Complément de TP : Mesures et incertitudes

Compétences au programme :

Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
Incertitude-type.	Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart- type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs — simulation Monte-Carlo — pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.
Outils numériques – Probabilité et statistiques	**Variable aléatoire** Utiliser les fonctions de base des bibliothèques **random** et/ou numpy (leurs spécifications étant fournies) pour réaliser des tirages d'une variable aléatoire. Utiliser la fonction **hist** de la bibliothèque matplotlib.pyplot (sa spécification étant fournie) pour représenter les résultats d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. Déterminer la **moyenne** et **l'écart-type** d'un ensemble de tirages d'une variable aléatoire. **Régression linéaire** Utiliser la fonction **polyfit** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour exploiter des données. Utiliser la fonction **random.normal** de la bibliothèque numpy (sa spécification étant fournie) pour simuler un processus aléatoire.

INTRO :

Mesurer des grandeurs est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche et dans l'industrie :

- recherche d'une information (analyses biologiques, vitesse d'un véhicule…)
- validation d'une théorie…

Il est nécessaire d'évaluer la confiance que l'on peut accorder à une mesure.

Ainsi mesurer consiste en la recherche d'une **valeur** tout en lui associant une **incertitude**.

A) Résultat d'une mesure

1) Vocabulaire

La grandeur que l'on veut mesurer est le **mesurande**.

Les opérations permettant de déterminer expérimentalement une valeur que l'on attribue à la grandeur est le **mesurage ou mesure**.

La valeur obtenue si le mesurage est parfait (cas idéal jamais vrai en pratique) est la **valeur vraie** notée $\boldsymbol{X_{vraie}}$. Cette valeur est inconnue !

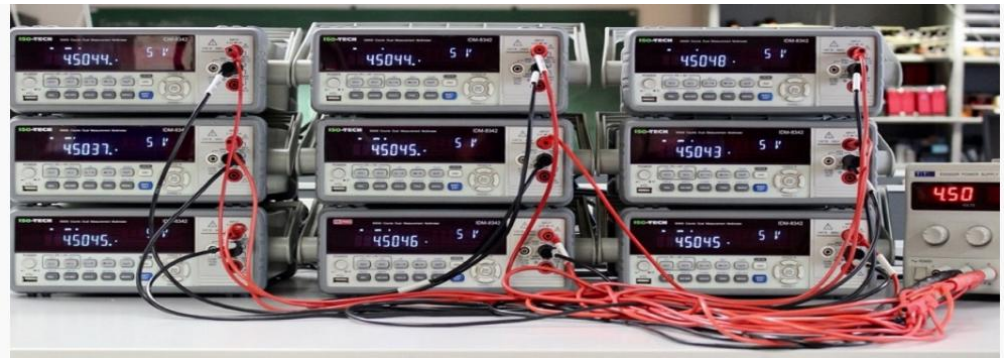
On note $\boldsymbol{x}$ le **résultat de la mesure ou du mesurage** i.e. la valeur obtenue par un mesurage réel.

2) Variabilité de la mesure

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe. Cette complexité se traduit systématiquement par une **variabilité de la mesure**, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première.

Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure, elle peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la **méthode** de mesure (ex : choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse) ;
- les variations de **l'environnement** (ex : la variation de la température implique une variation de la célérité du son dans l'air) ;
- les **instruments** de mesure (ex : mesurer une tension avec deux voltmètres identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente) ;



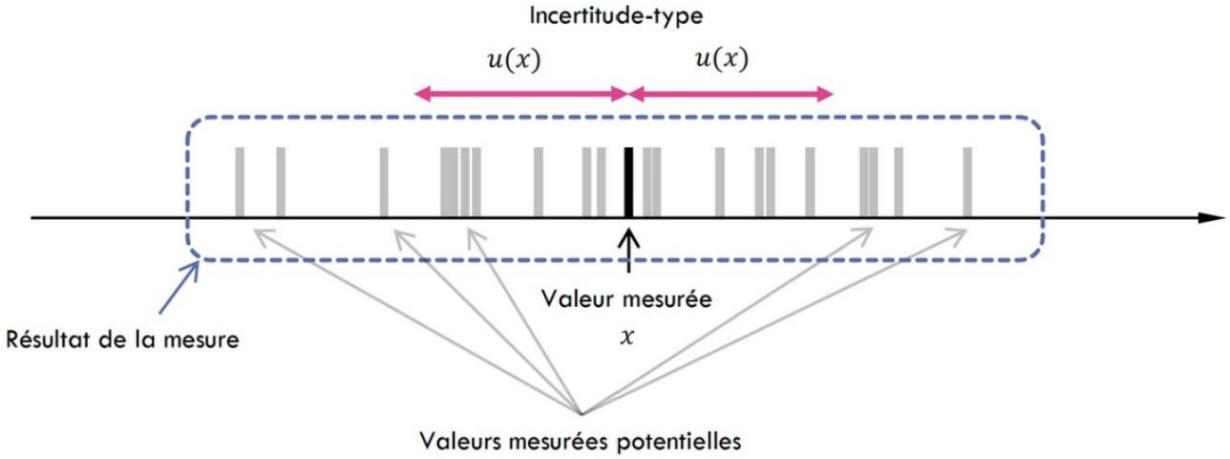
Plusieurs voltmètres de la même référence branchés en parallèle sur une source de tension.

