Chapitre T4. Transferts thermiques



Jean Baptiste Joseph Fourier *(1768 - 1830) est un mathématicien et physicien français. Il est en particulier connu pour avoir étudié la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction en une série trigonométrique : série de Fourier. La transformation de Fourier est une « méthode » qui s'applique à bien d'autres domaines : théorie du signal, imagerie numérique…*

INTRO :

Il existe trois modes de transfert thermique : par convection, par rayonnement et par conduction. On étudie dans ce chapitre le transfert thermique par conduction au sein de systèmes **solides**.

La conduction thermique a lieu au sein d'un système dont la température n'est pas uniforme : on appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel **l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique**. Pour le décrire, on introduit la fonction température $\boldsymbol{T(M,t)}$ qui dépend de l'instant t et du point M considéré. Cependant, on restreint l'étude à des problèmes tels que la température ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale.

Pour établir l'équation qui régit les variations spatio-temporelles de la température, on utilise un **bilan local d'énergie interne**, déduit du 1er principe de la thermodynamique, sous **forme différentielle**.

Buts de ce chapitre : Etablir l'équation de la chaleur en utilisant la loi de Fourier ; établir une analogie électro-thermique dans le cas du régime stationnaire ; introduire la loi de Newton qui décrit les échanges conducto-convectifs.

Prérequis :
MPSI : Thermodynamique et Electrocinétique
MP : T1 Transformations infinitésimales

Plan du chapitre :

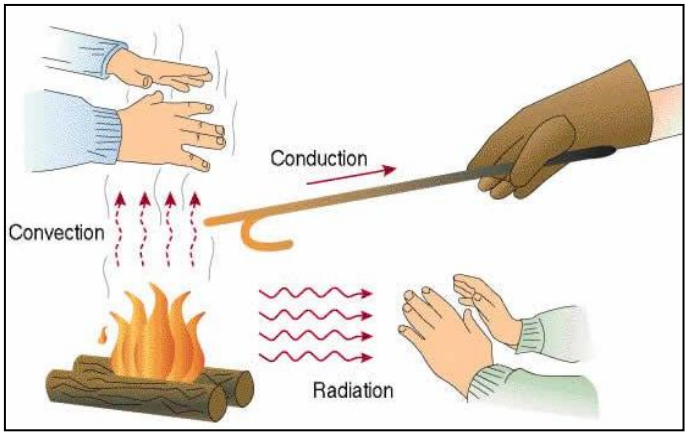
1e partie : Les trois types de transferts thermiques 2
2e partie : Transferts thermiques conductifs 3
A) Flux (ou puissance) thermique – Loi de Fourier 3
1) Vecteur densité de flux thermique 3
2) Loi phénoménologique de Fourier 4
B) Bilan énergétique – Equation de la chaleur 5
1) Bilan local d'énergie interne 5
2) Equation de la diffusion thermique (= équation de la chaleur) 7
C) Cas particulier du régime stationnaire en l'absence de source 10
1) Conservation du flux thermique 10
2) Profil de température en régime stationnaire – Expression du flux thermique 10
3) Analogie avec la conduction électrique – Résistance thermique 11
4) Expression de résistances thermiques 12
5) Associations de résistances thermiques 13
D) Application : Thermique de l'habitat – ARQS thermique 14
1) Bilan thermique 14
2) Dans l'ARQS : expression des pertes thermiques et analogie thermo-électrique 14
E) Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique 1D 15
1) Méthode des différences finies 15
2) Mise en œuvre : cf TP 15

1e partie : Les trois types de transferts thermiques

Un système thermodynamique peut échanger de l'énergie sans l'intervention d'une action mécanique mesurable à l'échelle macroscopique. Ce transfert d'énergie complémentaire du travail mécanique s'appelle **TRANSFERT THERMIQUE (ou CHALEUR) et est noté Q (USI : J)**. Il n'est perceptible à l'échelle macroscopique que par la transformation des systèmes qu'il provoque : variation de température, changement d'état physique...

