

# TD1 – Transformation infinitésimale – Révisions MPSI

## 0 Exercices classiques vus en cours :

**B.3.b** : Démonstration du théorème des moments

**B.3.c** : Justification de l'allure des courbes (iso-...) dans le diagramme des frigoristes

Capacités exigibles	Ch T1	Ex 1-8	Ex 9-12
Formulation des principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire. Utiliser avec rigueur les notations $d$ et $\delta$ en leur attachant une signification.	•	•	Révisions 1 <sup>e</sup> année

## Données pour l'ensemble des exercices :

♦ Expressions de l'entropie d'un gaz parfait :

$$* S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0 \quad * S(P, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

$$* S(T, P) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nR \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + S_0$$

♦ Expressions de l'entropie d'une phase condensée idéale :

$$S(T) = C \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S_0$$

Rq : Ces expressions se démontrent avec une identité thermodynamique (cf MPSI et ex 1).

## 1 Entropie d'un gaz parfait et loi de Laplace

On s'intéresse à un système formé de  $n$  moles de gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques  $\gamma$  est constant.

1) A partir d'une identité thermodynamique, établir l'expression de l'entropie de ce système sous la forme :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

Le système étudié subit une transformation adiabatique et réversible entre l'état initial ( $P_1, V_1, T_1$ ) et l'état final ( $P_2, V_2, T_2$ ).

2) Démontrer la loi de Laplace i.e. que, pendant la transformation, on a  $PV^\gamma = cste$ .

## 2 Irréversibilité créée par une hétérogénéité de pression

Dans un cylindre calorifugé, on place  $n$  moles de gaz parfait monoatomique, à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0$ , et on ferme l'enceinte par un piston lui aussi calorifugé, se déplaçant sans frottement, mais initialement bloqué. On note  $V_0$  le volume initial du cylindre. De l'autre côté du piston, l'atmosphère forme un pressostat à la pression  $P_1 = \frac{3}{2}P_0$ .

1. On libère le piston et on attend l'équilibre mécanique. Déterminer la pression finale  $P_f$ , le volume final  $V_f$  et la température finale  $T_f$  du gaz.

2. Exprimer la variation d'entropie du gaz. Commenter.

### 3 Sorbet maison

Une sorbetière est une machine permettant de fabriquer des glaces. La préparation (fruits, eau et sucre), sortie du réfrigérateur, est versée dans un bol sorti du congélateur. Ce bol contient une solution saline dont la fusion progressive permet de récupérer une grande quantité d'énergie à basse température, et donc de refroidir efficacement la préparation. Un petit moteur fait tourner une pale qui agite le mélange, jusqu'à la prise en glace.



On modélise l'ensemble de la façon suivante :

- ▷ la préparation de masse  $m$  est initialement liquide à  $0\text{ }^\circ\text{C}$ , elle commence à solidifier dès qu'elle est versée ;
- ▷ le bol de la sorbetière demeure à température constante  $T_0 = -15\text{ }^\circ\text{C}$  ;
- ▷ la température  $T$  du mélange est uniforme ;
- ▷ la puissance thermique échangée entre le mélange et le bol de la sorbetière s'écrit  $\mathcal{P} = \alpha(T - T_0)$  ;
- ▷ les échanges thermiques avec l'air sont négligés pour simplifier.

On note  $c$  la capacité thermique massique de la glace, et  $\Delta_{\text{fus}}h$  son enthalpie de fusion.

- 1 - Quelle est la durée nécessaire à ce que le mélange solidifie complètement ?
- 2 - La glace est meilleure à déguster à  $T^* = -8\text{ }^\circ\text{C}$ . Combien de temps supplémentaire faudra-t-il patienter une fois la glace totalement solidifiée avant de se régaler ?

### 4 Détendeur de plongée

L'air des bouteilles de plongée sous-marine est stocké sous forme de gaz comprimé, en équilibre thermique avec l'eau environnante supposée à  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . À l'aide d'un système complexe de membrane déformable et de ressort, un détendeur fait circuler l'air au travers d'un mince étranglement en lui faisant subir une détente isenthalpique et adiabatique. Pour la plongée, un détendeur primaire placé sur la bouteille assure une première détente de l'étage haute pression (200 bar, point 1) vers l'étage moyenne pression (10 bar, point 2), où l'air retrouve l'équilibre thermique avec l'eau (point 3). Un second détendeur, placé au niveau de la bouche du plongeur, assure la détente vers la basse pression (1 bar, point 4). Le plongeur inhale environ  $0,5\text{ L}$  d'air par inspiration.