- la **personne réalisant l'expérience** (par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante).

3) Incertitude-type – Ecriture du résultat d'une mesure

La quantification de la variabilité d'une mesure est appelée **incertitude**. L'incertitude caractérise la **dispersion des valeurs** :

l'**INCERTITUDE-TYPE** est une incertitude évaluée à l'aide d'un écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.



Ecrire le résultat d'une mesure consiste à donner un ensemble de valeurs numériques raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt (mesurande).

On le présentera sous la forme :

$$\boldsymbol{x} = \ldots . \boldsymbol{unité} \; ; \; \boldsymbol{u(x)} = \ldots . \boldsymbol{unité}$$

Avec $u(x)$ l'incertitude-type.

Combien de chiffres significatifs ?

- Le GUM (Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure rédigé par le Bureau International des Poids et Mesures) recommande **2 chiffres significatifs pour l'incertitude-type**.
- Les chiffres significatifs de la valeur mesurée ne contiennent pas plus d'information sur l'incertitude associée. Ainsi, **le dernier chiffre significatif de l'incertitude-type impose le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée**.

Ex : $l = 10,000\ cm\ ;\ u(l) = 0,029\ cm$

$L = 10,0\ cm\ ;\ u(L) = 1,2\ cm$

Contre-ex : $d = 26{,}231\ cm\ ;\ u(d) = 0{,}50\ cm$ ou $d = 26{,}2\ cm\ ;\ u(d) = 0{,}50\ cm.$

Rq : On peut aussi préciser l'incertitude-type relative en % : $\frac{u(x)}{|x|}$.

4) Comparaison de deux valeurs – Ecart normalisé (ou z-score)

En TP, on sera amené à comparer deux valeurs mesurées de la même grandeur selon deux protocoles ou une valeur mesurée à une valeur de référence (issue des tables).

On compare quantitativement deux valeurs avec **l'ECART NORMALISE** E_N, aussi appelé **Z-SCORE**.

◆ Pour comparer 2 résultats de mesure x_1 et x_2 selon deux protocoles, d'incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$, l'écart normalisé se calcule ainsi :

$$\boldsymbol{E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}}$$

♦ Pour comparer une valeur mesurée x avec une valeur de référence x_{ref} dont l'incertitude est négligeable devant celle de la mesure effectuée, l'écart normalisé se calcule ainsi :

$$\boldsymbol{E_N = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}}$$

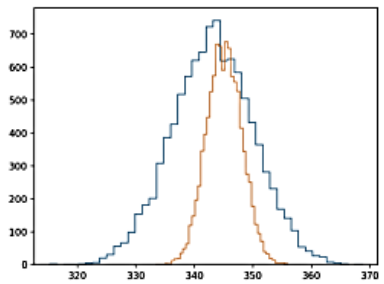
Comment conclure ? Par convention*, on retient le critère suivant :

- **si $E_N < 2$, les deux mesures sont compatibles entre elles.**
- **si $E_N > 2$ alors les mesures ne sont pas compatibles entre elles.** Une incompatibilité n'est pas synonyme d'échec. Néanmoins, il convient de **s'interroger sur les raisons de ce désaccord** : A-t-on fait une erreur de protocole ? de mesure ? de calcul ? A-t-on oublié une source d'incertitude ? Doit-on douter du modèle théorique envisagé (hypothèses non respectées) ?

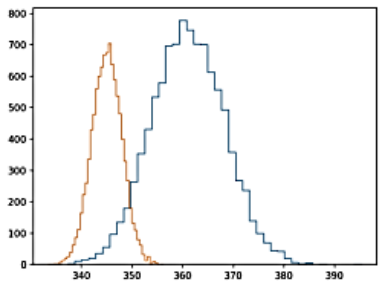
* Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques (médecine, biologie, économie, etc).

Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

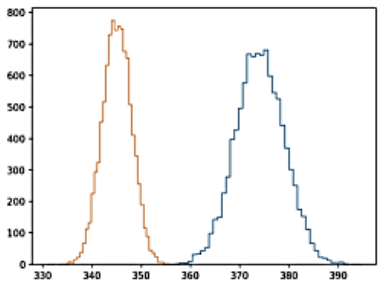
On constate avec les histogrammes ci-dessous que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment faible : dans ce cas, il est possible que les deux protocoles de mesure conduisent au même résultat.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.