Un système (Σ_1) de température T_1 fournit effectivement de l'énergie à un système (Σ_2) de température T_2 si $T_2 < T_1$.
Dans ce cas, la chaleur Q_2 reçue par (Σ_2) de la part de (Σ_1) est positive et la chaleur Q_1 reçue par (Σ_1) de la part de (Σ_2) est négative : $Q_1 = -Q_2$.

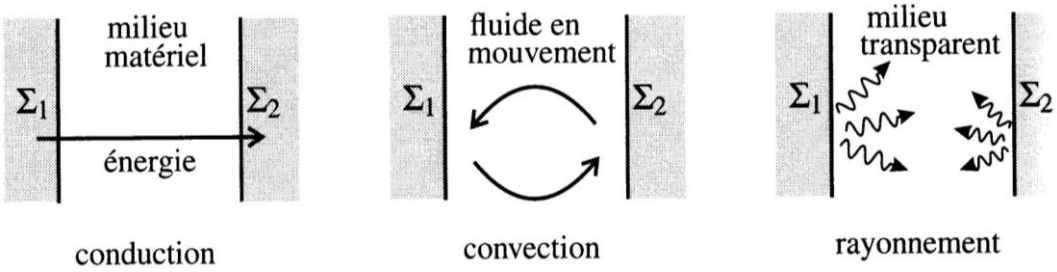
Il existe trois modes de transfert thermique :



- La **CONVECTION THERMIQUE** met en jeu un **fluide qui est en mouvement** entre les deux systèmes : il reçoit de l'énergie du système chaud et cède de l'énergie au système froid.

- Le **RAYONNEMENT THERMIQUE** met en jeu les ondes électromagnétiques émises par les entités des systèmes en agitation thermique. Les photons émis par l'un des systèmes sont reçus par l'autre qui en absorbe une partie. Il y a transfert d'énergie dans les deux sens. Cependant, comme le système chaud émet plus d'énergie que le système froid, le transfert d'énergie global se fait du système chaud vers le système froid. Ce mode de transfert ne nécessite pas la présence d'un milieu matériel.

- La **CONDUCTION THERMIQUE** *(objet de ce chapitre)* intervient lorsque les deux systèmes sont séparés par un **milieu matériel immobile**, par exemple une paroi solide. Le transfert d'énergie résulte des collisions entre les particules microscopiques constituant les systèmes et la paroi. Ces particules sont animées d'un mouvement d'agitation thermique quelle que soit l'état des systèmes (solide, liquide ou gaz). Les particules du système (Σ_1) ayant la température la plus élevée (système chaud) ont une énergie cinétique d'agitation thermique supérieure à celle du système (Σ_2) ayant une température plus basse (système froid). Lors des chocs, les particules de (Σ_1) cèdent de l'énergie aux particules de la paroi et les particules de (Σ_2) reçoivent de l'énergie de la paroi.



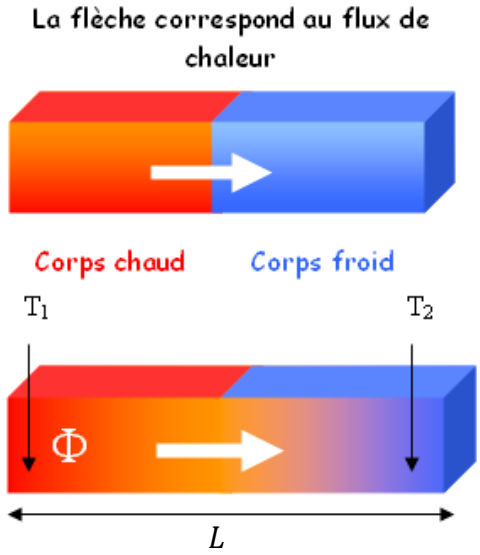
Ex : Le transfert thermique entre l'intérieur d'une habitation et l'extérieur est :
- conductif à travers un mur ou une fenêtre fermée ;
- convectif à travers une fenêtre ouverte ;
- radiatif quand le rayonnement du soleil entre à travers une vitre.