Donnée : masse molaire de l'air  $29\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- 1 - Représenter l'évolution subie par l'air sur le diagramme de la figure 3.
- 2 - Montrer que la première détente s'accompagne d'une forte baisse de température. Qu'aurait donné le modèle du gaz parfait ? Quel aspect du diagramme permet d'anticiper que ce modèle n'est pas valable ?
- 3 - En pratique, le plongeur ne ressent pas de sensation d'air froid lors de l'inspiration. Expliquer.
- 4 - À quel point le modèle du gaz parfait est-il le mieux vérifié ? En raisonnant en ce point, déterminer la masse d'air inhalée à chaque inspiration.

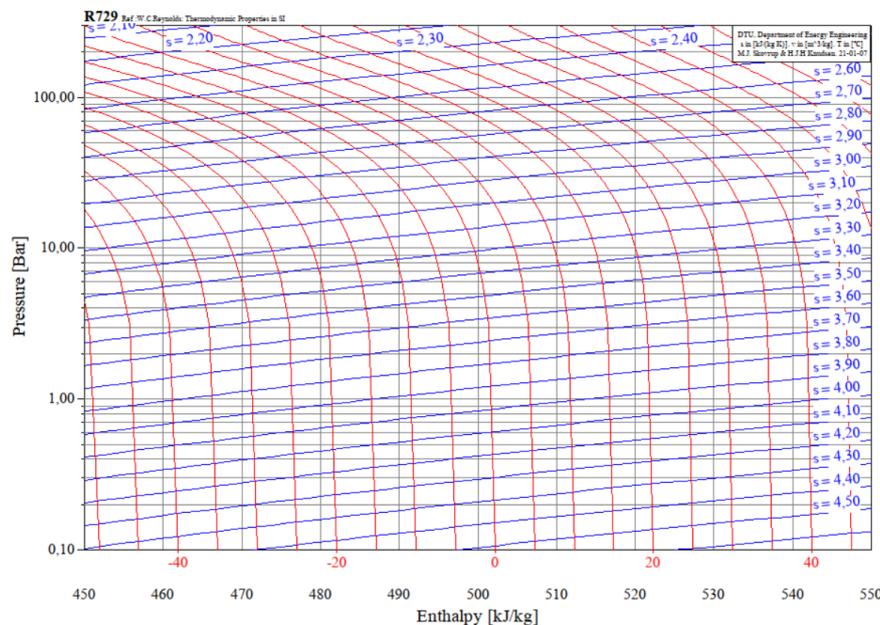
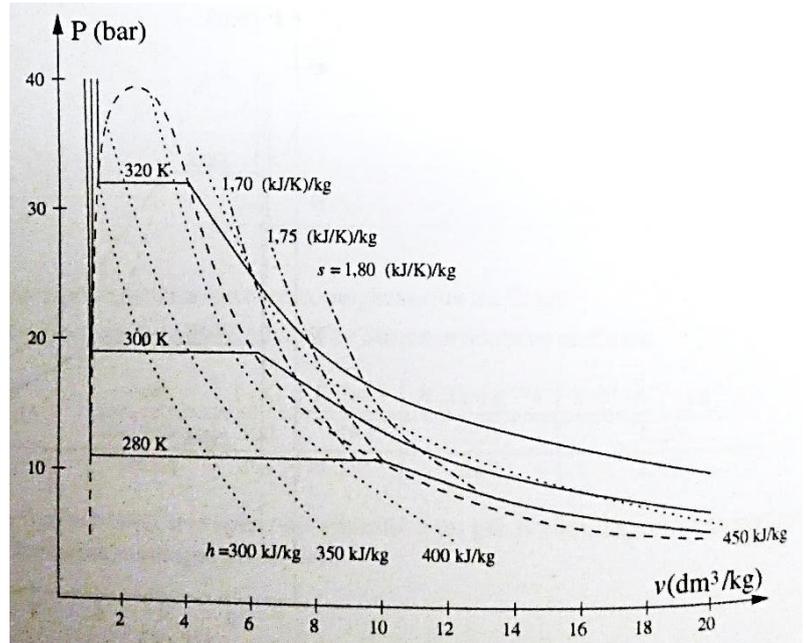


Figure 3 – Diagrammes des frigorigènes de l'air.  $T$  en  $^\circ\text{C}$ ,  $s$  en  $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## 5 ✍ Détente isenthalpique d'un fluide – Exploitation du diagramme de Clapeyron

Un fluide à l'état d'ébullition à la température initiale  $T_i = 320$  K subit une détente isenthalpique jusqu'à une pression finale  $P_f = 11$  bar. Voici le diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ) de ce fluide.