(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.



(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

B) Evaluation d'une incertitude-type

1) Evaluation de type A – Répétition des mesures

L'évaluation de **type A** de l'incertitude-type est réalisée par **l'analyse statistique** de séries de mesures : on **répète** la mesure de x en suivant le même protocole. On réalise n mesures de résultats respectifs x_1, x_2,… x_n.

◆ Le meilleur estimateur du mesurande est la valeur moyenne des n mesures :

$$x = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

◆ L'**écart-type** expérimental a pour expression *(au sens statistique)* :

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Il s'agit de **l'incertitude-type sur une unique mesure**.

◆ **L'incertitude-type sur la valeur moyenne $\bar{x}$** est :

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} s_x}$$

NB : La variabilité de la valeur moyenne d'une série de mesures est beaucoup plus faible que celle d'une mesure unique puisque, dans une moyenne, il y a compensation partielle des écarts positifs et négatifs à la moyenne.

➲ Application n°1, cf p.12.

2) Evaluation de type B – Mesure unique

Il arrive que toutes les mesures répétées donnent le même résultat, car la précision de l'appareil de mesure cache la variabilité des mesures. Dans ce cas, on procède à une évaluation de **type B** de l'incertitude.

a) Intervalle – Précision - tolérance

L'évaluation de type B ne repose donc pas sur une étude statistique des données expérimentales, mais sur un jugement scientifique prenant en compte toutes les informations disponibles au sujet de la variation possible de la grandeur à mesurer.

On détermine alors **l'intervalle des valeurs mesurées raisonnablement acceptables, on note Δx ou $a(x)$ la demi-largeur de cet intervalle, qu'on appelle PRECISION OU TOLERANCE.**

Les critères retenus pour l'estimation de Δx sont subjectifs et doivent toujours être précisés.

Selon les cas :

- La valeur de Δx est la moitié d'une **graduation** lors de l'utilisation d'un appareil gradué (règle, goniomètre...).
- Lors de l'utilisation d'un **instrument de mesure** notamment numérique (ampèremètre, voltmètre, thermomètre. . .), la valeur de Δx est précisée dans la **notice du constructeur** : précision, cf applications.
- Lors de l'utilisation de **verrerie de précision en chimie**, la valeur de Δx ou de $\frac{\Delta x}{x}$ est précisée sur la verrerie (burette, pipette jaugée…) : tolérance, cf applications.
- En optique, il faut aussi tenir compte de la **latitude de mise au point**…

b) Incertitude-type

On suppose que toutes les **valeurs** que l'on pourrait potentiellement mesurer (si la précision de l'instrument le permettait) sont **uniformément distribuées dans l'intervalle** $[x - \Delta x, x + \Delta x]$.

À partir d'une unique mesure x d'une grandeur, l'incertitude-type est donnée par :

$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \approx \frac{\Delta x}{1,7}}$$

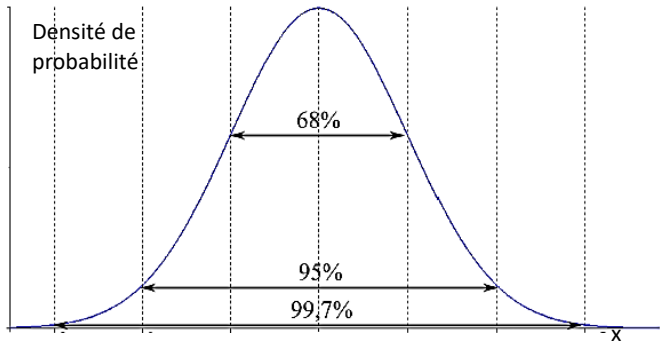
Rq : Par conséquent, lors de l'utilisation d'un appareil gradué, on a $u(x) = \frac{graduation}{\sqrt{12}}$.

➲ Applications n°2, cf p.12.

3) Intervalle de confiance

Un théorème mathématique nommé « théorème central limite » indique que la mesure de x suit une loi normale centrée sur la valeur vraie X_{vraie} et d'écart-type s_x.

- **la probabilité que x soit dans l'intervalle $[X_{vraie} - s_x, X_{vraie} + s_x]$ est de 68%.**
- la probabilité que x soit dans l'intervalle $[X_{vraie} - 2s_x, X_{vraie} + 2s_x]$ est de 95% ($2s_x$ représente une « incertitude élargie »).



4) Incertitude-type composée

En TP, la grandeur physique recherchée est souvent déterminée de façon indirecte en mesurant d'autres grandeurs. Les incertitudes sur les grandeurs mesurées se propagent sur la grandeur calculée.