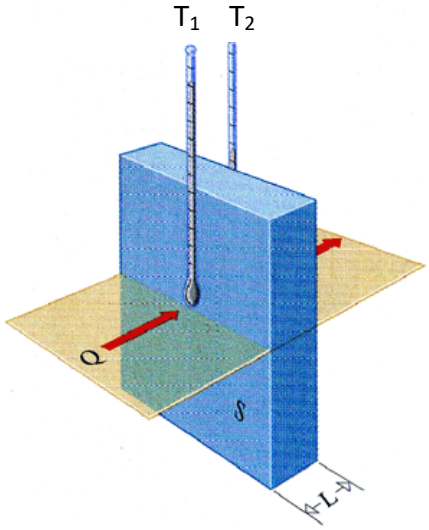
2e partie : Transferts thermiques conductifs

A) Flux (ou puissance) thermique – Loi de Fourier

1) Vecteur densité de flux thermique

La présence dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique **d'une inhomogénéité (= non uniformité) de température** fait apparaître un **FLUX THERMIQUE** par conduction qui possède les caractéristiques suivantes :
- il a lieu **spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides** ;
- *pour un problème unidimensionnel*, il est **proportionnel à l'aire de la surface S** à travers laquelle s'effectue le transfert thermique ;
- il est **d'autant plus élevé que la variation spatiale de température est importante**.





On note $\boldsymbol{\Phi^{1\to2}}$ **le flux thermique ou puissance thermique** à travers une surface S dans le sens $1 \to 2$. C'est une grandeur scalaire **algébrique homogène à une puissance (USI : W)** :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi^{1\to2} = \frac{\delta Q^{1\to2}}{dt} \Leftrightarrow \delta Q^{1\to2} = \Phi^{1\to2} \cdot dt}}$$

avec $\delta Q^{1\to2}$ la chaleur élémentaire (USI : J) traversant S dans le sens $1 \to 2$ entre t et $t + dt$ avec dt une durée infinitésimale.

Rq :
- *Si (1) correspond à une zone de température supérieure à celle de la zone (2) alors* $\delta Q^{1\to2} > 0$ *donc* $\Phi^{1\to2} > 0$. *Evidemment,* $\Phi^{1\to2} = -\Phi^{2\to1}$.
- *On trouve différentes notations pour le flux/puissance thermique :* $\Phi^{1\to2}$, ${P_{th}}^{1\to2}$ *ou* $\dot{Q}^{1\to2}$.

Pour s'affranchir de la surface S, on définit le **vecteur densité de flux thermique** $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}}}$, noté également $\overrightarrow{\boldsymbol{j_Q}}$. C'est un **vecteur colinéaire à la direction selon laquelle la température varie[*1] et homogène à un flux (ou une puissance) surfacique (USI : W.m^{-2})** :

$$\boxed{\boldsymbol{\Phi^{1\to2} = \iint_S \overrightarrow{j_{th}} . \overrightarrow{dS_{1\to2}}}}$$

Avec $\overrightarrow{dS_{1\to2}}$ un vecteur élément de surface, normal à la surface et orienté dans le sens $1 \to 2$.
Sens de $\overrightarrow{j_{th}}$: $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}}}$ **est orienté des hautes vers les basses températures[*2].**

2) Loi phénoménologique de Fourier

Expérimentalement, si les variations (spatio-temporelles) de températures ne sont pas trop importantes, on rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur par la Loi de Fourier (1807).

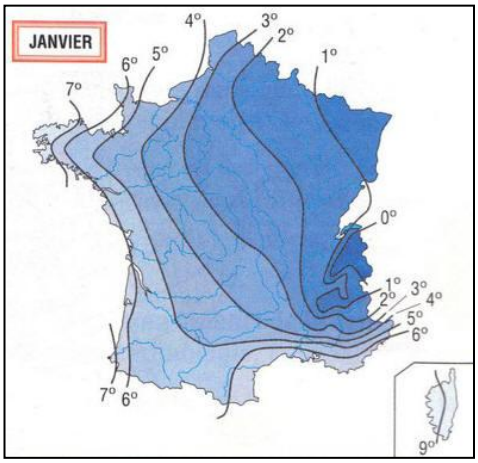
LOI DE FOURIER : Il existe un coefficient **positif** λ, caractéristique du **matériau** dans lequel la conduction thermique a lieu, tel que :

$$\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda . \overrightarrow{grad}\, T$$

