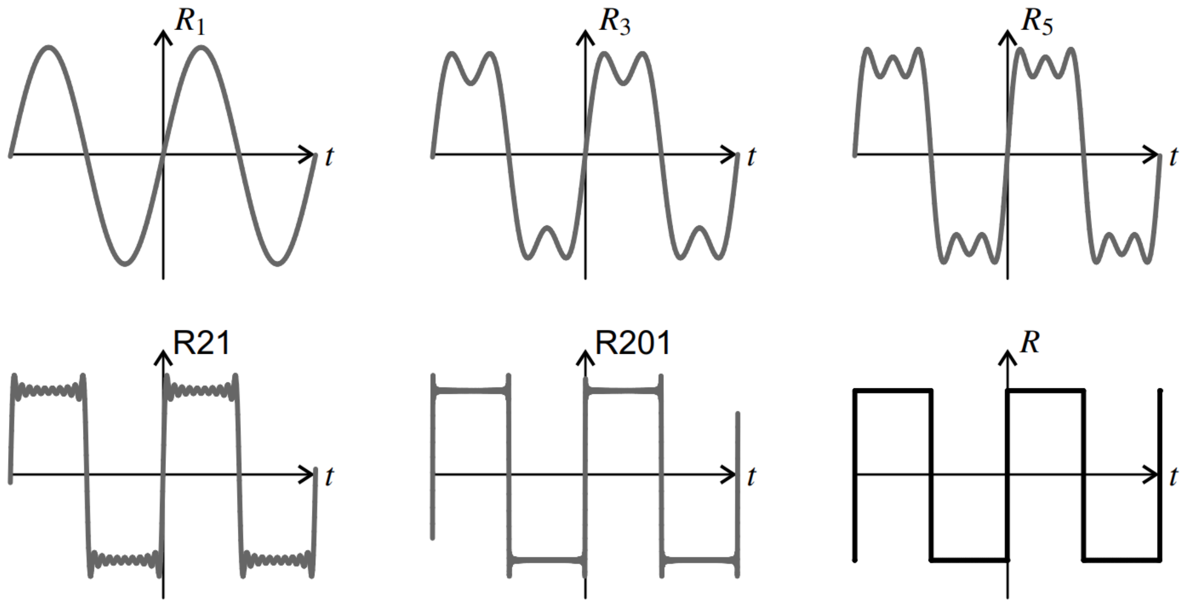
Les graphiques suivants représentent les sommes partielles de la série de Fourier de chaque signal :

$$u_N(t) = \sum_{n=1}^{N} (C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

On reconstruit progressivement les signaux $S(t)$ et R(t) au fur et à mesure que l'on additionne leurs composantes harmoniques.
Alors qu'on constate peu de différences entre $S_{21}(t)$ et $S(t)$, le signal $R_{21}(t)$ est assez différent de $R(t)$.
Cela est dû au fait que le signal créneau présente des variations temporelles brutales (discontinuités).



Sommes partielles pour le signal triangle



Sommes partielles pour le signal créneau

BILAN :
La composante **fondamentale** donne la **variation temporelle générale du signal**.
La composante **fondamentale** et les **premiers harmoniques** dessinent la **forme du signal**.
C'est en tenant compte des **harmoniques de rang élevé** que l'on obtient les **détails fins** et les **discontinuités** éventuelles du signal.

B) Filtrage linéaire – Effet sur un signal périodique

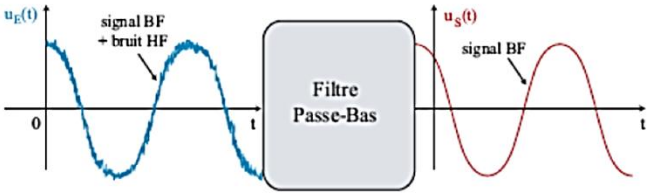
1) Définitions et représentation symbolique

a) Principe du filtrage

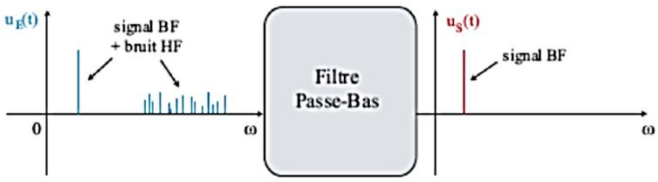
Lorsque l'on **filtre** un signal, on le modifie en **atténuant certaines composantes de son spectre** en fréquence.
Le filtre atténue / conserve (voire amplifie) certaines composantes d'un signal **selon leur fréquence**.

