TDT1 – Transformation infinitésimale – Révisions de MP2I

0 Exercices classiques vus en cours :

B.3.b : Démonstration du théorème des moments

<u>Données pour l'ensemble des exercices :</u>

- Expressions de l'entropie d'un gaz parfait :

$$* \; S(T,V) = \frac{nR}{\gamma - 1} ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nRln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0 \qquad * \; S(P,V) = \frac{nR}{\gamma - 1} ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}\; ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

$$* \; S(T,P) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - nRln\left(\frac{P}{P_0}\right) + S_0$$

- Expressions de l'entropie d'une phase condensée idéale :

$$S\,(T) = Cln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S_0$$

<u>Rq</u> : Ces expressions se démontrent avec une identité thermodynamique (cf MP2I et ex 1).

1 ✎ Entropie d'un gaz parfait et loi de Laplace

On s'intéresse à un système formé de n moles de gaz parfait dont le rapport des capacités thermiques γ est constant.

1) A partir d'une identité thermodynamique, établir l'expression de l'entropie de ce système sous la forme :

$$S(T,V) = \frac{nR}{\gamma - 1} ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + nRln\left(\frac{V}{V_0}\right) + S_0$$

Le système étudié subit une transformation adiabatique et réversible entre l'état initial (P_1, V_1, T_1) et l'état final (P_2, V_2, T_2).

2) Démontrer la loi de Laplace i.e. que, pendant la transformation, on a $PV^{\gamma} = cste$.

2 Irréversibilité créée par une hétérogénéité de pression

Dans un cylindre calorifugé, on place n moles de gaz parfait monoatomique, à la température T_0 et à la pression P_0, et on ferme l'enceinte par un piston lui aussi calorifugé, se déplaçant sans frottement, mais initialement bloqué. On note V_0 le volume initial du cylindre. De l'autre côté du piston, l'atmosphère forme un pressostat à la pression $P_1 = \frac{3}{2}P_0$.

1. On libère le piston et on attend l'équilibre mécanique. Déterminer la pression finale P_f, le volume final V_f et la température finale T_f du gaz.
2. Exprimer la variation d'entropie du gaz. Commenter.

3 ✎ Sorbet maison

Une sorbetière est une machine permettant de fabriquer des glaces. La préparation (fruits, eau et sucre), sortie du réfrigérateur, est versée dans un bol sorti du congélateur. Ce bol contient une solution saline dont la fusion progressive permet de récupérer une grande quantité d'énergie à basse température, et donc de refroidir efficacement la préparation. Un petit moteur fait tourner une pale qui agite le mélange, jusqu'à la prise en glace.

On modélise l'ensemble de la façon suivante :

- ▹ la préparation de masse m est initialement liquide à 0 °C, elle commence à solidifier dès qu'elle est versée ;
- ▹ le bol de la sorbetière demeure à température constante $T_0 = -15\,°C$;
- ▹ la température T du mélange est uniforme ;
- ▹ la puissance thermique échangée entre le mélange et le bol de la sorbetière s'écrit $\mathcal{P} = \alpha(T - T_0)$;
- ▹ les échanges thermiques avec l'air sont négligés pour simplifier.