λ est appelé **conductivité thermique** (USI : $W.m^{-1}.K^{-1}$)

- *Gradient de température $\overrightarrow{grad}\, T$ (USI : $K.m^{-1}$) – Cohérence avec les propriétés de $\overrightarrow{J_{th}}$*

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite *surface isotherme, cf ci-contre*.



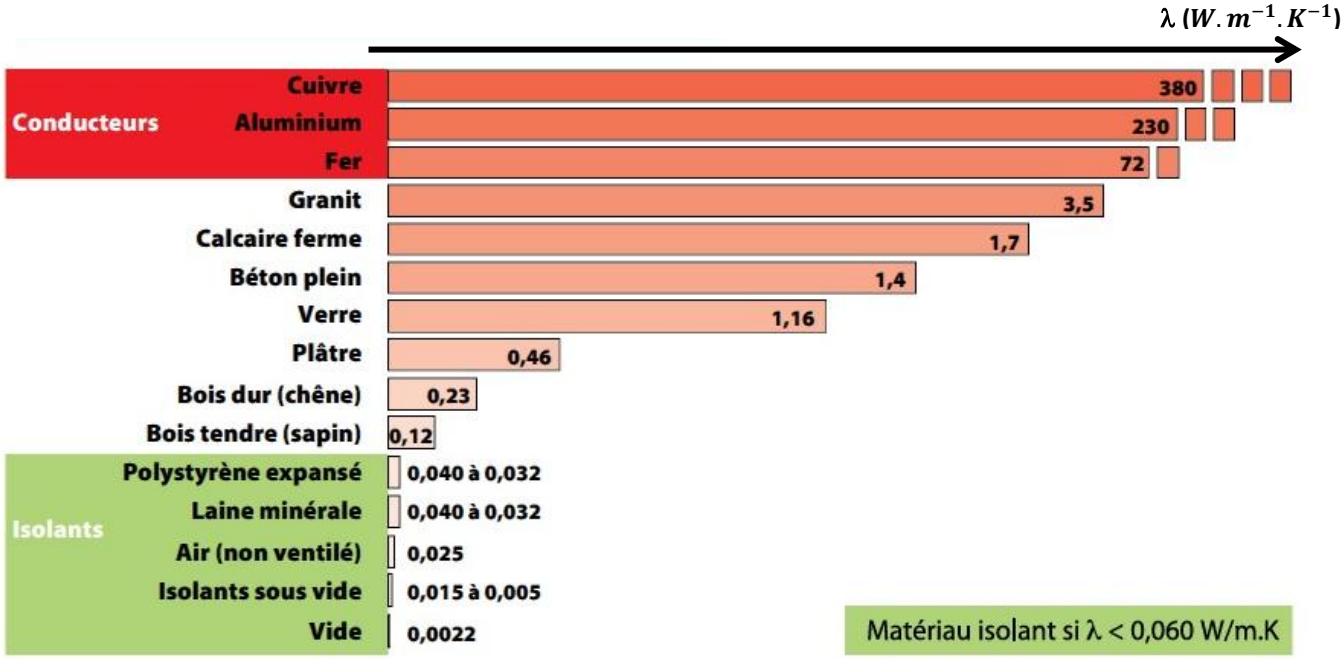
L'opérateur gradient **quantifie la non uniformité de la température**.

La loi de Fourier $\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda . \overrightarrow{grad}\, T$ traduit mathématiquement les propriétés du flux thermique :

- $\overrightarrow{J_{th}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{grad}\, T$, il est donc normal à l'isotherme (cohérent avec [*1] p.3) ;
- le coefficient de proportionnalité entre $\overrightarrow{J_{th}}$ et $\overrightarrow{grad}\, T$ est négatif, $\overrightarrow{J_{th}}$ est donc orienté des zones chaudes vers les zones froides (cohérent avec [*2] p.3).