- 1) Déterminer la température finale  $T_f$ .
- 2) Déterminer le titre massique final en vapeur  $x_f$ .
- 3) En déduire la capacité thermique massique  $c$  de ce fluide à l'état liquide, supposée indépendante de la température.  
*Aide : On considèrera pour cela une transformation fictive entre l'état initial et l'état final.*



### Donnée :

Enthalpie de vaporisation du fluide étudié à 280 K :  $\Delta h_{vap} = 215 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

## 6 ✍ Table thermodynamique incomplète

Un extrait incomplet de la table des grandeurs thermodynamiques relatives à l'eau à saturation est donné figure 6.  $T$  est la température et  $P_s$  la pression de vapeur saturante à la température  $T$ . Les grandeurs notées « prime » (') sont relatives au liquide saturant, et les grandeurs notées « seconde » (") sont relatives à la vapeur saturante.  $l_{vap}$  et  $s_{vap}$  désignent respectivement la chaleur latente et l'entropie massique de vaporisation.

- 1 - Rappeler l'allure du diagramme des phases ( $P, T$ ) de l'eau. Quelles sont les limites de la courbe de vaporisation ? En déduire d'après la table la température et la pression au point triple et au point critique.
- 2 - Rappelez la relation entre  $h'$ ,  $h''$  et  $l_{vap}$  ainsi que celle entre  $s'$ ,  $s''$  et  $s_{vap}$ .
- 3 - Quelle est, d'après la table, l'origine des entropies massiques ? Commenter.
- 4 - Rappelez la relation entre l'énergie interne massique  $u$ , l'enthalpie massique  $h$ , la pression  $P$  et le volume massique  $v$ . Justifier alors qu'il ne soit pas nécessaire d'ajouter à la table les valeurs de  $u'$  et  $u''$ .
- 5 - Compléter les cases vacantes du tableau.

$T$ °C	$P_s$ kPa	$v'$ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	$v''$ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$	$h'$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	$h''$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	$l_{vap}$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$	$s'$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$s''$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	$s_{vap}$ $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
0,01	0,6117	0,001000	206,14	0,01	2500,9	2500,9	0,000	9,1556	9,1556
20	2,3392	0,001002	57,762	83,915	?	2453,5	0,2965	8,6661	8,3696
40	7,3851	0,001008	19,515	167,53	2573,5	2406,0	?	8,2556	7,6832
60	19,947	0,001017	7,6670	251,18	2608,8	2357,7	0,8313	?	?
80	47,416	0,001029	3,4053	335,02	2643,0	2308,0	1,0756	7,6111	6,5355
100	101,42	0,001043	1,6720	419,17	2675,6	2256,4	1,3071	7,3542	6,0470
200	1554,9	0,001157	0,1272	852,26	2792,0	1939,8	2,3305	6,4302	4,0997
374,14	22090	0,003106	?	?	2084,3	?	4,4070	?	0

Figure 6 – Extrait de table incomplet.

## 7 Transformations polytropiques d'un gaz parfait

Un échantillon de gaz parfait, de masse molaire  $M$  et rapport des capacités thermiques  $\gamma$ , subit une transformation au cours de laquelle sa pression  $P$  et son volume massique  $v$  suivent la loi dite polytropique :  $Pv^k = \text{cte}$ , où  $k$  est une constante. La transformation est de plus mécaniquement réversible : à chaque instant la pression extérieure  $P_{\text{ext}}$  et la pression du gaz  $P$  sont égales.