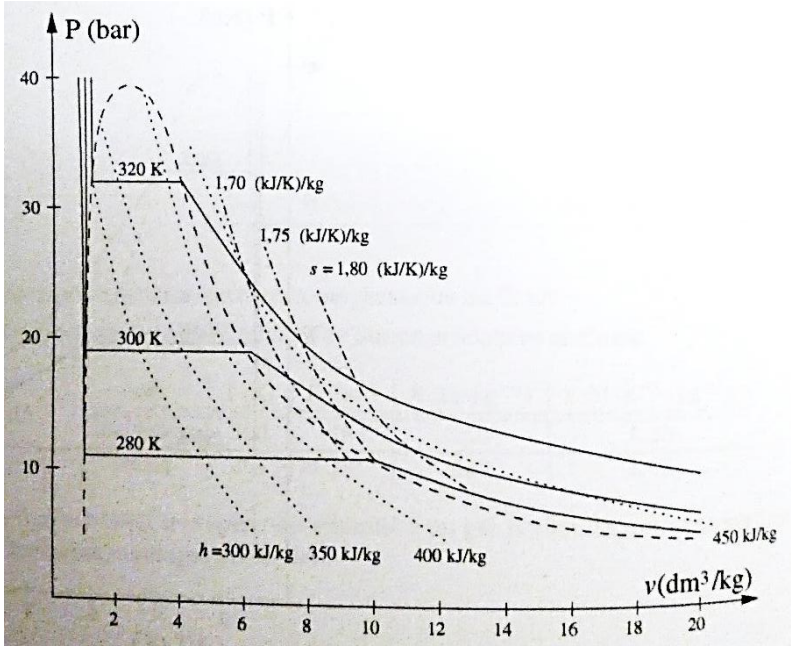
On note c la capacité thermique massique de la glace, et $\Delta_{fus}h$ son enthalpie de fusion.

1 - Quelle est la durée nécessaire à ce que le mélange solidife complètement ?

2 - La glace est meilleure à déguster à $T^* = -8\,°C$. Combien de temps supplémentaire faudra-t-il patienter une fois la glace totalement solidifée avant de se régaler ?

4 ✎ Détente isenthalpique d'un fluide – Exploitation du diagramme de Clapeyron

Un fluide à l'état d'ébullition à la température initiale T_i = 320 K subit une détente isenthalpique jusqu'à une pression finale P_f = 11 bar. Voici le diagramme de Clapeyron (P,v) de ce fluide.



1) Déterminer la température finale T_f.
2) Déterminer le titre massique final en vapeur x_f.
3) En déduire la capacité thermique massique c de ce fluide à l'état liquide, supposée indépendante de la température. *Aide : On considèrera pour cela une transformation fictive entre l'état initial et l'état final.*

<u>Donnée</u> :
Enthalpie de vaporisation du fluide étudié à 280 K : $\Delta h_{vap} = 215\ kJ.kg^{-1}$.

5 ✎ Table thermodynamique incomplète

Un extrait incomplet de la table des grandeurs thermodynamiques relatives à l'eau à saturation est donné figure 6. T est la température et P_s la pression de vapeur saturante à la température T. Les grandeurs notées « prime » ($'$) sont relatives au liquide saturant, et les grandeurs notées « seconde » ($''$) sont relatives à la vapeur saturante. l_{vap} et s_{vap} désignent respectivement la chaleur latente et l'entropie massique de vaporisation.

1 - Rappeler l'allure du diagramme des phase (P, T) de l'eau. Quelles sont les limites de la courbe de vaporisation ? En déduire d'après la table la température et la pression au point triple et au point critique.

2 - Rappelez la relation entre h', h'' et l_{vap} ainsi que celle entre s', s'' et s_{vap}.

3 - Quelle est, d'après la table, l'origine des entropies massiques ? Commenter.

4 - Rappelez la relation entre l'énergie interne massique u, l'enthalpie massique h, la pression P et le volume massique v. Justifier alors qu'il ne soit pas nécessaire d'ajouter à la table les valeurs de u' et u''.

5 - Compléter les cases vacantes du tableau.