- *Conductivité thermique λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)*

Selon le matériau dans lequel s'effectue le transfert thermique, la puissance transmise est plus ou moins grande ; on parle de matériaux conducteurs ou isolants.



ODG à connaître :

Conducteurs thermiques	Eau ; verre	Isolants thermiques : air, laine de verre
Ex : $\lambda(acier) \sim 50\ W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda \sim 1\ W.m^{-1}.K^{-1}$	$\lambda \sim 10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}$

B) Bilan énergétique – Equation de la chaleur

1) Bilan local d'énergie interne

On considère un système (Σ) **solide** immobile, assimilé à une **PCI**, constitué d'un matériau caractérisé par : ρ sa **masse volumique**, c sa **capacité thermique massique** *et* λ sa **conductivité thermique**.
On note $T(M,t)$ le champ de température au sein du système (Σ) : T varie au cours du temps et T n'est pas uniforme*, il y a donc **conduction thermique** au sein de (Σ).
* *on se limite ici au cas où T dépend d'une seule variable de l'espace.*

Pour obtenir une équation locale reliant $T(M,t)$ au vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$, on applique le **1er principe de la thermodynamique pour une transformation élémentaire** entre t et $t+dt$ à un **volume élémentaire de (Σ)**. On établit cette équation dans 3 géométries (§ a, b, c) et on admet la généralisation (§ d).

Il peut exister à l'intérieur du système des **processus qui dégagent ou absorbent de l'énergie thermique**, on parle de **terme source**.
Ex : Effet Joule dans un conducteur ohmique traversé par un courant, désintégrations nucléaires dans un matériau radioactif, réaction chimique endo/exo-thermique, cf TD.

Pour prendre en compte ces processus, on introduit généralement $\mathbb{P}_V$ **la puissance thermique volumique produite (ou créée) algébriquement** (USI : W.m^{-3}). Elle est positive si le processus dégage réellement de l'énergie thermique, négative si elle en absorbe.
La puissance thermique produite dans un élément de volume $d\tau(M)$ autour du point M s'écrit :

$$\mathbb{P}_V(M,t).d\tau(M)$$

En l'absence de terme source, on a $\mathbb{P}_V(M,t)=0$.

a) En géométrie unidimensionnelle cartésienne : cf p.6
b) En géométrie cylindrique : cf p.6
c) En géométrie sphérique : cf p.6

d) Généralisation
Pour généraliser le bilan de puissance volumique, on introduit le scalaire $\boldsymbol{div\,\overrightarrow{j_{th}}}$ *(qui se lit "divergence du vecteur densité de flux thermique")*, cf *fiche outils maths « analyse vectorielle »*.
En présence d'un terme source, on a :

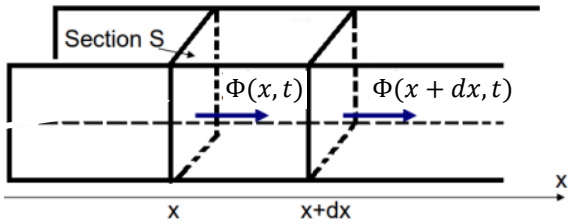
$$\underbrace{\boldsymbol{\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}}}_{stockage} = \underbrace{\boldsymbol{-div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t)}}_{transfert\ conductif\ entrant} + \underbrace{\mathbb{P}_V}_{source}$$

Sans terme source, on a :

$$\boldsymbol{\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t)}$$

Avec ρ la **masse volumique** et c la **capacité thermique massique**.

Sous cette forme, ces équations sont indépendantes du système de coordonnées choisi et permettent de décrire la conduction dans le cas général où T dépend du temps et des 3 coordonnées spatiales.

