TDE1 – Signaux périodiques : spectre et filtrage

Capacités exigibles	ChE1	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	TP
Signaux périodiques. Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.	•	•	•	•	•	•		2
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique. Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur. *Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre sur un signal périodique.*	•	•	•	•	•	•	•	2

0 Exercices classiques vus en cours / TP :

ChE1. § B.2 : Transposition domaine temporel (ED) ↔ domaine fréquentiel ($\underline{H}$)
TP2. § B.1/4 : Etude d'un filtre linéaire passe-bas d'ordre 1/2
TP2. § B.2 : Etude d'un filtre linéaire passe-haut d'ordre 1
TP2. § B.3 : Etude d'un filtre linéaire passe-bande d'ordre 2

1 ✐ Filtrage et décomposition spectrale d'un signal

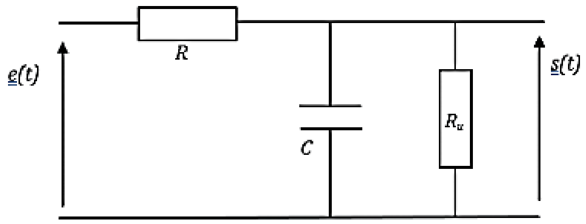
Un filtre passe-bas RC du 1er ordre agit sur une tension d'entrée créneau $e(t)$ dont la décomposition en série de Fourier s'écrit (en volt) :

$$e(t) = 1 + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{4}{\pi(2p+1)} \cos\big((2p+1)\pi t\big)$$

1) Que vaut la valeur moyenne de ce signal ?
2) Que vaut la période T de ce signal ?
3) Représenter son spectre pour $p \leq 4$.
4) En pratique, quelles valeurs faudrait-il choisir pour les paramètres d'acquisition (durée d'acquisition et fréquence d'échantillonnage) afin d'obtenir le spectre correspondant à la question précédente ?
5) Quelle est l'opération réalisée par le filtre si $RC = 10.T$? Représenter alors l'allure du signal de sortie.

2 ✐ Choix des caractéristiques d'un filtre *d'après CMT*

Soit le montage ci-dessous.



2.1. Déterminer la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$

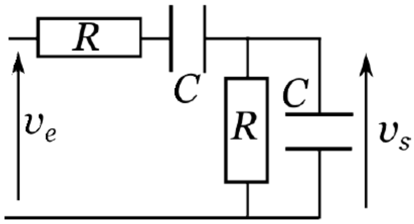
En déduire les caractéristiques du filtre.
Le signal d'entrée est tel que : $e(t) = E_0 + E_m \cos(200\nu t)$ avec $E_0 = 10$ V et $E_m = 0{,}1$ V

On applique cette tension à l'entrée du filtre pour alimenter le dispositif de résistance $R_u = 1000\ \Omega$. Ce dispositif doit être alimenté par une tension continue d'au moins $9\ V$.

2.2. En déduire la valeur de R.

3.3. Comment choisir la valeur de C afin de satisfaire le « cahier des charges » ?

3 Filtre de Wien



On alimente le circuit ci-dessous avec une tension alternative $v_e(t)$ d'amplitude constante et de pulsation ω variable.

1. Déterminer la nature du filtre.

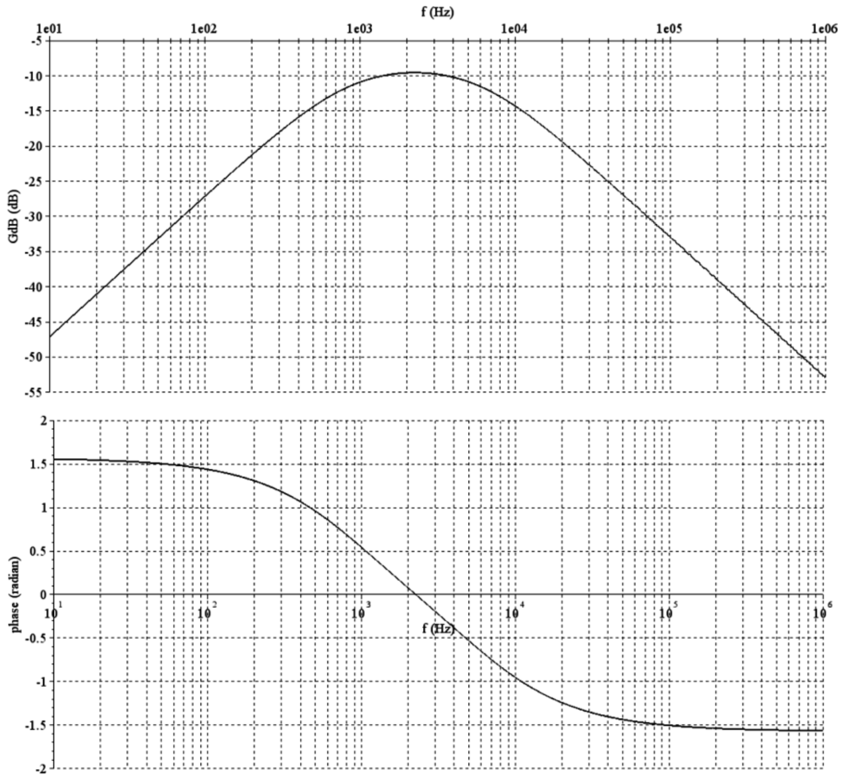
2. On s'intéresse à la fonction de transfert de ce filtre.

a) Établir cette fonction de transfert $\underline{H}$ en la mettant sous la forme : $\frac{1}{X(\omega)+j\cdot Y(\omega)}$.

b) Déterminer la pulsation correspondant au maximum du gain, la valeur du gain maximal et le déphasage correspondant.

c) Faire les applications numériques avec R = 15 kΩ et C = 4,7 nF.