T °C	P_s kPa	v' $m^3 \cdot kg^{-1}$	v'' $m^3 \cdot kg^{-1}$	h' $kJ \cdot kg^{-1}$	h'' $kJ \cdot kg^{-1}$	l_{vap} $kJ \cdot kg^{-1}$	s' $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	s'' $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	s_{vap} $kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
0,01	0,6117	0,001000	206,14	0,01	2500,9	2500,9	0,000	9,1556	9,1556
20	2,3392	0,001002	57,762	83,915	?	2453,5	0,2965	8,6661	8,3696
40	7,3851	0,001008	19,515	167,53	2573,5	2406,0	?	8,2556	7,6832
60	19,947	0,001017	7,6670	251,18	2608,8	2357,7	0,8313	?	?
80	47,416	0,001029	3,4053	335,02	2643,0	2308,0	1,0756	7,6111	6,5355
100	101,42	0,001043	1,6720	419,17	2675,6	2256,4	1,3071	7,3542	6,0470
200	1554,9	0,001157	0,1272	852,26	2792,0	1939,8	2,3305	6,4302	4,0997
374,14	22090	0,003106	?	?	2084,3	?	4,4070	?	0

Figure 6 – Extrait de table incomplet.

6 Transformations polytropiques d'un gaz parfait

Un échantillon de gaz parfait, de masse molaire M et rapport des capacités thermiques γ, subit une transformation au cours de laquelle sa pression P et son volume massique v suivent la loi dite polytropique : $Pv^k = \text{cte}$, où k est une constante. La transformation est de plus mécaniquement réversible : à chaque instant la pression extérieure P_{ext} et la pression du gaz P sont égales.

1. Trouver une loi de la forme $f(v, T) = \text{cte}$ vérifiée au cours de cette transformation. En déduire une relation entre $\dfrac{\mathrm{d}v}{v}$ et $\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$.

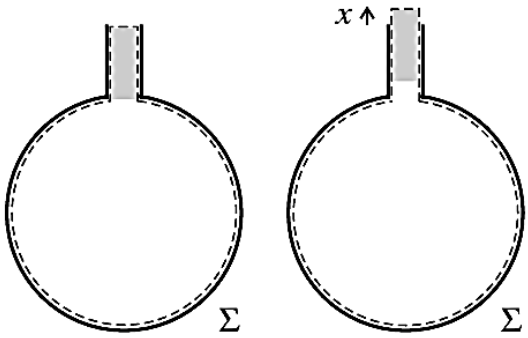
2. Exprimer le transfert thermique massique élémentaire δq entre deux états très proches en fonction de la différence de température $\mathrm{d}T$ et des caractéristiques du gaz.

7 Résonateur de Helmholtz

Un résonateur de Helmholtz est constitué par une sphère de volume V_0 reliée à un conduit cylindrique de longueur h et section A. L'air contenu dans le résonateur est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M et rapport des capacités thermiques γ. On se propose d'étudier un mode de vibration du résonateur tel que :

- l'air contenu dans le conduit se déplace en bloc (comme si c'était un bouchon solide) d'une très petite longueur x, algébrique et comptée positivement vers l'extérieur du résonateur (voir figure),
- l'air contenu dans le résonateur n'a pas d'échange thermique avec l'extérieur.

On appelle P_0 et T_0 la pression et la température de l'air atmosphérique et P et T la pression et la température dans le résonateur.



au repos en mouvement

1. Exprimer la masse m d'air dans le conduit et la quantité d'air n dans la sphère lorsque le résonateur est au repos en fonction de h, A, V_0,M, P_0 et T_0.

2. En négligeant la variation d'énergie interne de l'air du conduit et la variation d'énergie cinétique de l'air dans la sphère, montrer que l'application du premier principe au système fermé $\Sigma = \{\text{gaz dans le résonateur au repos}\}$ mène à la relation : $\dfrac{nR}{\gamma-1}\mathrm{d}T + m\ddot{x}\mathrm{d}x = -P_0 A\mathrm{d}x$.

3. De même, établir la relation : $\dfrac{nR}{\gamma-1}\mathrm{d}T = -PA\mathrm{d}x$.

4. Montrer que $\dfrac{A\mathrm{d}x}{V_0+Ax} = -\dfrac{1}{\gamma-1}\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$ puis que $\dfrac{\mathrm{d}P}{P} = -\gamma\dfrac{A\mathrm{d}x}{V_0+Ax}$. Exprimer P au premier ordre en x, en fonction de P_0, V_0, A et x.