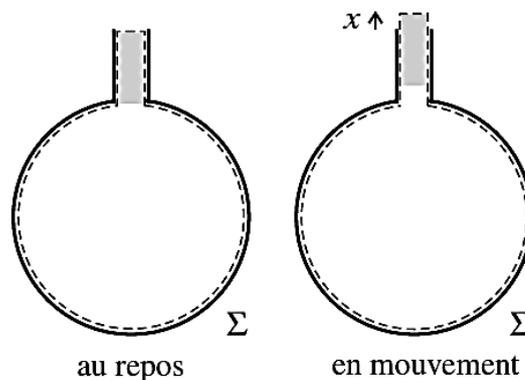
1. Trouver une loi de la forme  $f(v, T) = \text{cte}$  vérifiée au cours de cette transformation. En déduire une relation entre  $\frac{dv}{v}$  et  $\frac{dT}{T}$ .
2. Exprimer le transfert thermique massique élémentaire  $\delta q$  entre deux états très proches en fonction de la différence de température  $dT$  et des caractéristiques du gaz.

## 8 Résonateur de Helmholtz

Un résonateur de Helmholtz est constitué par une sphère de volume  $V_0$  reliée à un conduit cylindrique de longueur  $h$  et section  $A$ . L'air contenu dans le résonateur est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M$  et rapport des capacités thermiques  $\gamma$ . On se propose d'étudier un mode de vibration du résonateur tel que :

- l'air contenu dans le conduit se déplace en bloc (comme si c'était un bouchon solide) d'une très petite longueur  $x$ , algébrique et comptée positivement vers l'extérieur du résonateur (voir figure),
- l'air contenu dans le résonateur n'a pas d'échange thermique avec l'extérieur.

On appelle  $P_0$  et  $T_0$  la pression et la température de l'air atmosphérique et  $P$  et  $T$  la pression et la température dans le résonateur.



1. Exprimer la masse  $m$  d'air dans le conduit et la quantité d'air  $n$  dans la sphère lorsque le résonateur est au repos en fonction de  $h, A, V_0, M, P_0$  et  $T_0$ .
2. En négligeant la variation d'énergie interne de l'air du conduit et la variation d'énergie cinétique de l'air dans la sphère, montrer que l'application du premier principe au système fermé  $\Sigma = \{\text{gaz dans le résonateur au repos}\}$  mène à la relation :  $\frac{nR}{\gamma-1}dT + m\ddot{x}dx = -P_0Adx$ .
3. De même, établir la relation :  $\frac{nR}{\gamma-1}dT = -PAdx$ .
4. Montrer que  $\frac{Adx}{V_0 + Ax} = -\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$  puis que  $\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{Adx}{V_0 + Ax}$ . Exprimer  $P$  au premier ordre en  $x$ , en fonction de  $P_0, V_0, A$  et  $x$ .

5. Montrer que :  $m\ddot{x} = -\frac{\gamma P_0 A^2}{V_0}x$ . Quelle est la fréquence  $f_0$  du mode d'oscillation étudié ?

6. On indique que la vitesse du son dans l'air est  $c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$ . Exprimer la longueur d'onde  $\lambda_0$  d'une onde sonore de fréquence  $f_0$  en fonction de  $V_0$ ,  $A$  et  $h$ .

7. *Application numérique* : la sphère a un rayon  $r = 6,0\text{cm}$ , le conduit est un cylindre de rayon  $a = 1,0\text{cm}$  et hauteur  $h = 4,0\text{cm}$ ,  $M = 0,029\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,314\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Calculer  $\lambda_0$ . Commenter la valeur trouvée.

---

## 9 Calorimétrie : détermination d'une capacité thermique (Révisions MPSI)

Afin de mesurer la capacité thermique massique du cuivre, on propose d'utiliser la méthode des mélanges. On dispose d'une pièce de cuivre de masse  $m_2$  et d'un calorimètre de masse en eau  $m_c$ .

On introduit une masse  $m_1$  d'eau à température ambiante dans le calorimètre et on attend 15 minutes la mise à l'équilibre thermique de l'ensemble. Parallèlement, on immerge l'échantillon de cuivre dans un bécher rempli d'eau placé sur l'agitateur chauffant. On chauffe l'ensemble en agitant jusqu'à la température  $T_2$ . La géométrie de l'échantillon de cuivre permet de faire l'hypothèse que l'équilibre thermique entre le solide et l'eau dans laquelle il est plongé est très rapidement atteint.

Lorsque la température  $T_2$  est atteinte, l'échantillon de cuivre est sorti du bain chaud, et plongé immédiatement dans le calorimètre. On ferme alors le calorimètre avec son couvercle isolant.

Avant l'ajout de l'échantillon de cuivre, le calorimètre et son contenu sont à la température  $T_1$ .