On donne le diagramme de Bode du filtre considéré.



3. Vérifier la cohérence du diagramme de Bode avec les résultats précédents.

4. Le circuit est alimenté par une tension $v_e(t)$ triangulaire, i.e. formée d'une succession de rampes linéaires de pente ($\pm a$) avec $a = 4 \cdot E \cdot f$ où E est l'amplitude de cette tension d'entrée égale à $1{,}0\ V$ et f sa fréquence.

Pour $f = 50\ Hz$, donner l'allure du signal $v_s(t)$ obtenu.

<u>Donnée</u> : Un signal périodique peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

Pour un signal triangulaire :	Pour un signal créneau :
$C_n = 0$ pour n pair et $C_n = \frac{8E}{\pi^2 n^2}$ pour n impair	$C_n = 0$ pour n pair et $C_n = \frac{4E}{\pi n}$ pour n impair

avec E l'amplitude du signal considéré

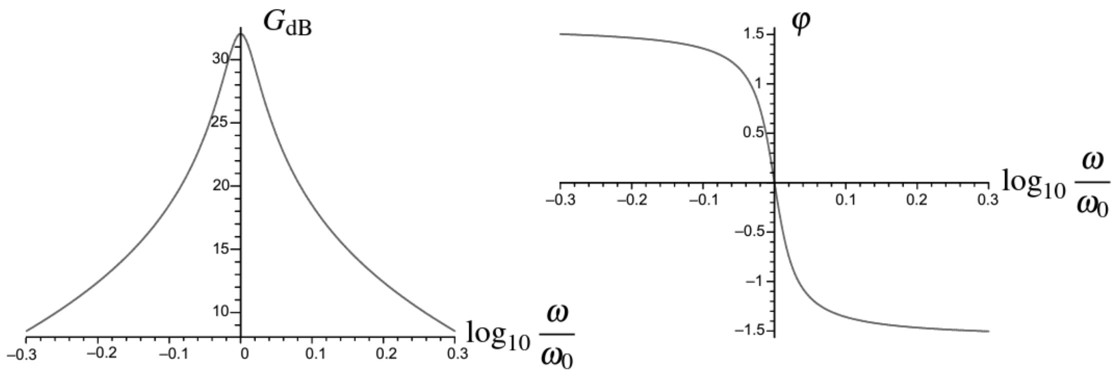
4 Elimination du bruit d'un signal *d'après CMT Pasquier 2023*

Un capteur donne une signal utile sinusoïdal de fréquence $f_u = 80\,\mathrm{Hz}$ mais brouillé par des signaux de fréquences différentes de f_u (« bruit » expérimental).

1. Donner une origine possible pour le bruit de fréquence inférieure à f_u et une autre pour le bruit de fréquence supérieure à f_u.

2. Quel type de filtrage peut-on envisager pour réduire l'amplitude de ces signaux parasites ?

3. Pour éliminer le bruit on utilise un filtre dont le diagramme de Bode est :



Quelle est le meilleur choix pour ω_0 ? Avec ce choix et en exploitant graphiquement ce diagramme, donner l'expression du signal de sortie pour chacun des trois signaux suivants : $e_1(t) = E_0\cos(100\pi t)$, $e_2(t) = E_0\cos(160\pi t)$ et $e_3 = E_0\cos(200\pi t)$. Commenter les résultats obtenus.

5 Train d'impulsions périodique

On considère le signal de période $T_s = \dfrac{1}{f_s}$ défini par :

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si} \quad 0 < t < \alpha T_s \\ 0 & \text{si} \quad \alpha T_s < t < T_s \end{cases} \qquad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

On admet que ce signal a des composantes sinusoïdales de fréquences nf_s, avec $n \geq 1$, et d'amplitudes : $A_n = \dfrac{|\sin(n\pi\alpha)|}{\pi n}$.

1) Exprimer la composante continue et la valeur efficace de ce signal.

2) Lorsque $\alpha \ll 1$, on nomme ce signal train d'impulsions. On s'intéresse à l'amplitude des harmoniques de rang $n \leq 17$ pour $\alpha = 0{,}01$.

a) Vérifier que l'écart relatif entre l'amplitude d'un harmonique de rang n et celle du fondamental est inférieur à 5%.

b) Ce signal constitue l'entrée d'un filtre et on observe le spectre du signal de sortie jusqu'à l'harmonique de rang $n = 17$. Commenter le spectre obtenu.

6 Filtrage par un filtre passe-bas

Pour éliminer du bruit haute fréquence, on filtre un signal périodique (non nécessairement sinusoïdal) de fréquence $f_s \sim 100\,\mathrm{Hz}$ par un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure ω_c et de fonction de transfert : $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$.

1. Quelle est la valeur de ω_c adaptée : $\omega_c = 628\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ ou $\omega_c = 1 \times 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$?

2. Trouver une approximation de la fonction de phase du filtre valable à l'intérieur de la bande passante qui soit de la forme : $\varphi(\omega) \simeq -K\omega$ où K est une constante positive.

3. Montrer que le signal est restitué avec un léger retard τ.