5. Montrer que : $m\ddot{x} = -\dfrac{\gamma P_0 A^2}{V_0}x$. Quelle est la fréquence f_0 du mode d'oscillation étudié ?

6. On indique que la vitesse du son dans l'air est $c_{\text{son}} = \sqrt{\dfrac{\gamma R T_0}{M}}$. Exprimer la longueur d'onde λ_0 d'une onde sonore de fréquence f_0 en fonction de V_0, A et h.

7. *Application numérique :* la sphère a un rayon $r = 6{,}0\,\text{cm}$, le conduit est un cylindre de rayon $a = 1{,}0\,\text{cm}$ et hauteur $h = 4{,}0\,\text{cm}$, $M = 0{,}029\,\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$. Calculer λ_0. Commenter la valeur trouvée.

8 Calorimétrie : détermination d'une capacité thermique *(Révisions MP2I)*

Afin de mesurer la capacité thermique massique du cuivre, on propose d'utiliser la méthode des mélanges. On dispose d'une pièce de cuivre de masse m_2 et d'un calorimètre de masse en eau* m_c.

On introduit une masse m_1 d'eau à température ambiante dans le calorimètre et on attend 15 minutes la mise à l'équilibre thermique de l'ensemble. Parallèlement, on immerge l'échantillon de cuivre dans un bécher rempli d'eau placé sur l'agitateur chauffant. On chauffe l'ensemble en agitant jusqu'à la température T_2. La géométrie de l'échantillon de cuivre permet de faire l'hypothèse que l'équilibre thermique entre le solide et l'eau dans laquelle il est plongé est très rapidement atteint.

Lorsque la température T_2 est atteinte, l'échantillon de cuivre est sorti du bain chaud, et plongé immédiatement dans le calorimètre. On ferme alors le calorimètre avec son couvercle isolant.

Avant l'ajout de l'échantillon de cuivre, le calorimètre et son contenu sont à la température T_1.

Une fois l'échantillon ajouté, on mesure au bout de 5 minutes la température d'équilibre T_f.

➲ On note c la capacité thermique massique du cuivre, et $c_{eau(l)}$ celle de l'eau liquide. Exprimer c en fonction de $c_{eau(l)}$, T_1, T_2, T_f, m_1, m_2 et m_c.

9 Calorimétrie : mesure de l'enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C *(Révisions MP2I)*

On décrit ci-après un protocole expérimental permettant de mesurer l'enthalpie massique de fusion de l'eau à 0°C, notée $L_{fus}(0°C)$.

Pour cela, on utilise en particulier un calorimètre et une résistance chauffante.

> Le calorimètre, de valeur en eau* μ, contient au départ une masse m_1 d'eau liquide, l'ensemble {calorimètre + résistance chauffante + eau liquide} étant à l'équilibre à la température T_1.
> Puis on introduit dans le calorimètre une masse m_g de glace à la température $T_0 = 0°C$.
> Simultanément, on alimente la résistance chauffante en maintenant une tension constante U à ses bornes.
> On attend que la glace ait complètement fondu et on chauffe encore un peu jusqu'à atteindre la température T_2. On mesure τ la durée pendant laquelle la résistance chauffante est alimentée.

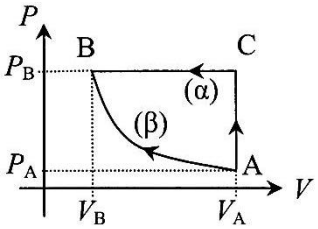
➲ On note $c_{eau(l)}$ la capacité thermique massique de l'eau liquide. Exprimer $L_{fus}(0°C)$ en fonction de $c_{eau(l)}$, T_1, T_2, T_0, m_1, m_g, μ, U, τ et R.

