TDE1 – Signaux périodiques : spectre et filtrage + *Puissance en RSF*

Capacités exigibles	ChE1	Ex 1 à 5	*Ex 6*	TP
Signaux périodiques. Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.	●	●	*Puissance en RSF Ct 1e année*	2
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique. Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. *Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique.*	●	●		2

0 Exercices classiques vus en cours / TP :

ChE1. § B.2 : Transposition domaine temporel (ED) ↔ domaine fréquentiel ($\underline{H}$)
TP2. § B.1/4 : Etude d'un filtre linéaire passe-bas d'ordre 1/2
TP2. § B.2 : Etude d'un filtre linéaire passe-haut d'ordre 1
TP2. § B.3 : Etude d'un filtre linéaire passe-bande d'ordre 2

1 ✎ Filtrage et décomposition spectrale d'un signal

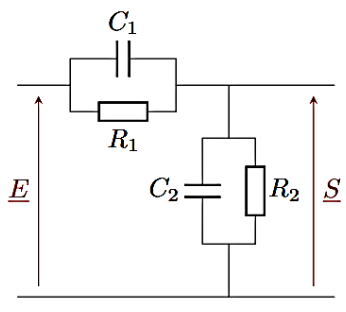
Un filtre passe-bas RC du 1er ordre agit sur une tension d'entrée créneau $e(t)$ dont la décomposition en série de Fourier s'écrit (en volt) :

$$e(t) = 1 + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{4}{\pi(2p+1)} \cos\big((2p+1)\pi t\big)$$

1) Que vaut la valeur moyenne de ce signal ?
2) Que vaut la période T de ce signal ?
3) Représenter son spectre pour $p \leq 4$.
4) Quelle est l'opération réalisée par le filtre si $RC = 10.T$? Représenter alors l'allure du signal de sortie.

2 ✎ Atténuateur différentiel

On considère le filtre de la figure 3, qui atténue différemment les signaux en fonction de leur fréquence. On donne $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$.



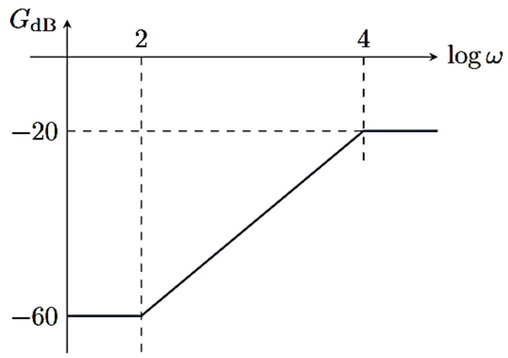


Figure 3 – Schéma et diagramme de Bode du filtre étudié.

1 - Établir la fonction de transfert du filtre.

2 - Justifier l'allure du diagramme de Bode, en particulier la pente dans la zone intermédiaire.

3 - Déterminer la valeur des composants.

4 - On envoie en entrée du filtre un signal à deux harmoniques de même amplitude A, de même phase initiale φ_0, et de pulsations respectives $\Omega = 50\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $\Omega' = 10^6\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Déterminer le signal de sortie.

5 - Même question pour des harmoniques de pulsations $2\cdot 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ et $3\cdot 10^3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

3 ✎ Signal de sortie d'un filtre – Entrée créneau

La figure 4 représente les signaux d'entrée (voie 1) et de sortie (voie 2) d'un filtre acquis via un oscilloscope numérique. Le diagramme de Bode du filtre est représenté figure 5.

Données :

▷ décomposition en série de Fourier d'un signal quelconque de fréquence f :

$$v(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(2\pi k f t)\,;$$

▷ spectre d'un signal créneau symétrique centré : $A_1 = 4A/\pi$ avec A l'amplitude du signal

$$A_0 = 0 \qquad A_k = \begin{cases} 0 & k \text{ pair} \\ A_1/k & k \text{ impair} \end{cases} \qquad \forall k,\ B_k = 0\,.$$

1 - Déterminer l'amplitude, la fréquence et la valeur moyenne du signal créneau.

2 - En raisonnant par parité, justifier que $B_k = 0$ pour le signal créneau représenté.

3 - Identifier la nature du filtre et donner sa fréquence propre f_0.