Géométrie	**a) unidimensionnelle cartésienne**	**b) cylindrique**	**c) sphérique**
Champ de température au sein du système (Σ)	La température dépend du temps et d'une seule variable d'espace cartésienne, x : $\boldsymbol{T(M,t) = T(x,t)}$	La température est invariante par rotation autour d'un axe (Oz) et par translation le long de (Oz). En coordonnées **cylindriques** : $\boldsymbol{T(M,t) = T(r,t)}$	La température est invariante par rotation autour d'un point O. En coordonnées **sphériques** : $\boldsymbol{T(M,t) = T(r,t)}$
Volume élémentaire considéré	**Parallélépipède** de section S situé entre les abscisses x et $x + dx$: 	Portion de matériau comprise **entre les cylindres** $C(r)$ et $C(r+dr)$ d'axe (Oz), de hauteur H et de rayons respectifs r et $r + dr$:	Portion de matériau comprise **entre les sphères** $S(r)$ et $S(r+dr)$ de centre O et de rayons respectifs r et $r + dr$:
Bilan de puissance volumique	♦ **En présence d'un terme source :** $\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + \mathbb{P}_V(x,t)$ ♦ **Sans terme source :** $\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}}$ Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(x,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$ vecteur densité de flux thermique.	♦ **En présence d'un terme source :** $\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}.\frac{\partial (r.j_{th}(r,t))}{\partial r} + \mathbb{P}_V(r,t)$ ♦ **Sans terme source :** $\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}.\frac{\partial (r.j_{th}(r,t))}{\partial r}}$ Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(r,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ vecteur densité de flux thermique	♦ **En présence d'un terme source :** $\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}.\frac{\partial (r^2.j_{th}(r,t))}{\partial r} + \mathbb{P}_V(r,t)$ ♦ **Sans terme source :** $\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}.\frac{\partial (r^2.j_{th}(r,t))}{\partial r}}$ Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(r,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ vecteur densité de flux thermique.

➲ Démonstrations à connaître : Etablir les bilans de puissances volumiques des § a, b et c.
Pour a), on considère qu'il n'y a pas de transfert thermique échangé au travers des surfaces normales à (Oy) et à (Oz).
Pour b), on considère qu'il n'y a pas de transfert thermique échangé au travers des surfaces normales à (Oz).

2) Equation de la diffusion thermique (= équation de la chaleur)

L'équation de la diffusion thermique est une **équations aux dérivées partielles** vérifiée par le **champ de température** $\boldsymbol{T(M,t)}$ dans un matériau solide.

a) Mise en équation – Diffusivité thermique

➲ Démonstration à connaître : On reprend l'étude menée au § B.1. En utilisant la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique :

i) en géométrie cartésienne:

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}} + \mathbb{P}_V(x,t)$$

ii) en géométrie cylindrique :

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)} + \mathbb{P}_V(r,t)$$

iii) en géométrie sphérique :

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)} + \mathbb{P}_V(r,t)$$

◆ **Généralisation : en géométrie quelconque**

Pour généraliser l'équation de diffusion thermique, on introduit le scalaire $\boldsymbol{\Delta T}$ *(qui se lit « laplacien » de T)*, cf *fiche outils maths « analyse vectorielle »*. On a :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,t)} + \mathbb{P}_V(M,t)}$$

Avec ρ la **masse volumique**, c la **capacité thermique massique** *et* λ la **conductivité thermique**

Rq : On obtient cette équation en combinant la loi de Fourier au bilan de puissance volumique généralisé :

$$\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t) + \mathbb{P}_V(M,t) \text{ avec } \overrightarrow{j_{th}} = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,T$$

sachant que $\Delta T = div(\overrightarrow{grad}T)$.

Dans la suite, on va discuter de l'équation de la chaleur sans terme source : $\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,t)}$

On introduit $\boldsymbol{D}$ la **diffusivité thermique** (= coefficient de diffusion) du matériau

$$\boxed{\boldsymbol{D = \frac{\lambda}{\rho c}} \quad (\boldsymbol{USI : m^2.s^{-1}})}$$

$\boldsymbol{D}$: grandeur **intensive** qui caractérise la capacité d'un matériau à **transmettre une variation de température d'un point à un autre** de ce matériau sachant que $\boldsymbol{\lambda}$ (resp^t $\boldsymbol{c}$) mesure la capacité du matériau à **conduire** (resp^t **accumuler**) la **chaleur**.

