TP2 – Signaux périodiques : spectre et filtrage

Problématique :
En quoi le spectre d'un signal est un « outil » approprié pour caractériser ce signal et pour étudier l'action d'un filtre sur ce signal ?

Compétences expérimentales au programme :

Analyse spectrale.	Choisir les paramètres d'une acquisition numérique destinée à une analyse spectrale. Effectuer l'analyse spectrale d'un signal périodique à l'aide d'une carte d'acquisition.
Produire un signal électrique analogique périodique simple à l'aide d'un GBF. Agir sur un signal électrique à l'aide des fonctions simples suivantes : filtrage, intégration.	Obtenir un signal de valeur moyenne, de forme, d'amplitude et de fréquence données. Gérer, dans un circuit électronique, les contraintes liées à la liaison entre les masses. Mettre en œuvre les fonctions de base de l'électronique.
Signaux périodiques.	Commenter le spectre d'un signal périodique : relier la décomposition spectrale et l'allure du signal dans le domaine temporel.
Action d'un filtre linéaire du premier ou du second ordre sur un signal périodique.	Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'action d'un filtre linéaire sur un signal périodique dans les domaines fréquentiel et temporel. Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique. Expliciter les conditions pour obtenir un comportement intégrateur ou dérivateur ou moyenneur.

Objectifs :
- Paramétrer une acquisition puis effectuer et interpréter l'analyse spectrale d'un signal.
- Prévoir l'effet d'un filtrage linéaire sur la composition spectrale d'un signal périodique.
- Choisir et mettre en œuvre des montages électriques permettant :
    - D'intégrer un signal ;
    - De moyenner un signal ;
    - De supprimer la composante continue d'un signal ;
    - De filtrer un harmonique dans le signal.
- Vérifier par une analyse spectrale que le filtre mis en œuvre réalise effectivement la fonction désirée.

A faire pour le jeudi 12/09 : Lire et répondre aux questions ✎ des § A, B1 et B2.
A faire pour le jeudi 19/09 : Lire et répondre aux questions ✎ des § B3 et B4.

A) Analyse spectrale d'un signal périodique

Dans cette partie, on se propose :

- d'enregistrer un signal en **choisissant convenablement les paramètres d'acquisition** ;
- d'obtenir et de commenter son spectre en amplitude.

1) Signal sinusoïdal

✋ Régler le GBF pour qu'il délivre une tension sinusoïdale alternative $s_1(t)$ de **fréquence** $f = \mathbf{1}\ \boldsymbol{kHz}$ et **d'amplitude** $E = \mathbf{2}\ \boldsymbol{V}$.

a) Choix des paramètres d'acquisition

Sous Latis-Pro, on dispose de 3 paramètres d'acquisition : le **nombre de points** de mesure « Points », la période d'échantillonnage « Te » i.e. la durée séparant deux points de mesure (cf DOC 1) et la **durée totale** de l'acquisition « Total ».

Ces trois grandeurs étant reliées : il suffit de choisir la valeur de deux d'entre elles et Latis-Pro calcule et affiche la 3^{e}.

C'est notamment la période (ou la fréquence) du signal à enregistrer qui induit le choix des paramètres d'acquisition, cf DOC 1.

✏➲ 1. Donner la relation entre les grandeurs Points, Te et Total. Pour obtenir un enregistrement « adapté » du signal $s_1(t)$ proposer des valeurs adéquates pour les paramètres d'acquisition « Total », « Points » et « Te ».

NB : On reviendra sur la notion de fréquence d'échantillonnage lors du TP « Electronique numérique ».

b) Analyse spectrale du signal sinusoïdal

✋ Après avoir fait l'acquisition, effectuer l'analyse de Fourier sous Latis Pro, cf DOC 2.

➲ 2. Relever les fréquences et les amplitudes associées apparaissant dans le spectre. **Analyser ce résultat.**

✋ Acquérir de nouveau le signal avec un offset du GBF non nul.

➲ 3. Quel est l'effet de cet offset sur le spectre ?

2) Signal triangle

✋ Régler le GBF pour qu'il délivre une tension triangle alternative $s_2(t)$ de **fréquence** $f = \mathbf{1}\ \boldsymbol{kHz}$ et **d'amplitude** $E = \mathbf{2}\ \boldsymbol{V}$.