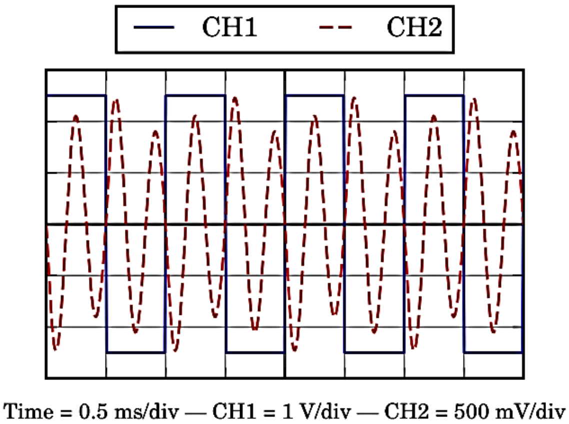


Figure 4 – Copie d'écran d'oscilloscope.

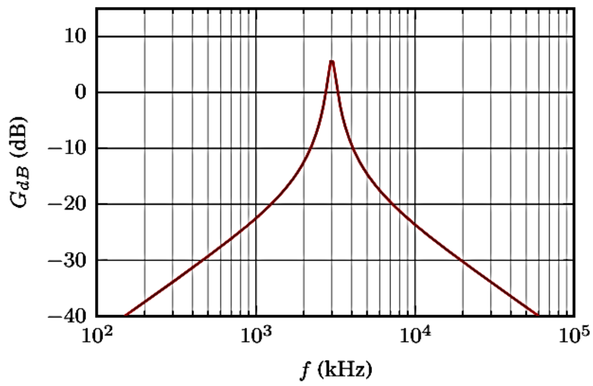


Figure 5 – Diagramme de Bode du filtre.

4 - Dans un premier temps, on fait l'approximation que le filtre ne transmet qu'une seule harmonique du signal d'entrée : le signal de sortie est une sinusoïde parfaite $v_s = V_{s,max} \sin(\omega t + \varphi)$. D'après l'oscillogramme, donner l'amplitude et la fréquence de la sinusoïde ainsi modélisée. À quelle harmonique du signal d'entrée correspond-elle ?

5 - L'oscillogramme montre que cette approximation n'est pas très satisfaisante : il est nécessaire de prendre en compte au moins une seconde harmonique. Quelles sont les deux harmoniques qui pourraient potentiellement jouer ce rôle ?

6 - Déterminer graphiquement la fréquence de l'harmonique à considérer. Confirmer ce résultat en calculant à partir du diagramme de Bode le poids dans le signal de sortie des deux harmoniques envisageables.

7 - Justifier quantitativement que les autres harmoniques du signal de sortie sont négligeables.

8 - Représenter sur un même graphe et à l'échelle le spectre du signal d'entrée et celui du signal de sortie.

4 Conception d'un filtre de signaux acoustiques

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On souhaite éliminer les composantes ultrasonores : il faut donc réaliser un filtre passe-bas. Le cahier des charges du dispositif indique les caractéristiques suivantes :

- ▷ Fréquence de coupure 20 kHz ;
- ▷ Gain nominal 0 dB ;
- ▷ L'atténuation des fréquences comprises entre 0 et 20 kHz doit être inférieure à 3 dB ;
- ▷ L'atténuation des fréquences supérieures à 40 kHz doit être supérieure à 10 dB.

1 - On appelle gabarit d'un filtre la traduction graphique sur le diagramme de Bode des contraintes imposées par le cahier des charges, c'est-à-dire une représentation du plan $(G_{\text{dB}}, \log \omega)$ sur laquelle sont matérialisées les zones interdites du diagramme de Bode. Le représenter pour le filtre considéré.

2 - Le filtre le plus simple serait un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20\,\text{kHz}$. On rappelle que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit sous forme réduite

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}x} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{f}{f_c}$$

2.a **-** Rappeler ou retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre et calculer son gain à la fréquence de coupure.
2.b **-** Montrer qu'il ne peut satisfaire au cahier des charges imposé. Justifier qu'il est nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre plus élevé.