Ex : on peut déterminer une résistance en mesurant la tension U à ses bornes et l'intensité I traversant la résistance. Les incertitudes sur les mesures de U et I se propagent sur le quotient R.

On cherche à estimer l'incertitude sur une grandeur X calculée à partir de grandeurs mesurées Y et Z que l'on suppose être indépendantes.

◆ Expression des incertitudes-type composées (cas somme/différence/produit/quotient).

On note $u(Y)$ (resp^t $u(Z)$) l'incertitude-type sur Y (resp^t sur Z) .

Cas	Relation	Incertitude
1	$X = \lambda Y$ (λ constante)	$u(X) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(Y)$
2	$X = Y + Z$ ou $X = Y - Z$	$u(X) = \sqrt{u(Y)^2 + u(Z)^2}$
3	$X = Y/Z$ ou $X = Y \cdot Z$	$u(X) = \lvert X\rvert \sqrt{\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + \left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$
4	$X = \lambda Y^a Z^b$	$u(X) = \lvert X\rvert \sqrt{a^2\left(\frac{u(Y)}{Y}\right)^2 + b^2\left(\frac{u(Z)}{Z}\right)^2}$

On peut aussi retenir les cas 3 et 4 en exprimant les incertitudes relatives :

On note $u_r(Y) = \frac{u(Y)}{|Y|}$ (resp^t $u_r(Z) = \frac{u(Z)}{|Z|}$) l'incertitude-type relative sur Y (resp^t sur Z).

Cas	Relation	Incertitude relative
3	$X = Y/Z$ ou $X = Y \cdot Z$	$u_r(X) = \sqrt{u_r(Y)^2 + u_r(Z)^2}$
4	$X = \lambda Y^a Z^b$	$u_r(X) = \sqrt{a^2 u_r(Y)^2 + b^2 u_r(Z)^2}$

NB : Si une incertitude (relative) l'emporte largement sur l'autre, on peut simplifier le calcul en négligeant l'incertitude (relative) la plus faible.

➲ Application n°3, cf p.12.

◆ Incertitudes-type quelconques

Pour les cas où X ne se calcule pas par une expression simple (somme/différence/produit/quotient), on revient à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique aléatoire (Monte-Carlo), on calcule l'incertitude-type : cf § D.2.

C) Régression linéaire

1) Principe général

On considère une série de données :

x	x_1	x_2	x_3	...	...	...	x_m
y	y_1	y_2	y_3	...	...	...	y_m

On souhaite modéliser le comportement de y en fonction de x par une relation affine : $y = a + b.x$.

Le but de la régression linéaire (ou plutôt affine) est :

- de tester la validité de ce modèle ;
- et de **déterminer les coefficients a et b optimaux i.e. les coefficients a et b tels que l'écart entre les données (y_i) et les valeurs calculées via le modèle $(a + b.x_i)$ soit en moyenne minimal.**

Pour simplifier, on supposera que les incertitudes sur x sont négligeables par rapport à celles sur y. On notera σ_i^{exp} l'incertitude-type sur y_i.

Ex de série de données ($m = 12$) :

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
y	14,79	33,52	36,50	51,88	63,11	66,94	74,58	92,46	89,50	109,29	117,40	118,37