✋ Après avoir fait l'acquisition, effectuer l'analyse de Fourier.

➲ 4. Relever les fréquences et les amplitudes associées apparaissant dans le spectre. **Analyser ce résultat**, cf DOC 3**.**

3) Signal créneau

✋ Régler le GBF pour qu'il délivre une tension créneau alternative $s_3(t)$ de **fréquence** $f = \mathbf{1}\ \boldsymbol{kHz}$ et **d'amplitude** $E = \mathbf{2}\ \boldsymbol{V}$.

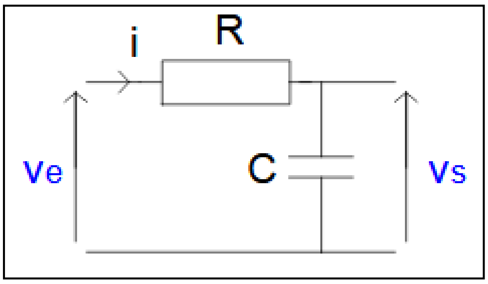
✋ Après avoir fait l'acquisition, effectuer l'analyse de Fourier.

➲ 5. Relever les fréquences et les amplitudes associées apparaissant dans le spectre. **Analyser ce résultat**, cf DOC 3**.**

B) Filtrage linéaire passif d'un signal périodique

1) Filtre passe-bas du 1er ordre

a) Etude théorique



✐➲ 6. Vérifier la nature du filtre par une étude qualitative.

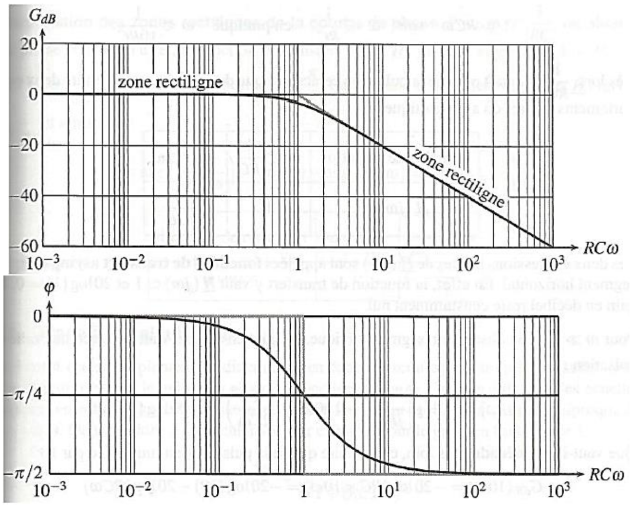
✐➲ 7. Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre. En déduire l'équation différentielle associée.

✐➲ 8. Interpréter les zones rectilignes du diagramme de Bode fourni ci-dessous.

✐➲ 9. Montrer que la pulsation de coupure du filtre est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.

✐➲ 10. Préciser la(les) condition(s) pour que le filtre se comporte comme un intégrateur.

Diagramme de Bode théorique :



b) Etude expérimentale

On choisit : **R = 1 kΩ et C = 1 µF.**

◆ **Tracé du diagramme de Bode :**

✐➲ 11. Proposer un protocole permettant d'établir le diagramme de Bode expérimental du filtre.

✋ Une fois validé, mettre en œuvre le protocole et tracer G_{dB} en fonction de f et φ en fonction de f.

➲ 12. Déterminer les asymptotes du diagramme de Bode expérimental. Commenter.

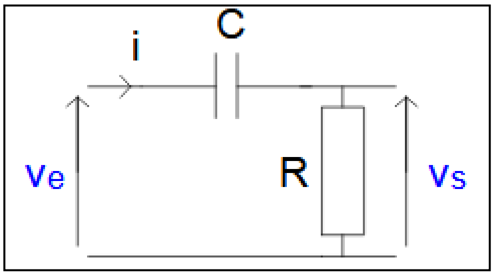
◆ **Filtrage d'un signal créneau :**

✋ On applique un signal d'entrée e(t) créneau de fréquence f qui oscille entre 0 et 4 V à l'entrée du filtre. Sous Latis Pro, acquérir les signaux d'entrée et de sortie a) pour $f = \frac{f_c}{10}$; b) pour $f = 10.f_c$.