L'équation de la diffusion thermique sans terme source s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = D.\Delta T(M,t)}}$$

➲ Exercice classique : Vérifier l'USI de la diffusivité thermique par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion.

Quelques valeurs de diffusivité :

matériau	$a.10^6$ en $m^2.s^{-1}$
cuivre	117
acier	$\simeq 10$
verre	0,34
eau	0,14
air (sous $P = 1.10^5$ Pa)	20

Rq : - De nombreux phénomènes physiques sont régis par une équation de diffusion i.e. une équation entre des dérivées spatiales du 2^e ordre et temporelle du 1er ordre d'une grandeur. Ex : diffusion de particules ; pénétration d'un champ électromagnétique dans un conducteur en régime variable cf ChEM7.

- *L'équation de la diffusion thermique est une **équation linéaire**.*
- *L'équation de la diffusion thermique n'est pas invariante par renversement du temps : si $T(M,t)$ est solution de l'équation, $T(M,-t)$ ne l'est pas. La dérivée première temporelle de l'équation de diffusion est la traduction mathématique de **l'irréversibilité** du transfert thermique spontané (du chaud vers le froid et non l'inverse).*
- *Une résolution analytique de l'équation de la diffusion n'est possible que pour des géométries très simples. Dans le cas où la géométrie est plus compliquée, il faut recourir à des méthodes de résolution numérique, cf § E et TP.*

b) Lien entre les échelles caractéristiques

Soit $\boldsymbol{\tau}$ **et** $\boldsymbol{L}$**,** respectivement **la durée et la longueur caractéristiques du phénomène de diffusion**. En ordre de grandeur,

◆ la diffusion thermique pendant une durée τ a un effet sur une distance :

$$\boxed{L \approx \sqrt{D\tau}}$$

◆ pour que la diffusion thermique ait un effet sur une distance L, il faut attendre une durée :

$$\boxed{\tau \approx \frac{L^2}{D}}$$

Ces résultats sont indépendants des températures mises en jeu.

➲ Démonstration à connaître : Analyser l'équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour établir la relation entre τ et L.

NB : Cette relation est très utile pour **déterminer des résultats en ODG**, cf TD et on la retrouve dans le critère de stabilité de résolution numérique de l'équation de diffusion thermique, cf § E.

Ex :

◆ Considérons une plaque plane d'épaisseur 1 m, initialement à température uniforme T_0 = 20°C. Pour t > 0, on impose une température T_G = 30°C en x = 0. La température à l'autre extrémité est maintenue constante. Voici les résultats d'une résolution numérique de l'équation de la chaleur, cf TP :

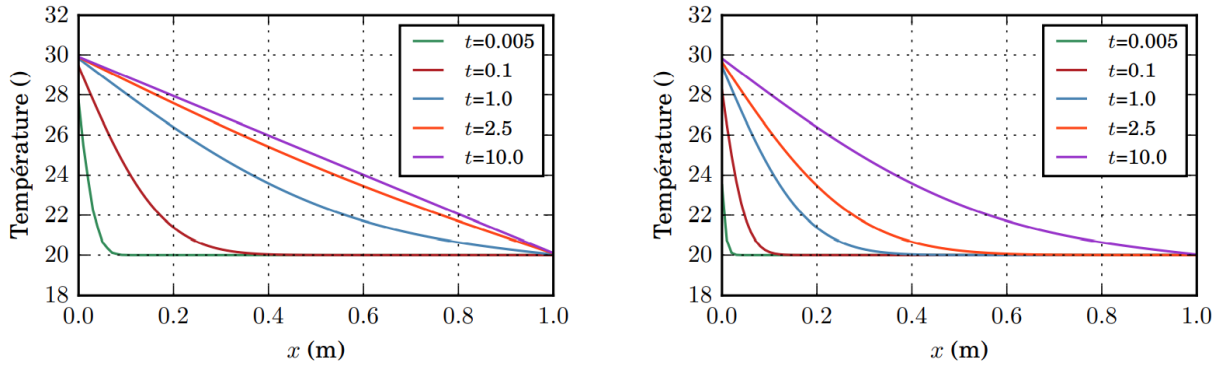


Figure 1 – Profil de température au sein d'une plaque plane à différents instants. Figure de gauche : $D = 0{,}1\,\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$; figure de droite : $D = 0{,}01\,\mathrm{m}^2/\mathrm{min}$. Tous les autres paramètres sont identiques dans les deux simulations, en particulier $\Delta T = 10\,°\mathrm{C}$. Les temps sont exprimés en minutes.