Une fois l'échantillon ajouté, on mesure au bout de 5 minutes la température d'équilibre  $T_f$ .

➤ On note  $c$  la capacité thermique massique du cuivre, et  $c_{\text{eau}(l)}$  celle de l'eau liquide. Exprimer  $c$  en fonction de  $c_{\text{eau}(l)}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_f$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_c$ .

## 10 Calorimétrie : mesure de l'enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C (Révisions MPSI)

On décrit ci-après un protocole expérimental permettant de mesurer l'enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C, notée  $L_{\text{fus}}(0^\circ\text{C})$ .

Pour cela, on utilise en particulier un calorimètre et une résistance chauffante.

Le calorimètre, de valeur en eau  $\mu$ , contient au départ une masse  $m_1$  d'eau liquide, l'ensemble {calorimètre + résistance chauffante + eau liquide} étant à l'équilibre à la température  $T_1$ .

Puis on introduit dans le calorimètre une masse  $m_g$  de glace à la température  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ .

Simultanément, on alimente la résistance chauffante en maintenant une tension constante  $U$  à ses bornes.

On attend que la glace ait complètement fondu et on chauffe encore un peu jusqu'à atteindre la température  $T_2$ . On mesure  $\tau$  la durée pendant laquelle la résistance chauffante est alimentée.

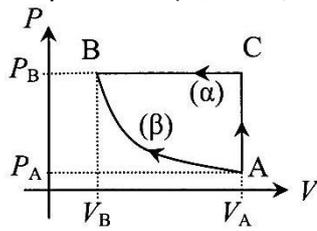
➤ On note  $c_{\text{eau}(l)}$  la capacité thermique massique de l'eau liquide. Exprimer  $L_{\text{fus}}(0^\circ\text{C})$  en fonction de  $c_{\text{eau}(l)}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_0$ ,  $m_1$ ,  $m_g$ ,  $\mu$ ,  $U$ ,  $\tau$  et  $R$ .

Rq sur les exercices 9 et 10 :

- \* On rappelle que la masse en eau ou valeur en eau du calorimètre est définie comme le rapport entre sa capacité thermique et la capacité thermique massique de l'eau liquide.
- Cf TP pour un autre exemple d'expérience de calorimétrie axé sur la thermochimie.

## 11 Transformations d'un gaz parfait (Révisions MPSI)

On fait passer une certaine quantité de gaz parfait d'un état d'équilibre A ( $P_A, V_A, T_A$ ) à un autre état d'équilibre B ( $P_B = 3P_A, V_B, T_B$ ) par deux chemins distincts :



- $\alpha$  : isochore AC puis isobare CB ;
- $\beta$  : isotherme réversible AB.

1) Déterminer  $T_B$  et  $V_B$  ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz au cours des transformations  $\alpha$  et  $\beta$ . Commenter les résultats obtenus.

2) Déterminer les variations d'entropie du système au cours de chaque étape de la transformation  $\alpha$  puis au cours de la transformation  $\beta$ . Commenter.

## 12 Ensemble de 2 enceintes d'après oral CCINP Galot 2023 (Révisions MPSI)



On considère 2 enceintes a et b, de volume total  $2V$ , séparées par une paroi bougeant sans frottement.

Chaque enceinte contient  $n$  mol d'un gaz supposé parfait, et les parois sont athermanes.

L'enceinte a contient une résistance chauffante.

A l'instant  $t=0$ , les deux enceintes ont même volume  $V$ , sont à la même pression  $P_0=1.0$  bar température  $T_0=300$  K.

On atteint un état d'équilibre après un instant  $\tau$ .

A  $t=\tau$ , l'enceinte est à l'état ( $P_{a2}, V_{a2}, T_{a2}$ ) (et l'enceinte b ( $P_{b2}, V_{b2}, T_{b2}$ )), où  $P_{a2}=2*P_0$ . On considère la transformation lente.

- a) Déterminez  $P_{b2}, V_{b2}$  et  $T_{b2}$ .
- b) En déduire  $V_{a2}$  et  $T_{a2}$ .
- c) Déterminez  $\Delta U_a$  et  $\Delta U_b$ , variations d'énergie interne lors de la transformation des enceintes.
- d) En déduire les travaux  $W_a$  et  $W_b$  reçu respectivement par les enceintes.
- e) Déduisez  $\tau$ .