Ex :

Evolutions temporelles des signaux d'entrée et de sortie

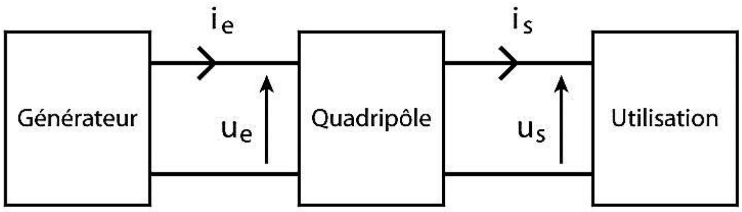


Spectres des signaux d'entrée et de sortie



b) Linéarité et ordre

Considérons un filtre soumis à une excitation $e(t)$ et notons $s(t)$ sa réponse. Ce filtre est assimilé à un quadripôle comportant deux bornes d'entrée reliées au générateur (fournissant $e(t)$) et deux bornes de sortie reliées au réseau d'utilisation (recevant $s(t)$).
La plupart du temps, on s'intéresse au cas où l'utilisation a une impédance d'entrée infinie (oscilloscope par exemple). On dit alors que **l'étude du filtre se fait en sortie ouverte** car $i_s(t) = 0$. Dans ce cas, le signal d'entrée est la tension $u_e(t)$ et le signal de sortie est la tension $u_s(t)$.



◆ Un filtre est **LINEAIRE** si le signal d'entrée $e(t)$ (= signal d'origine) et le signal de sortie $s(t)$ (= signal filtré) sont reliés par une équation différentielle **LINEAIRE** à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \cdots + a_p \frac{d^p s(t)}{dt^p} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

◆ L'**ORDRE** du filtre est l'ordre de dérivation **le plus élevé**$(= max(p, m))$ dans l'équation différentielle associée au filtre.

Conséquences de la linéarité :

(1) **PRINCIPE DE SUPERPOSITION** :

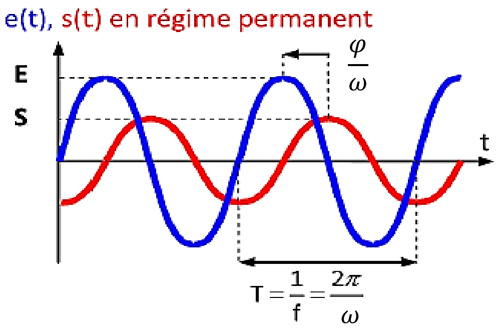
Si $s_1(t)$ est la réponse du filtre à $e_1(t)$ et $s_2(t)$ est la réponse du filtre à $e_2(t)$ alors :
$[\alpha . s_1(t) + \beta . s_2(t)]$ est la réponse du filtre à $[\alpha . e_1(t) + \beta . e_2(t)]$

(2) **REPONSE HARMONIQUE** :

Si $e(t)$ est sinusoïdal de fréquence f alors $s(t)$ est sinusoïdal de fréquence f (→ **RSF**).

⟹Le **spectre de $s(t)$** comporte **autant ou moins de fréquences que celui de $e(t)$.**

2) Fonction de transfert en RSF



Soit un signal d'entrée sinusoïdal : $e(t) = E\cos(\omega t)$ et $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ la réponse d'un filtre linéaire.

On introduit les signaux complexes associés : $\underline{e} = Ee^{j\omega t}$ et $\underline{s} = Se^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S}e^{j\omega t}$.

La **FONCTION DE TRANSFERT** (complexe) du filtre est :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{\underline{\boldsymbol{s}}}{\underline{\boldsymbol{e}}}$$

La fonction de transfert contient toutes les informations utiles sur les effets du filtre :

- L'**amplification ou l'atténuation** de l'amplitude de $s(t)$ par rapport à $e(t)$. Le module de la fonction de transfert est appelé **GAIN** :

$$\boldsymbol{G} = |\underline{\boldsymbol{H}}| = \frac{\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{E}}$$

G dépend des paramètres du filtre et de $\omega \Longrightarrow S$ dépend de $\omega \Longrightarrow$ opération de filtrage !