➲ 13. Pour chaque cas, comparer le spectre du signal d'entrée à celui du signal de sortie et interpréter la forme du signal de sortie en vous appuyant sur le diagramme de Bode du filtre et sur les spectres.

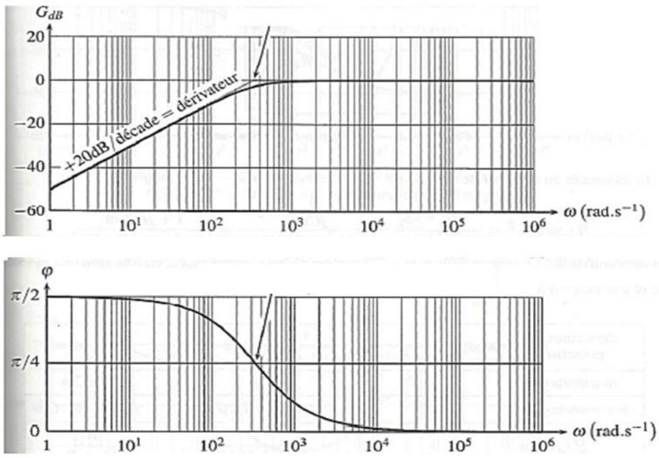
2) Filtre passe-haut du 1er ordre

a) Etude théorique



✐➲ 14. Vérifier la nature du filtre par une étude qualitative.
✐➲ 15. Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre.
✐➲ 16. Interpréter les zones rectilignes du diagramme de Bode fourni ci-dessous.
✐➲ 17. Montrer que la pulsation de coupure du filtre est $\omega_c = \frac{1}{RC}$.
✐➲ 18. Préciser la(les) condition(s) pour que le filtre se comporte comme un dérivateur.

Diagramme de Bode théorique :



b) Etude expérimentale

On choisit : **R = 1 kΩ et C = 1 μF.**

◆ **Filtrage d'un signal sinusoïdal non alternatif :**

☝ On applique un signal d'entrée e(t) sinusoïdal de fréquence $f > 10.f_c$ qui oscille entre 0 et 4 V à l'entrée du filtre. Sous Latis Pro, acquérir les signaux d'entrée et de sortie et effectuer l'analyse de Fourier.

➲ 19. Comparer les spectres du signal d'entrée et de sortie et interpréter la forme du signal de sortie.

◆ **Caractère dérivateur d'un filtre passe-haut du premier ordre :**

✐➲ 20. Proposer un signal d'entrée judicieusement choisi pour vérifier expérimentalement que ce filtre peut se comporter en dérivateur.

☝ Une fois validé, mettre en œuvre le protocole.

➲ 21. Vérifier la cohérence entre résultats théorique (qt°18) et expérimental.

◆ **Filtrage d'un signal créneau – Prévision du spectre du signal de sortie :**

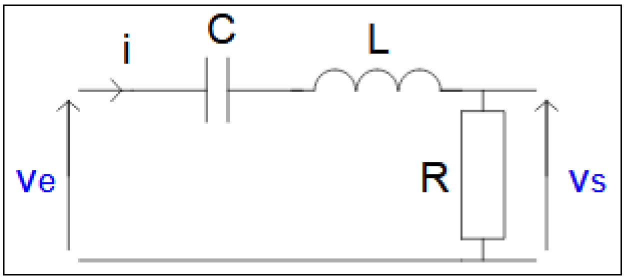
☝ On applique un signal d'entrée e(t) créneau de fréquence $f = 160\ Hz$ qui oscille entre 0 et 4 V à l'entrée du filtre. Sous Latis Pro, acquérir les signaux d'entrée et de sortie et effectuer l'analyse de Fourier.