3 - On se tourne alors vers un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q} - x^2}$$

3.a **-** Rappeler ou retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre. Peut-il satisfaire au cahier des charges imposé ?
3.b **-** Calculer le gain en décibel de ce filtre pour $f = f_c$. En déduire les valeurs de Q permettant de satisfaire au cahier des charges.

5 Train d'impulsions périodique

On considère le signal de période $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ défini par :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si} \quad 0 < t < \alpha T_s \\ 0 & \text{si} \quad \alpha T_s < t < T_s \end{cases} \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

On admet que ce signal a des composantes sinusoïdales de fréquences nf_s, avec $n \geq 1$, et d'amplitudes : $A_n = \dfrac{|\sin(n\pi\alpha)|}{\pi n}$.

1) Exprimer la composante continue et la valeur efficace de ce signal.

2) Lorsque $\alpha \ll 1$, on nomme ce signal train d'impulsions. On s'intéresse à l'amplitude des harmoniques de rang $n \leq 17$ pour $\alpha = 0{,}01$.

a) Vérifier que l'écart relatif entre l'amplitude d'un harmonique de rang n et celle du fondamental est inférieur à 5%.

b) Ce signal constitue l'entrée d'un filtre et on observe le spectre du signal de sortie jusqu'à l'harmonique de rang $n = 17$. Commenter le spectre obtenu.

6 Complément 1[e] année : Puissance en RSF

Un dipôle est alimenté en régime sinusoïdal forcé par la tension

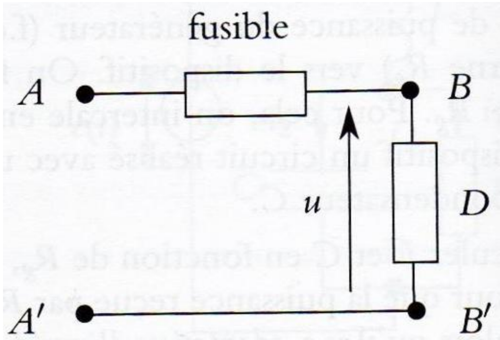
$$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(2\pi f t)\text{ , avec } U_{eff} = 220\ V \text{ et } f = 50\ Hz$$

L'intensité du courant qui le parcourt est alors $i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi)$.

1) Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle ainsi que celle de son module Z en fonction de U_{eff}, I_{eff} et φ.
2) a) Etablir l'expression de la puissance électrique moyenne P_e reçue par le dipôle en fonction de U_{eff}, I_{eff} et φ.

   b) En déduire l'expression $P_e = R\frac{{U_{eff}}^2}{Z^2}$, R étant la résistance du dipôle (i.e. la partie réelle de l'impédance).

Un fusible assimilable à un résistor protège une ligne électrique (AB, A'B') alimentant, en régime sinusoïdal forcé sous une tension efficace U_{eff} et une fréquence f, un dipôle D assimilable à une bobine d'inductance $L = 30\ mH$ en série avec un résistor de résistance R.



L'intensité efficace maximale admissible dans la ligne est $I_{max} = 16\ A$.

Le dipôle D absorbe une puissance électrique moyenne $P_e = 2500\ W$. La ligne (AB, A'B') se comporte comme un dipôle purement ohmique de résistance électrique totale $R_0 = 1{,}2\ \Omega$, fusible compris.

3) a) Calculer les deux valeurs possibles R_1 et R_2 de la résistance R du dipôle D.

   b) Pour chaque valeur de R_1 et R_2, calculer l'intensité efficace I_{eff1} et I_{eff2} dans le dipôle D.

   c) Déterminer la seule valeur de R possible compte tenu de la présence du fusible.

   d) En déduire l'intensité efficace I_0 du courant électrique circulant dans la ligne (AB, A'B') et la puissance P_0 dissipée par effet Joule dans cette ligne.

4) On ajoute, en parallèle sur le dipôle D, un condensateur de capacité $C = 130{,}4\ \mu F$.

   a) En supposant la tension U_{eff} inchangée, calculer les intensités efficaces I_D dans le dipôle D, I_C dans le condensateur et ${I_0}'$ dans la ligne.

   b) Déterminer la puissance ${P_0}'$ dissipée par effet Joule dans la ligne.

   c) Comparer P_0 et ${P_0}'$. Conclure quant à l'intérêt du condensateur.