- Le **déphasage** de de $s(t)$ par rapport à $e(t)$. L'argument de la fonction de transfert est appelé **PHASE** :

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{arg}(\underline{\boldsymbol{H}})$$

Rq : On a les équivalences :

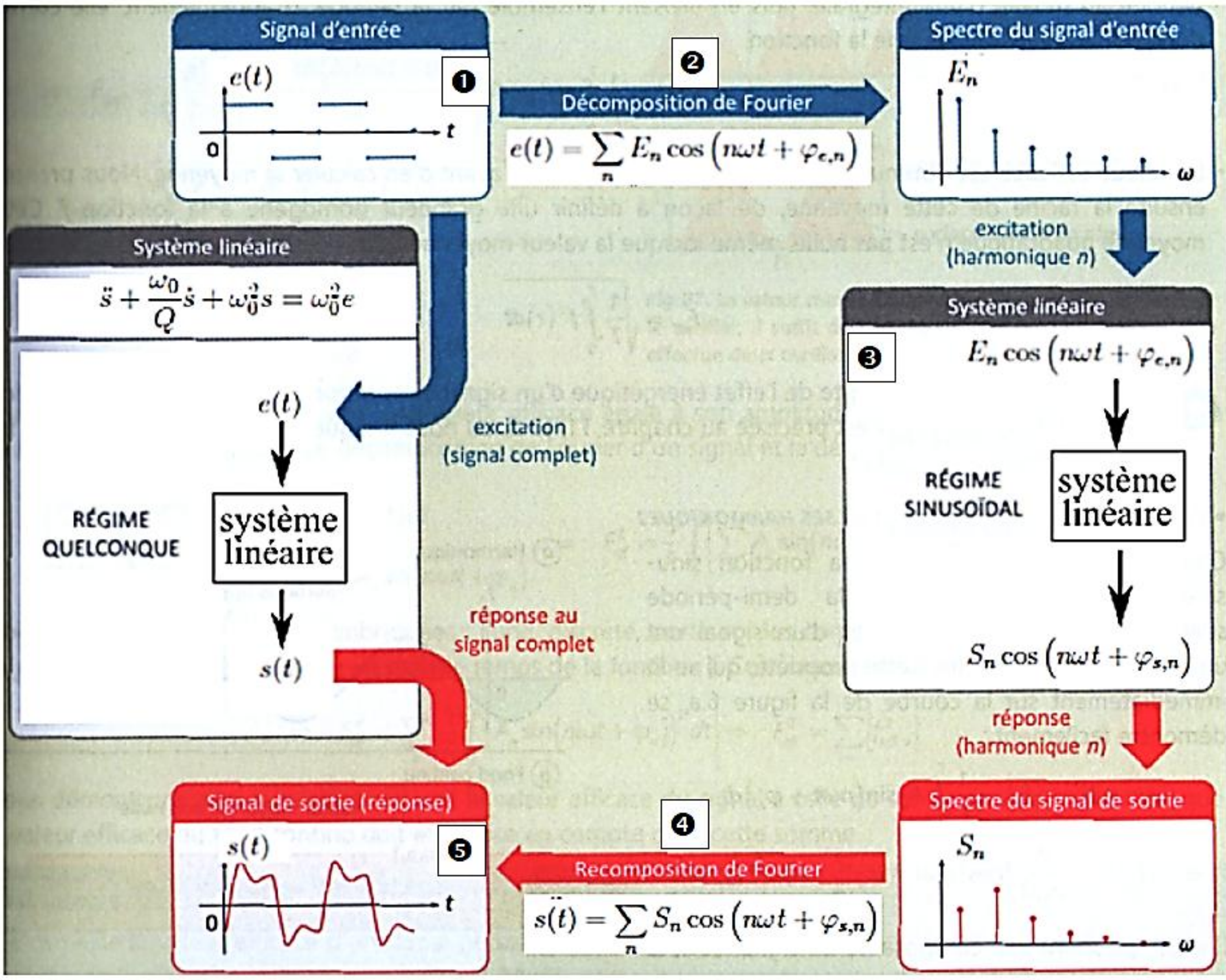
Domaines	**Temporel**	**Laplace**	**Fréquentiel**
« Equivalence »	$\frac{d}{dt}$	p	$j\omega$
Caractéristique du filtre	Equation différentielle	Fonction de transfert $H(p)$	Fonction de transfert harmonique $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$