☝ Sous Excel, Latis Pro ou Regressi, construire et remplir le tableau suivant :

	$f_n\ (en\ Hz)$	$E_n\ (en\ V)$ théoriques du signal d'entrée *cf DOC 3*	$E_n\ (en\ V)$ expérimentales du signal d'entrée *Cf spectre*	$G(f)$ *Cf qt°15*	$S_n\ (en\ V)$ théoriques du signal de sortie	$S_n\ (en\ V)$ expérimentales du signal de sortie *Cf spectre*
$n = 0$	0	$E_{0t} = \cdots$	$E_{0e} = \cdots$	$G(0) =$	$S_{0t} = \cdots$	$S_{0e} = \cdots$
$n = 1$	$f_1 = 160$	$E_{1t} = \cdots$	$E_{1e} = \cdots$	$G(f_1) =$	$S_{1t} = \cdots$	$S_{1e} = \cdots$
$n = 3$	$f_3 = \cdots$					
$n = 5$						
$n = 7$						

➲ 22. Analyser les résultats du tableau.

3) Filtre passe-bande du 2nd ordre



a) Etude théorique

✐➲ 23. Vérifier la nature du filtre par une étude qualitative.

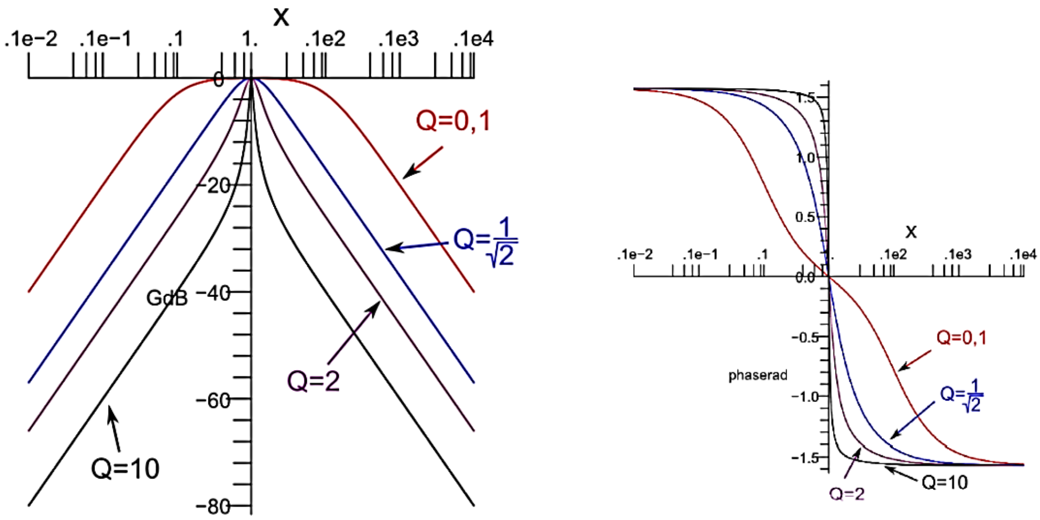
✐➲ 24. Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre. Montrer qu'on peut la mettre sous les formes suivantes :

$$\underline{T} = \frac{T_0 . 2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2jm\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \textit{ou} \quad \underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{T_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

✐➲ 25. Interpréter les zones rectilignes du diagramme de Bode fourni ci-dessous.

✐➲ 26. Déterminer les pulsations de coupure du filtre et montrer que la largeur de sa bande passante à -3dB vérifie : $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. Vérifier la cohérence avec les diagrammes de Bode ci-dessous.

Diagramme de Bode théorique avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ *:*



b) Etude expérimentale

On choisit **L = 1 H**, **C = 0,1 µF** et on règle la résistance variable à **250 Ω**.

◆ **Diagramme de Bode** :

➲ 27. Déterminer la fréquence centrale, les fréquences de coupure et la largeur de la bande passante sur le diagramme tracé. **Analyser ce résultat.**

✋ Câbler le circuit correspondant au filtre en plaçant un **montage suiveur**, cf DOC 4, entre le GBF et le circuit *(me demander). Dans cette situation, l'intérêt du montage suiveur est de s'affranchir de la résistance interne du GBF.*

◆ **<u>Filtrage d'un signal créneau</u> :**

✋ On applique un signal d'entrée e(t) créneau alternatif de fréquence $f = 167\ Hz$ d'amplitude 5 V à l'entrée du filtre. Sous Latis Pro, acquérir les signaux d'entrée et de sortie et effectuer l'analyse de Fourier.

➲ 28. Analyser les spectres pour interpréter l'influence du filtrage et la forme du signal de sortie.