<u>Rq</u> sur les exercices 8 et 9 :

- ** On rappelle que la masse en eau ou valeur en eau du calorimètre est définie comme le rapport entre sa capacité thermique et la capacité thermique massique de l'eau liquide.*
- *Cf TP pour un autre exemple d'expérience de calorimétrie axé sur la thermochimie.*

10 Transformations d'un gaz parfait *(Révisions MP2I)*

On fait passer une certaine quantité de gaz parfait d'un état d'équilibre A (P_A, V_A, T_A) à un autre état d'équilibre B ($P_B = 3P_A$, V_B, T_B) par deux chemins distincts :



- α : isochore AC puis isobare CB ;
- β : isotherme réversible AB.

1) Déterminer T_B et V_B ainsi que les travaux et transferts thermiques reçus par le gaz au cours des transformations α et β. Commenter les résultats obtenus.

2) Déterminer les variations d'entropie du système au cours de chaque étape de la transformation α puis au cours de la transformation β. Commenter.

11 Cycle de Beau de Rochas (CCINP MP 2021) (*Révisions MP2I)*

Le bloc moteur correspond à un ensemble de 4 cylindres munis de 4 pistons.
Le mouvement de chaque piston se décompose selon les 4 étapes ou " temps-moteur " (**figure 3**), de durée totale τ, chaque " temps-moteur " ayant pour durée $\tau/4$:

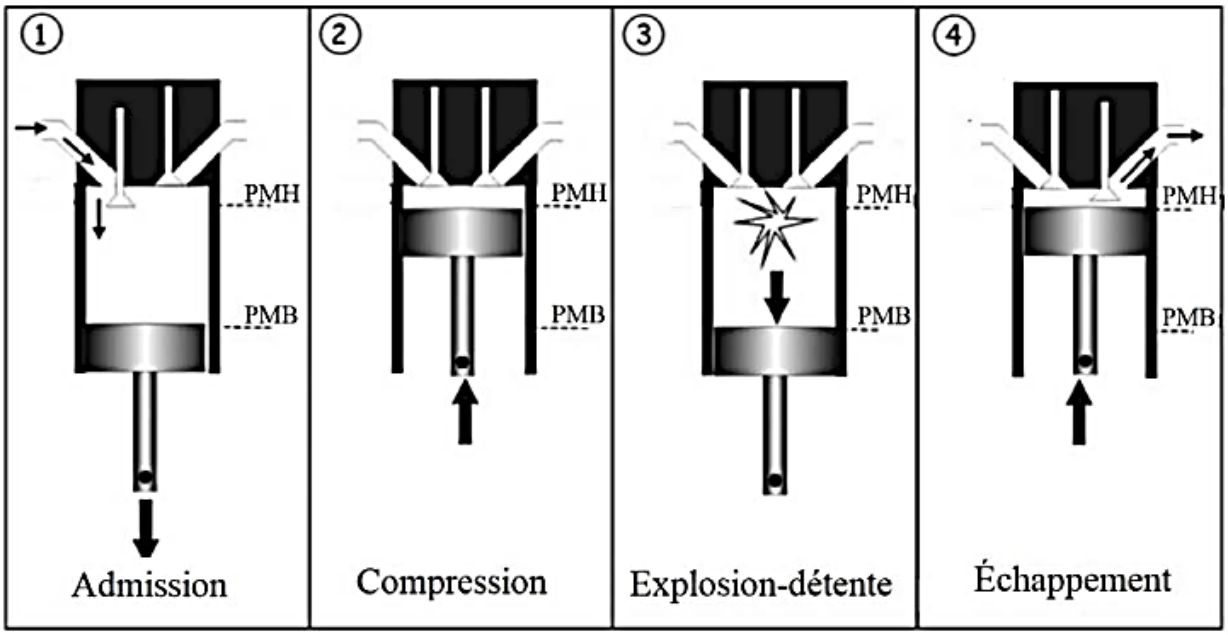


Figure 3 - Les quatre " temps-moteur "