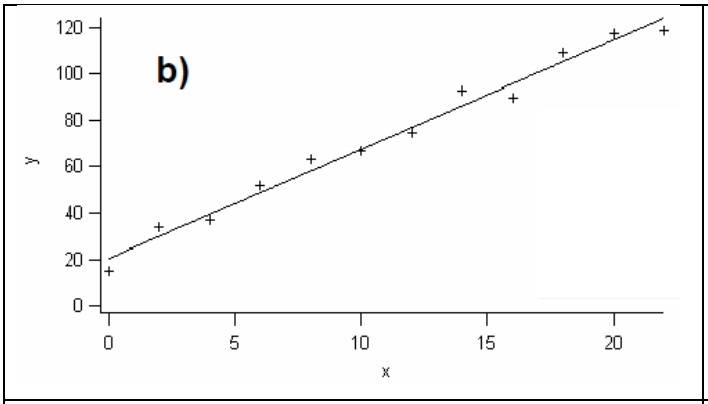
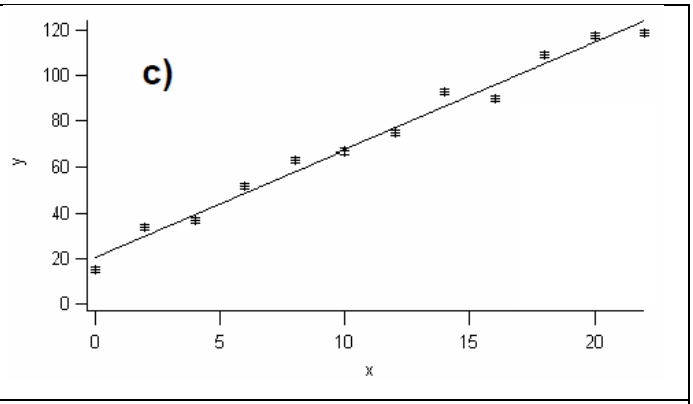
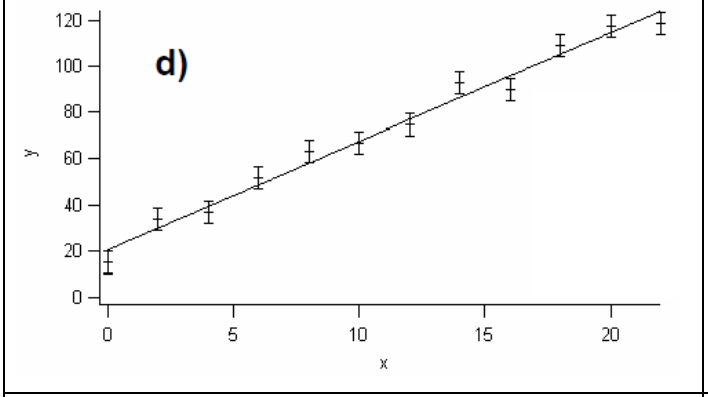
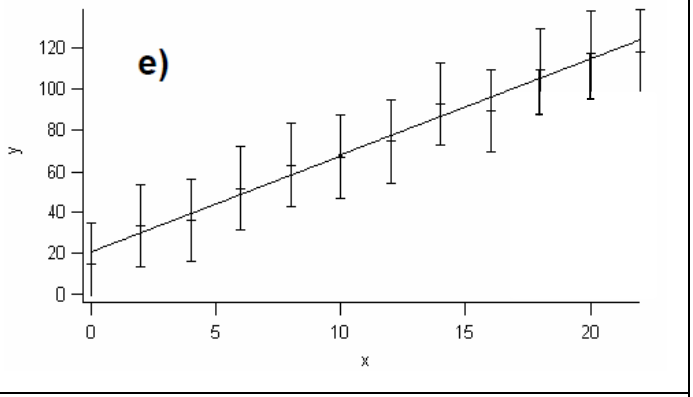
La méthode utilisée, appelée **méthode des moindres carrés**, consiste à chercher les valeurs de a et b qui minimisent la fonction :

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (a + bx_i))^2$$

2) Analyse des résultats – Pertinence du modèle affine

Pour s'assurer qu'une régression linéaire est correcte, on **représente sur le même graphe, les points expérimentaux et la droite de régression**.

- Si l'on constate par exemple que les points ressemblent plus à une parabole qu'à une droite, la régression linéaire ne sera pas l'outil approprié.
- Le modèle affine sera validé si, à l'œil, **les points de mesure sont répartis aléatoirement de part et d'autre de la droite de régression et si la droite passe le plus près possible de tous les points** (fig. (b)).
  Ce jugement peut être grandement affiné en rajoutant les **barres d'incertitudes** sur chaque point de mesure :

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Incertitudes non renseignées</td><td>$\forall i, u(y_i) = \sigma_y^{exp} = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\forall i, u(y_i) = \sigma_y^{exp} = 2{,}5$</td><td>$\forall i, u(y_i) = \sigma_y^{exp} = 10$</td></tr>
</table>

- Fig. (d) : les incertitudes sont comparables aux écarts à la droite.
  Les écarts normalisés vérifient : $\forall i \in [1, m], E_{Ni} = \frac{|y_i - (a+bx_i)|}{u(y_i)} < 2$
  CCL : Les données et leurs incertitudes sont en bon accord avec une loi affine.
- Fig. (c) : les incertitudes sont en moyenne petites par rapport aux écarts à la droite.
  $$\text{plusieurs } i \text{ vérifient : } E_{Ni} = \frac{|y_i - (a + bx_i)|}{u(y_i)} > 2$$
  CCL : Les données et leurs incertitudes ne peuvent être modélisées par une loi linéaire.
  Causes : soit la loi n'est pas linéaire, soit on a sous-estimé les incertitudes expérimentales.
- Fig. (e) : les incertitudes sont grandes par rapport aux écarts à la droite.
  CCL : Les données et leurs incertitudes peuvent être modélisées par une loi linéaire MAIS on a probablement surestimé les incertitudes expérimentales.

Rq : Connaissant les incertitudes sur les données, on réalise une simulation Monte-Carlo pour obtenir les incertitudes sur les coefficients a et b du modèle, cf § D.3.