➲ Exercice classique : Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ associée à l'équation différentielle (E) :

$$a_0 s(t) + a_1\frac{ds(t)}{dt} + \cdots + a_p\frac{d^p s(t)}{dt^p} = b_0 e(t) + b_1\frac{de(t)}{dt} + \cdots + b_m\frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

3) Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique quelconque

<table>
<tr>
<td>
Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique</td>
<td>
Soit le signal d'entrée ❶ périodique de pulsation fondamentale ω.
Le filtre étant linéaire, on peut utiliser le principe de superposition.
① On décompose le signal d'entrée en série de Fourier❷ :
$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos(n\omega t + \varphi_{en}))$$
② On détermine le signal de sortie $S_n \cos(n\omega t + \varphi_{sn})$ correspondant à chaque composante du signal d'entrée $E_n \cos(n\omega t + \varphi_{en})$ en superposant le spectre du signal d'entrée au diagramme de Bode du filtre ❸.
Avec $S_n = |\underline{H}(\omega_n = n\omega)| \cdot E_n = G(\omega_n) \cdot E_n$ et $\varphi_{sn} = \varphi_{en} + \arg(\underline{H}(\omega_n = n\omega))$.
③ On reconstitue le signal de sortie total ❺ par synthèse de Fourier❹.
</td>
</tr>
</table>



On comprend ainsi tout l'intérêt de la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ d'un filtre linéaire car elle permet de connaître la réponse du filtre à n'importe quel signal d'entrée périodique :

$$e(t) = c_0 + c_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + c_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + c_3\cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \ldots$$

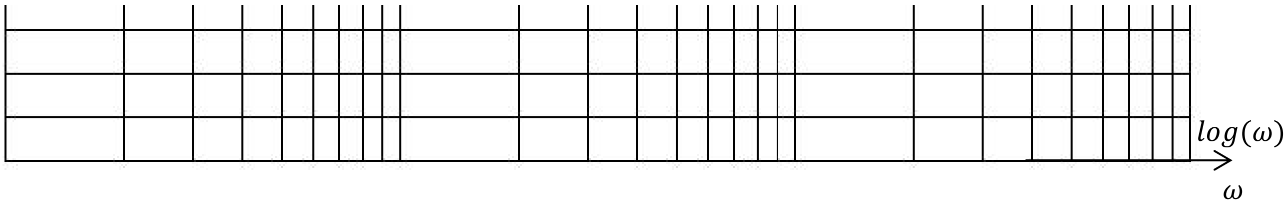
Filtre linéaire passif

$$s(t) = c_0|\underline{H}(\omega = 0)| + c_1|\underline{H}(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \varphi_1 + \arg(\underline{H}(\omega_0))) + c_2|\underline{H}(2\omega_0)|\cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \arg(\underline{H}(2\omega_0))) + c_3|\underline{H}(3\omega_0)|\cos(3\omega_0 t + \varphi_1 + \arg(\underline{H}(3\omega_0))) + \ldots$$

4) Représentation graphique des propriétés d'un filtre : Diagramme de Bode

a) Echelle logarithmique

On caractérise un filtre en donnant son comportement en fonction de la pulsation du signal d'entrée.
La **pulsation** des signaux utilisés en électricité **varient sur plusieurs ODG** (10 Hz à 10 MHz) donc à une échelle linéaire, on préfère une **échelle logarithmique** en pulsation ou en fréquence : $\log(\omega)\left(=\frac{\ln(\omega)}{\ln(10)}\right)$.



Une **DECADE** est un intervalle de pulsation $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ tel que :

$$\omega_{max} = 10 \cdot \omega_{min} \Leftrightarrow \log(\omega_{max}) = \log(\omega_{min}) + 1$$

b) Diagramme de Bode : définitions

Le gain $G = |\underline{H}|$ peut varier sur plusieurs ODG lorsque ω varie sur plusieurs ODG.