◆ **<u>Caractère intégrateur d'un filtre passe-bande du 2nd ordre</u> :**

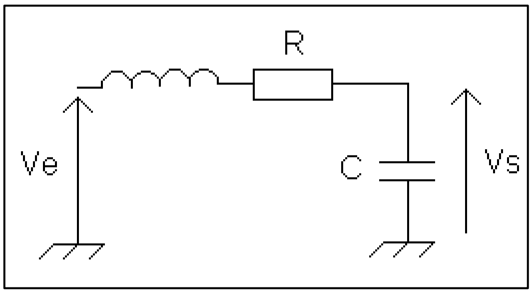
✏➲ 29. Proposer un signal d'entrée judicieusement choisi pour vérifier expérimentalement que ce filtre peut se comporter en intégrateur.

✋ Une fois validé, mettre en œuvre le protocole.

➲ 30. Commenter le résultat obtenu.

4) Filtre passe-bas du 2nd ordre

a) Etude théorique



✎➲ 31. Vérifier la nature du filtre par une étude qualitative.

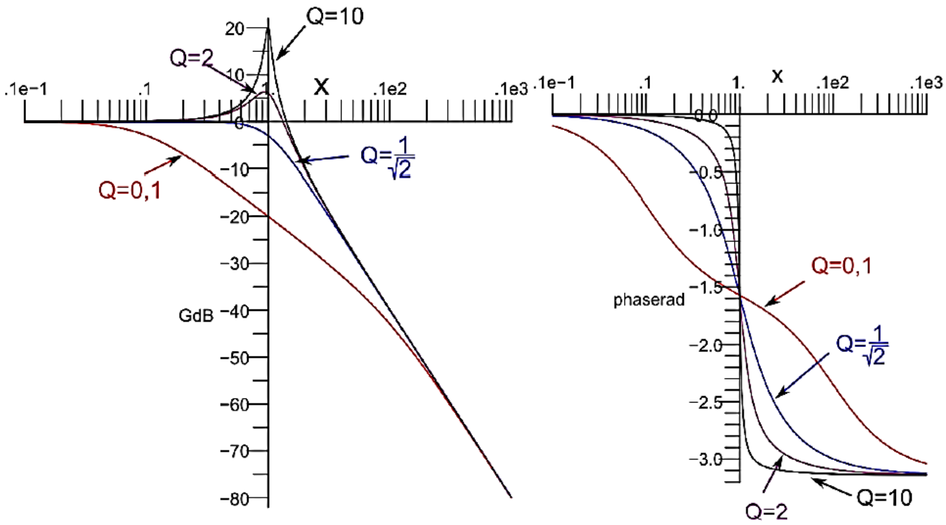
✎➲ 32. Etablir l'expression de la fonction de transfert du filtre. Montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad avec\ x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

✎➲ 33. Interpréter les zones rectilignes du diagramme de Bode fourni ci-dessous.

✎➲ 34. Discuter de l'existence d'une résonance du gain en fonction de la valeur de Q. Comparer au diagramme de Bode ci-dessous.

Diagramme de Bode théorique avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:



Résonance ssi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Etude expérimentale

On choisit **L = 1 H**, **C = 0,1 µF** et on règle la résistance variable à **250 Ω**.

◆ **Tracé du diagramme de Bode** :

☝ Réaliser les mesures permettant d'obtenir la courbe de gain.

➲ 35. Déterminer les asymptotes du diagramme de Bode expérimental. Commenter.

◆ **Filtrage d'un signal créneau :**

☝ On applique un signal d'entrée e(t) créneau de fréquence f qui oscille entre 0 et 4 V à l'entrée du filtre. Sous Latis Pro, acquérir les signaux d'entrée et de sortie pour $f = 10.f_0$ et effectuer l'analyse de Fourier.

➲ 36. En vous appuyant sur le diagramme de Bode du filtre et sur les spectres, interpréter la forme du signal de sortie. Comparer au cas du filtre passe-bas du 1er ordre, cf qt° 13.