D) Simulations Monte-Carlo sous Python

1) Fonctions utiles

♦ Module numpy (alias np)

①	②
`for i in range(N):` `  r=np.random.normal(m,s)`	`R=np. random.normal(m,s,N)`

Ces lignes permettent d'obtenir N valeurs réparties selon la loi normale de moyenne m et d'écart-type s. On utilise la fonction **random.normal** lorsqu'on connaît l'**incertitude-type $u(x)$** sur la grandeur d'intérêt x : on choisit alors m = valeur mesurée et s = $u(x)$.

①	②
`for i in range(N):` `  r=np.random.uniform(a,b)`	`R=np.random.uniform(a,b,N)`

Ces lignes permettent d'obtenir N valeurs réparties de manière uniforme entre a et b.
On utilise la fonction **random.uniform** lorsqu'on connaît la **précision / tolérance** Δx sur la grandeur d'intérêt x : on choisit alors a = valeur mesurée - Δx et b = valeur mesurée + Δx .

`M=np.`**`average`**`(M_lst)` permet de calculer la **moyenne** pour une série de mesures rassemblées dans la liste M_lst.
`S=np.`**`std`**`(M_lst,`**`ddof=1`**`)` permet de calculer **l'écart type** pour la série de mesures rassemblées dans la liste M_lst.
Il est nécessaire de bien préciser ddof = 1 pour s'assurer que l'expression de l'écart-type soit celle donnée p.4 : ddof : degrees of freedom = N-1 avec N le nombre de mesures ou de tirages.

`D=np.`**`polyfit`**`(x,y,1)` permet de déterminer la **pente** et **l'ordonnée à l'origine** de la **droite** (polynôme de degré 1) passant au plus près des points de coordonnées (x,y). D[0] donne la pente et D[1] donne l'ordonnée à l'origine.

♦ Module matplotlib.pyplot (alias plt)
`plt.`**`hist`**`(M_lst,bins='rice')` permet de représenter **l'histogramme** d'une série de mesures rassemblées dans la liste M_lst avec un nombre de classes k judicieux *(plus précisément qui respecte le critère de Rice : $k = 2n^{1/3}$ avec n le nombre de mesures)*.

2) Incertitude-type composée

a) Méthode générale

 *Calcul d'**incertitude composée** par **simulation Monte-Carlo***	① Mesurer x et y, et en déduire la valeur de $z(x,y)$ en appliquant la formule. ② Évaluer les précisions / tolérances Δx et Δy. ③ Réaliser N (nombre élevé) simulations par tirage aléatoire uniformément réparties dans l'intervalle $[x-\Delta x, x+\Delta x]$. Faire de même pour y. ④ Déterminer la valeur de z pour chacune des N simulations. ⑤ L'incertitude-type sur l'évaluation de z à partir d'une unique mesure du couple (x,y) est l'écart-type des N valeurs simulées de z.

NB : ② Si on connaît **l'incertitude-type $u(x)$** alors ③ on réalise N simulations par tirage aléatoire selon une **loi normale de moyenne x et d'écart-type $u(x)$** (idem pour y).

b) Application n° 4 : mesures en optique (focométrie) :

On souhaite déterminer la vergence d'une lentille mince. Pour cela, on réalise une image réelle à partir d'un objet réel avec la lentille étudiée. On mesure les distances $x = 15\ cm$ (objet-lentille) et $y = 30\ cm$ (lentille-image). On estime les précisions $\Delta x = 1\ mm$ et $\Delta y = 1\ cm$.

On détermine la vergence à partir de la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = v$$

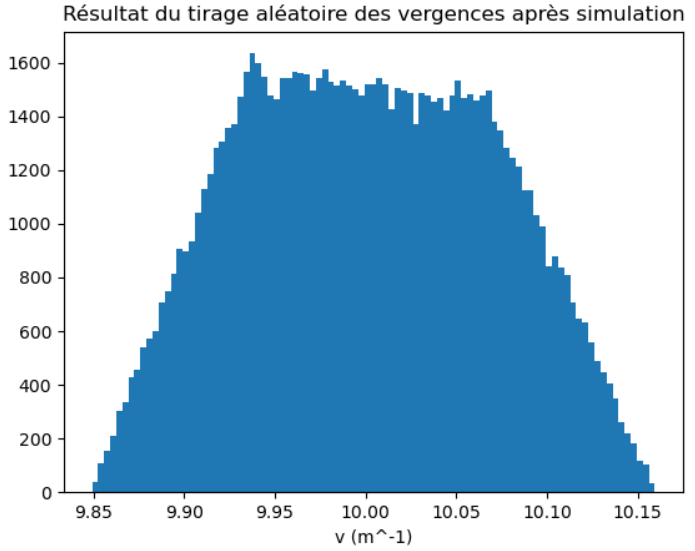
Etant donné la nature réelle de l'objet et de l'image : $\overline{OA} = -x$ et $\overline{OA'} = y$. Ainsi :

$$v = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{x+y}{x.y}$$

Par ailleurs, on souhaite déterminer l'incertitude-type sur l'évaluation de la vergence v à partir de l'unique mesure $(x = 15\ cm, y = 30\ cm)$.