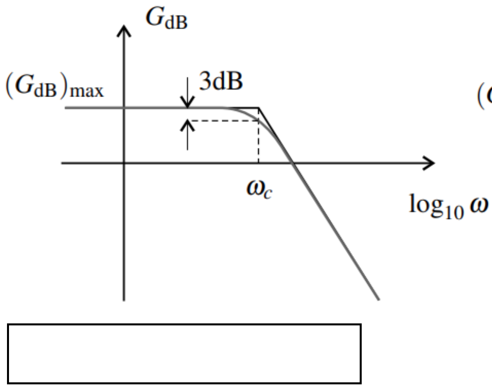
On introduit donc le **GAIN EN DECIBEL** :

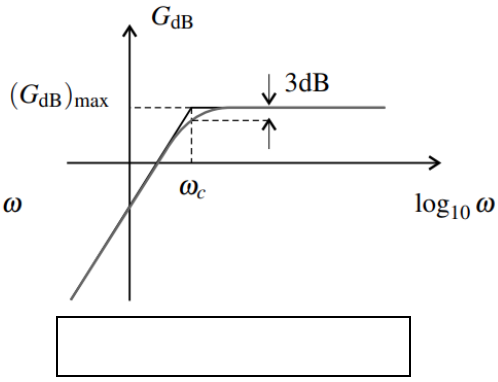
$$\boldsymbol{G_{dB} = 20 \cdot \log(G) = 20 \cdot \log(|\underline{H}|)}$$

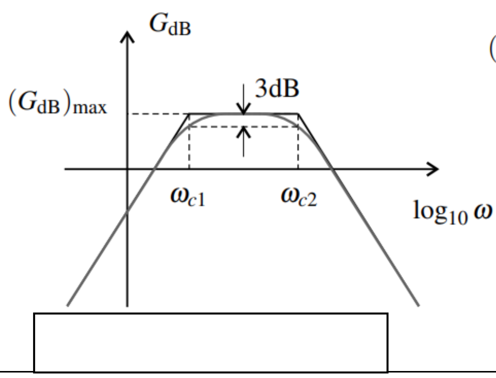
Le **DIAGRAMME DE BODE** est l'ensemble de 2 graphiques qui synthétisent les informations sur le filtre :
G_{dB} en fonction de $\log(\omega)$: **courbe de réponse en gain.**
φ en fonction de $\log(\omega)$: **courbe de réponse en phase** avec **φ**∈ [-**π**, **π**].

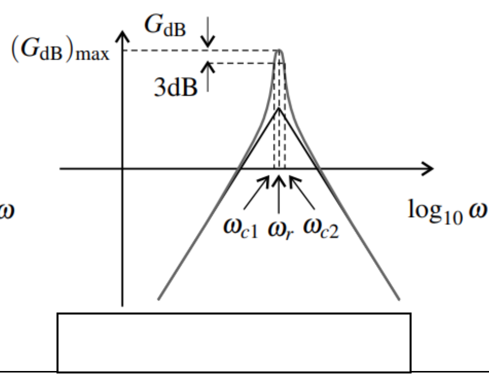
Rq : On peut aussi trouver en abscisses log(f) ou log(x) avec x la pulsation réduite du circuit.

Ex de diagrammes de Bode en gain pour des filtres de différentes natures :









c) Pulsation(s) de coupure – Bande passante à - 3 dB

◆ Une **PULSATION DE COUPURE à - 3 dB** ω_c est une pulsation telle que :

$$\boldsymbol{G(\omega_c)} = \frac{\boldsymbol{G_{max}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dB\,max} - 3dB$$

◆ La **BANDE PASSANTE à – 3 dB** est l'intervalle de pulsations (ou de fréquences) à l'intérieur duquel :

$$\boldsymbol{G(\omega)} \geq \frac{\boldsymbol{G_{max}}}{\boldsymbol{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) \geq G_{dB\,max} - 3dB$$

On note $\Delta\omega$ la largeur de la bande passante.
Les intervalles complémentaires de la bande passante sont appelés **bandes atténuées**.

d) Diagramme de Bode asymptotique

Les graphiques p.9 montrent des **zones rectilignes** qui correspondent aux **asymptotes** de la courbe $G_{dB}(\omega)$ pour $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$.