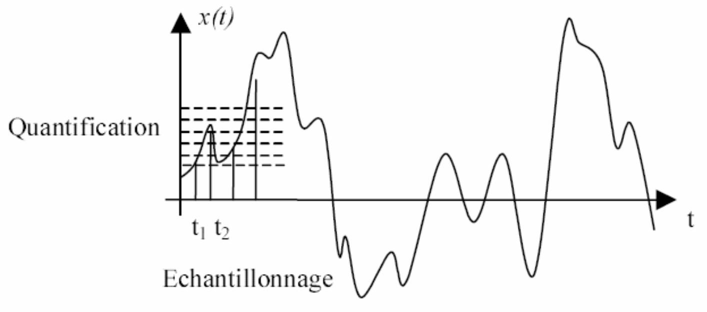
5) Bilan sur les filtres passe-bas et passe-haut du 1er ordre et passe-bande du 2nd ordre

	Passe-bas du 1er ordre	Passe-haut du 1er ordre	Passe-bande du 2e ordre
Caractère intégrateur / dérivateur	**Intégrateur** pour un signal de fréquence $f > 10.f_c$	**Dérivateur** pour un signal de fréquence $f_{max} < \frac{f_c}{10}$	**Intégrateur** pour un signal de fréquence $f > 10.f_0$ Dérivateur pour un signal de fréquence $f_{max} < \frac{f_0}{10}$
Effet sur la valeur moyenne	Conserve la valeur moyenne du signal d'entrée **Moyenneur** pour un signal de fréquence $f > 100.f_c$	**Supprime la valeur moyenne** du signal d'entrée ⇨ signal de sortie alternatif	**Supprime la valeur moyenne** du signal d'entrée ⇨ signal de sortie alternatif
Effet sur les harmoniques de rangs élevés	**Supprime** les composantes **harmoniques de rangs élevés** du signal d'entrée ⇨ **supprime les discontinuités** du signal	**Conserve les discontinuités** du signal d'entrée	**Supprime** les composantes **harmoniques de rangs élevés** du signal d'entrée ⇨ **supprime les discontinuités** du signal

DOC 1 : Choix de la fréquence d'échantillonnage – Théorème de Shannon

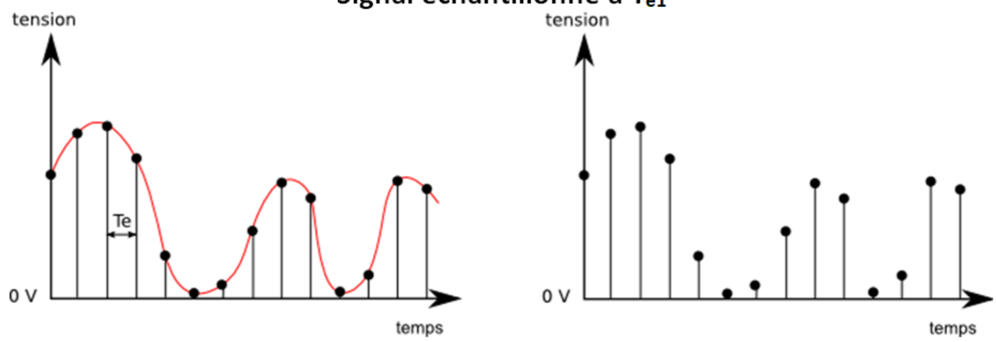
Source : culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/principe-numerisation.xml

Afin d'être traité de façon informatique ou d'être stocké sous forme numérique, un signal doit d'abord être **numérisé**, i.e. **quantifié et échantillonné**.
La quantification correspond à une discrétisation en amplitude (cf TP « Electronique numérique ») alors que l'échantillonnage correspond à une discrétisation dans le temps (cf figure ci-contre).