➲ Compléter le fichier python disponible sur cahier de prépa permettant de déterminer l'incertitude-type sur la vergence.

Pour 100 000 simulations, on obtient les résultats suivants :




```
incertitude-type sur la vergence
u(v) = 0.06908805664847384 m^-1 (rappel : ne conserver que 2 CS)

vergence
v = 10.001608423435437 m^-1 (rappel : conserver un nombre de CS cohérent avec la précision de u(v))
```

3) Incertitude-type sur les paramètres d'une régression linéaire

Considérons que nous avons une série de m mesures de couples (x_i, y_i), chacun étant dans un intervalle de demi-largeur $(\Delta x_i, \Delta y_i)$ (en pratique, les précisions sur les différents x_i (ou y_i) sont proches). On modélise le comportement de y en fonction de x par une relation affine : $y = a + b.x$.

Pour estimer l'incertitude-type du coefficient directeur b et de l'ordonnée à l'origine a, il faudrait réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres a et b. Un tel procédé est bien trop long et donc peu pratique. On utilise alors la méthode de Monte-Carlo.

a) Méthode générale

 *Calcul d'**incertitude** sur les **paramètres** a et b d'une **régression linéaire** $y = a + b.x$ par **simulation Monte-Carlo***	① Créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions. ② Réaliser N (nombre élevé) simulations, pour chacune : • Réaliser un tirage aléatoire de m couples (X_i, Y_i), donné par une loi de probabilité uniforme, avec $X_i \in [x_i - \Delta x_i, x_i + \Delta x_i]$ et $Y_i \in [y_i - \Delta y_i, y_i + \Delta y_i]$. • Réaliser une régression linéaire sur cet ensemble de valeurs (m couples (X_i, Y_i)). • Ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression. ③ Calculer les moyennes des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les valeurs de b et a. ④ Calculer les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types de b et a.

NB : ② Si on connaît **les incertitudes-types $u(x_i)$** alors ③ on réalise des tirages aléatoires *de* X_i selon une **loi normale de moyenne x_i et d'écart-type $u(x_i)$** (idem pour Y_i).

b) Application n° 5 : Exemple de mesures en électricité :

On étudie un circuit RC série et on souhaite vérifier la proportionnalité entre son temps caractéristique τ et la résistance R du circuit : $\tau = C \cdot R$ pour un condensateur de capacité $C = 1\ \mu F$. Pour cela, on mesure le temps caractéristique τ_i du circuit pour différentes valeurs R_i de résistance (boîte à décades de résistance). On estime expérimentalement les précisions ΔR_i et $\Delta \tau_i$.

Pour modéliser le comportement de τ en fonction de R par une relation affine, on réalise une régression linéaire :

$$\tau = a \cdot R + b$$

On souhaite obtenir les valeurs des paramètres a et b et les incertitudes-types sur ces paramètres.

Programme en langage Python permettant de déterminer les valeurs des paramètres a et b et les incertitudes-types sur ces paramètres :

Script

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

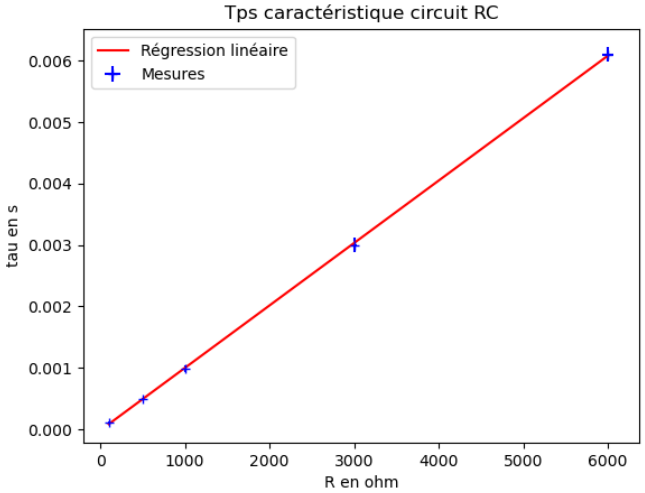
# Résistances R et précision associée en ohm
R = np.array([100,500,1e3,3e3,6e3])
delta_R = np.array([1,5,10,30,60])
# Temps caractéristiques tau et précision associée en s
tau = np.array([1.1e-4,4.9e-4,9.9e-4,30e-4,61e-4])
delta_tau = np.array([0.2e-4,0.2e-4,0.5e-4,1e-4,1e-4])