* **Admission AB** : la soupape d'admission s'ouvre, le piston descend en aspirant un mélange air-carburant. Le débit massique aspiré est constant au cours de cette étape.
* **Compression BC** : la soupape d'admission se ferme, le piston remonte en comprimant le mélange air-carburant introduit dans le cylindre à l'étape précédente. Cette compression est supposée adiabatique réversible.
* **Explosion-détente CDE** : une étincelle produit l'inflammation du mélange air-carburant. Le gaz ainsi chauffé de manière isochore (CD), finit par repousser le piston vers le bas (DE). Cette détente est supposée adiabatique réversible.
* **Échappement EBA** : la soupape d'échappement s'ouvre, la pression chute de manière isochore (EB), puis le piston remonte en évacuant les gaz brûlés (BA).

Le piston évolue entre deux positions extrémales : le point mort haut (PMH) et le point mort bas (PMB), le volume du cylindre valant alors V_{min} quand le piston se trouve au PMH et V_{max} quand il est au PMB. $C_1 = V_{max} - V_{min}$ définit la cylindrée unitaire et $C = 4\ C_1$ la cylindrée du moteur.

Les quatre pistons sont montés sur un vilebrequin, ou arbre à cames, transformant le mouvement de va-et-vient des pistons en mouvement de rotation (**figure 4**). La fréquence de rotation du vilebrequin est notée f_{vilb}.

Figure 4 - Quatre pistons montés sur vilebrequin

Le mélange air-carburant (G) est assimilé à un gaz parfait de composition chimique inchangée malgré la combustion. Sa masse molaire M, ses capacités thermiques massiques à pression et à volume constants c_p et c_v, et son coefficient de Laplace $\gamma = c_p/c_v$ sont supposés indépendants des conditions de température et de pression.

La constante molaire des gaz parfaits vaut $R = 8{,}31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.

La **figure 5** donne le cycle de Beau de Rochas en diagramme (P,V) décrit par une quantité donnée de (G) admise dans l'un des quatre cylindres :

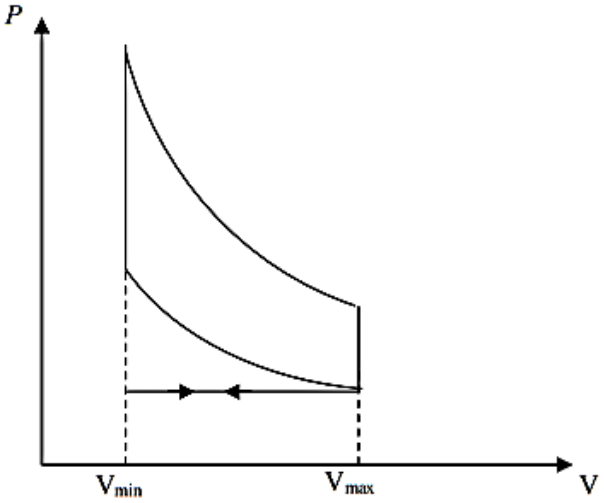


Figure 5 - Le cycle de Beau de Rochas en diagramme (P,V)

Q14. Recopier la **figure 5**. La compléter en indiquant le sens de parcours du cycle et les points A, B, C, D et E.

Q15. Exprimer les rapports T_C/T_B et T_D/T_E en fonction du rapport volumétrique $a = V_{max}/V_{min}$.

Q16. Rappeler la définition du rendement thermodynamique η associé à ce cycle. Exprimer η en fonction des températures T_B, T_C, T_D et T_E, puis en fonction de a et de γ.
Application numérique : calculer η pour $a = 8$ et $\gamma = 1{,}3$.

Q17. Quel est le nombre de tours effectués par le vilebrequin au bout des 4 " temps-moteur " ? En déduire τ en fonction de f_{vilb}. Calculer τ pour $f_{vilb} = 2\,400$ tr/min.