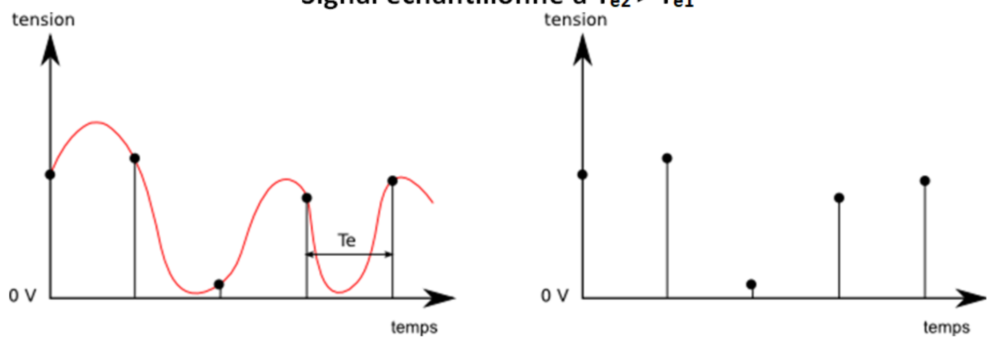


Voici deux exemples d'échantillonnage du même signal pour deux fréquences $f_{e1} = \frac{1}{T_{e1}} < f_{e2} = \frac{1}{T_{e2}}$.

Signal échantillonné à T_{e1}



Signal échantillonné à $T_{e2} > T_{e1}$



Dans le 1er exemple, la fréquence d'échantillonnage choisie permet de reproduire les variations du signal. Ce qui n'est pas le cas du 2e exemple : il est clair que les échantillons recueillis ne sont pas suffisants pour reconstruire le signal d'origine. $\boldsymbol{f_e}$ **doit être maximale pour que le signal échantillonné soit fidèle au signal de départ**. En pratique, les dispositifs d'acquisition sont **limités en fréquence et un nombre d'échantillons trop élevé peut poser problème** : temps de calcul, volume de stockage de données... Il est donc nécessaire de préciser un **critère de fréquence**.

Théorème de Shannon :
Pour reconstruire un signal de sortie de manière fidèle au signal d'entrée, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale contenue dans le signal d'entrée.
Ce théorème est à retenir et à appliquer lorsque vous effectuerez une analyse spectrale !

Si cette règle n'est pas respectée, des fréquences parasites qui n'appartiennent pas au signal de départ apparaissent. Ce phénomène s'appelle le repliement spectral, cf TP « Electronique numérique ».

NB : Pour choisir la fréquence d'échantillonnage, le critère de Shannon est nécessaire mais non suffisant. Par exemple, pour un signal sinusoïdal, la fréquence maximale du spectre correspond à la fréquence fondamentale f_1. Il est clair que si on l'on choisit $f_e = 2f_1$, le signal échantillonné ne sera pas fidèle au signal de départ…

DOC 2 : Procédure d'analyse de Fourier avec Latis Pro

Cliquer sur l'icône « Traitements » puis « Calculs spécifiques » puis « Analyse de Fourier ».
Une boîte de dialogue apparaît dans laquelle il faut renseigner « courbe à analyser ». Pour cela, cliquer sur l'icône . Glisser-déplacer la courbe EA… dans la boîte de dialogue de l'analyse de Fourier puis cliquer sur « Calcul ».
Pour afficher le spectre en amplitude :

- cliquer sur « Fenêtre » puis « Nouvelle fenêtre » ;
- cliquer sur « Fenêtre » puis « Mosaïque automatique » ;
- dans la fenêtre graphique vide, glisser-déplacer la courbe spectre en amplitude.

DOC 3 : Décomposition de Fourier

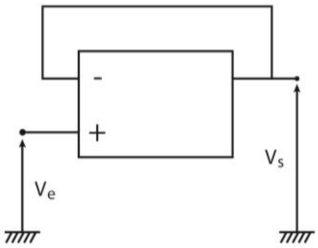
Un signal périodique peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n))$$

Pour un signal triangulaire alternatif :	Pour un signal créneau alternatif :
$C_n = 0$ pour n pair et $C_n = \frac{8E}{\pi^2 n^2}$ pour n impair	$C_n = 0$ pour n pair et $C_n = \frac{4E}{\pi n}$ pour n impair

avec E l'amplitude du signal

DOC 4 : Montage suiveur



Ce montage met en jeu un amplificateur opérationnel (A.O. ou A.L.I., amplificateur linéaire intégré). Dans le cadre du modèle d'un A.O. idéal en régime linéaire, $\boldsymbol{V_s} = \boldsymbol{V_e}$. L'intérêt de ce montage est d'obtenir une **forte impédance d'entrée** $|\underline{\boldsymbol{Z_e}}|$.