# Détermination des paramètres pente et ordonnée à l'origine par régression linéaire
pente,ordao = np.polyfit(R,tau,1)

# Nombre de simulations à effectuer
N = 1000

# Calculs avec une distribution de probabilité uniforme
liste_pente,liste_ordao = [], []
for i in range(N):
    l = len(R)
    tirage_R = np.random.uniform(R-delta_R,R+delta_R ,l)
    tirage_tau = np.random.uniform(tau-delta_tau, tau+delta_tau,l)
    p=np.polyfit(tirage_R,tirage_tau,1)
    liste_pente.append(p[0])
    liste_ordao.append(p[1])
u_pente = np.std(liste_pente,ddof=1)
u_ordao = np.std(liste_ordao,ddof=1)
# Tracé de la droite modèle et des points expérimentaux avec les barres d'erreur
abs=np.linspace(min(R),max(R),2)
plt.plot(abs, pente*abs + ordao, 'r', label='Régression linéaire')
plt.errorbar(R,tau,xerr=2*delta_R/np.sqrt(3),yerr=2*delta_tau/np.sqrt(3),fmt='b+', label='Mesures')
plt.title("Tps caractéristique circuit RC")
plt.xlabel("R en ohm")
plt.ylabel("tau en s")
plt.legend()
plt.show()
# Affichage des paramètres du modèle et les incertitudes-types sur ces paramètres
print("incertitude-type sur C u(C) =", u_pente,"F (rappel : *ne conserver que 2 CS)")
print("Capacité C =",pente,"F (rappel : **conserver un nombre de CS cohérent avec la précision de u(C))")
print("incertitude-type sur l'ordonnée à l'origine u(b) =", u_ordao,"s (rappel *)")
print("ordonnée à l'origine b =",ordao,"s (rappel **)")
```

Résultats obtenus




```
incertitude-type sur C
u(C) = 1.1399546180546823e-08 F (rappel : *ne conserver que 2 CS)
Capacité C = 1.0166134185303516e-06 F (rappel : **conserver un nombre de CS cohérent avec la précision de u(C))
incertitude-type sur l'ordonnée à l'origine
u(b) = 1.666594988728938e-05 s (rappel *)
ordonnée à l'origine b = -1.722044728434474e-05 s (rappel **)
```

Applications à savoir refaire

➲ Application n°1 d'après E3A Modélisation PSI 2016

Afin d'améliorer la précision sur la mesure d'une résistance R, on enregistre dix mesures du courant I et de la tension U. Les résultats sont stockés par le système d'acquisition dans le fichier « mesures u et i.txt ».
Compléter le fichier python disponible sur cahier de prépa pour obtenir :

- L'histogramme des valeurs de R
- La valeur moyenne de R
- L'incertitude-type sur la valeur moyenne de R

Pour cela, vous pourrez utiliser les fonctions citées p.8.

➲ Applications n°2

i) Mesurer avec un multimètre

Dans la notice du constructeur d'un multimètre figure conventionnellement la précision Δx ou $a(x)$ de l'appareil qui dépend du calibre choisi (avec x la grandeur physique mesurée).
Elle est donnée par une formule :

- on multiplie la valeur affichée (en valeur absolue) par une constante donnée (souvent exprimée en pourcentage);
- on lui rajoute un multiple de la résolution de l'appareil dans le calibre choisi; cette résolution est la plus petite valeur affichable dans le calibre donné.

En interprétant la notice ci-contre :
• Indiquer quelle est la précision lorsque l'appareil affiche 10,00 V dans le calibre 20 V.
• En déduire la valeur de l'incertitude-type associée.
• Expliquer pourquoi il est préférable de choisir le calibre 20 V plutôt que le calibre 200 V pour réaliser cette mesure.

Plage VC130/150	Précision	Résolution
200 mV	±(0,5% + 8)	0,1 mV
2000 mV		1 mV
20 V		0,01 V
200 V		0,1 V
250 V	±(0,8% + 8)	1 V

ii) Mesurer un volume avec une pipette jaugée

Sur la pipette, il est indiqué avec un ± la tolérance ΔV ou $a(V)$ sur le volume prélevé.
Grâce à l'examen de la photo de la pipette ci-contre, indiquer le volume prélevé et l'incertitude-type associée.



➲ Applications n°3

On a mesuré la concentration d'une espèce en solution par un dosage volumétrique :

$$C = \frac{C_0 \cdot V_E}{V_0}$$

Sachant que l'on connaît les valeurs de C_0, V_E , V_0 ainsi que l'incertitude relative sur C_0 (concentration de la solution titrante) et les incertitudes-types sur V_E (volume équivalent) et V_0 (volume de solution à titrer prélevé), donner l'expression de l'incertitude-type $u(C)$.