Un diagramme de Bode asymptotique est un diagramme simplifié où l'on trace seulement les asymptotes de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ à basse et haute fréquences. Il se déduit des **équivalents de la fonction de transfert** et son tracé est **préalable** au tracé du diagramme de Bode « exact ».

Dans les bandes atténuées, la courbe de gain a une asymptote oblique de pente $20.k\ dB/décade$ avec k un entier relatif.

e) Diagramme de Bode expérimental (cf TP)

Pour obtenir expérimentalement le diagramme de Bode d'un filtre (ou plus généralement d'un système linéaire), on mesure des **amplitudes et/ou des déphasages pour différentes fréquences** de la tension d'entrée.

On **balaye** d'abord en fréquence : on réalise les mesures pour **3 fréquences dans chaque décade** : 10, 20, 50 Hz, 100, 200, 500 Hz, 1, 2, 5 kHz,… en traçant le diagramme de Bode au fur et à mesure.

On **resserre** ensuite les mesures près des **fréquences de coupure / de résonance**.

f) Spectre du signal de sortie

Etant donné que le filtre est linéaire, le **spectre de $s(t)$** comporte **autant ou moins de fréquences que celui de $e(t)$.**

De façon approchée, les **fréquences de $e(t)$ situées dans la bande passante** du filtre sont **conservées** et les **fréquences de $e(t)$ situées dans la(les) bande(s) atténuée(s)** sont **éliminées**.

Une **étude plus fine** devra être menée pour des **fréquences de $e(t)$ proches de la(des) pulsation(s) de coupure du filtre**, cf § B.3.

5) Utilisation d'un filtre : moyenneur, intégrateur ou dérivateur

a) Définitions

Un filtre assure le rôle[1] de :

◆**MOYENNEUR** si la tension de sortie est proportionnelle à la valeur moyenne de la tension d'entrée ;

◆**INTEGRATEUR** si la tension de sortie est proportionnelle à la primitive de la tension d'entrée. La fonction de transfert d'un filtre intégrateur peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j\omega}} \text{ avec } k \text{ un réel}$$

◆**DERIVATEUR** si la tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée. La fonction de transfert d'un filtre dérivateur peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j\omega} \text{ avec } k \text{ un réel}$$

[1] Le filtre ne peut assurer l'un de ces rôles que **dans un certain domaine de fréquences** qui est fonction de sa (ou ses) pulsation(s) de coupure. En pratique :

- Soit un cahier des charges précise la fréquence du signal qui doit être moyenné, intégré ou dérivé, ce qui oriente le choix de f_c du filtre utilisé pour qu'il assure le rôle désiré.
- Soit on précise que le filtre assure le rôle désiré pour des signaux d'entrée de fréquences appartenant à un certain intervalle.

Equivalence en terme d'asymptote du diagramme de Bode en gain :

G_{dB} en fonction de $\log(\omega)$ a une asymptote de pente :

− 20 dB par décade dans le cas d'un **intégrateur** ;

+ 20 dB par décade dans le cas d'un **dérivateur.**

b) Conditions d'utilisations (cf TP)

Pour un signal d'entrée périodique quelconque de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:

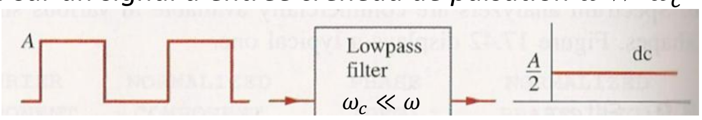
◆ Un filtre passe-bas joue le rôle de **moyenneur** si sa pulsation de coupure $\omega_c \ll \omega$: $100 \cdot \omega_c < \omega$.

◆ Un filtre passe-bas d'ordre 1 joue le rôle **d'intégrateur** si sa pulsation de coupure $\omega_c \ll \omega$: $10 \cdot \omega_c < \omega$.

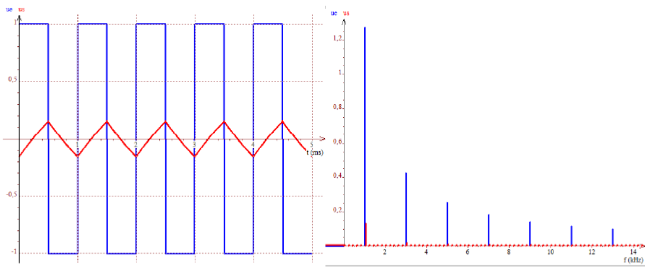
◆ Un filtre passe-haut d'ordre 1 joue le rôle de **dérivateur** si sa pulsation de coupure $\omega_c \gg \omega$: $\omega < \frac{\omega_c}{10}$.

Ex :

◆ *Effet d'un filtre passe-bas sur un signal d'entrée créneau de pulsation $\omega \gg \omega_c$*



◆ *Effet d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c = 100 Hz sur un signal d'entrée créneau de fréquence fondamentale f = 1 kHz.*



Annexe – Méthode pour l'étude des filtres linéaires *(Révisions MPSI-MP2I)*

 ***Prévoir la nature d'un filtre***	① A l'aide des **comportements asymptotiques** des condensateurs et des bobines, donner les **circuits équivalents à basse et haute fréquences**. ② Par association de dipôles et/ou ponts diviseurs, en déduire **l'expression de $\underline{s}$** en fonction de $\underline{e}$ et des données (R, L, C). ③ Si $\boldsymbol{\underline{s} \neq 0}$ **à BF et** $\boldsymbol{\underline{s} = 0}$ **à HF** alors c'est un filtre **passe-bas**. Si $\boldsymbol{\underline{s} = 0}$ **à BF et** $\boldsymbol{\underline{s} \neq 0}$ **à HF** alors c'est un filtre **passe-haut**. Si $\boldsymbol{\underline{s} = 0}$ **à BF et** $\boldsymbol{\underline{s} = 0}$ **à HF** alors c'est un filtre **passe-bande**. Si $\boldsymbol{\underline{s} \neq 0}$ **à BF et** $\boldsymbol{\underline{s} \neq 0}$ **à HF** alors c'est un filtre **coupe-bande**.

 ***Expression de la fonction de transfert d'un filtre***	① Représenter le circuit et flécher les tensions et les courants en notation complexe. ② Par association de dipôles et/ou ponts diviseurs, en déduire l'expression de $\underline{s}$ en fonction de $\underline{e}$ et des données (R, L, C). ③ En déduire l'expression de $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

 ***Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre***	① Déterminer l'expression de $\underline{H}$. ② Déterminer les **équivalents** de $\underline{H}$ à basse et haute fréquences. ③ En déduire les équivalents de $G = \lvert\underline{H}\rvert$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ à basse et haute fréquences. ④ Conclure sur les valeurs des droites asymptotiques horizontales ou sur les pentes des droites asymptotiques obliques des courbes de gain et de phase. *Vérifier la cohérence de ces résultats avec la nature du filtre !*

 ***Effet d'un filtre linéaire sur un signal périodique***	Soit un signal d'entrée périodique de pulsation fondamentale ω. ① On décompose le **signal d'entrée en série de Fourier**. ② On détermine le signal de sortie $S_n \cos(n\omega t + \varphi_{sn})$ correspondant à chaque composante du signal d'entrée $E_n \cos(n\omega t + \varphi_{en})$ en **superposant le spectre du signal d'entrée au diagramme de Bode** du filtre. ③ On reconstitue le signal de sortie total par **synthèse de Fourier**.

Complément mathématique :

En mathématiques, pour un signal $u(t)$ périodique de fréquence f, on utilise plus fréquemment le développement en série de Fourier sous la forme :

$$\boldsymbol{u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n f t) + B_n \sin(2\pi n f t))}$$

Avec

- C_0 : composante continue du signal $u(t)$ égale à sa valeur moyenne $C_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t) \cdot dt$.
- Les coefficients de Fourier

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \cos(2\pi n f t) \cdot dt \qquad et \qquad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cdot \sin(2\pi n f t) \cdot dt$$

Rq : si $u(t)$ est une fonction paire (resp^{t} impaire) alors les coefficients $B_n = 0$ (resp^{t} $A_n = 0$).