Observations : Avancée progressive d'un front de diffusion jusqu'à atteindre en régime stationnaire un profil de température affine (cf § C). Régime stationnaire atteint plus rapidement pour le cas de gauche.

➲ Interpréter en introduisant τ la durée caractéristique de variation de la température.

c) Conditions aux limites

La résolution complète de l'équation de diffusion nécessite de connaître les conditions initiales (à $t = 0$) et les conditions aux limites (aux points de la surface du système (Σ) étudié).

Quelle que soit la situation, on a **continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique** $\overrightarrow{j_{th}}$ (il n'y a pas d'accumulation d'énergie à l'interface).

◆ **Cas d'un contact thermique parfait entre deux matériaux solides**

Dans ce cas, en un point P de la surface du système (Σ), on a :

- **continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique**
- et **continuité du champ de température** :

$$\boldsymbol{T(P,t)_{solide\,1} = T(P,t)_{solide\,2}}$$

◆ **Cas d'un contact avec un fluide – Transfert thermique conducto-convectif : loi de Newton**

Lorsque le matériau solide (ex : mur) est en contact avec un fluide (ex : air), il apparaît un phénomène de convection au voisinage de la surface du solide.

Cet échange conducto-convectif est décrit par la **LOI DE NEWTON**. A l'interface fluide / solide, le flux thermique élémentaire traversant en P la surface dS_P dans le sens fluide → solide s'écrit :

$$\boldsymbol{d\Phi_{Flu\to Sol} = h(T_{Flu} - T(P,t))dS_P}$$ avec

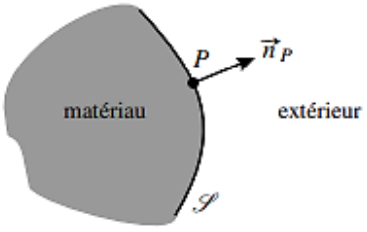
- T_{Flu} la température du fluide suffisamment éloigné de l'interface (où la convection n'est plus active),
- $T(P,t)$ la température du solide en P à t,
- h le coefficient de transfert conducto-convectif ($\boldsymbol{USI : W.m^{-2}.K^{-1}}$) qui dépend de la nature du solide et du fluide ainsi que de la vitesse du fluide et de l'état de surface du solide, cf TP.

ODG du coefficient h :

fluide	type de transfert	h en $\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$
gaz	convection naturelle	$5-30$
	convection forcée	$10-300$
eau	convection naturelle	$100-1000$
	convection forcée	$300-12000$

Dans le cas d'un contact du système (Σ) solide avec un fluide, la continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique en un point P de la surface, s'écrit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_{th}}(P,t)\cdot\vec{n}_P = -h(T_{Flu} - T(P,t))}$$



◆ **Cas d'une paroi adiabatique**

Dans le cas où le système (Σ) présente une paroi adiabatique, en un point P de cette paroi, on a :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_{th}}(P,t)\cdot\vec{n}_P = 0}$$

C) Cas particulier du régime stationnaire en l'absence de source

On suppose dans ce paragraphe que le régime stationnaire est atteint : **la température en tout point du système est indépendante du temps : on a $T(M)$ et $\overrightarrow{j_{th}}(M)$.**

Rq : Les résultats établis ici sont généralisables au cas des régimes quasi-stationnaires (ARQS thermique), cf TD et TP. ***L'ARQS est vérifiée lorsque le temps caractéristique de variation des conditions aux limites est très supérieur au temps caractéristique τ de diffusion****, cf § B.2.b.*

1) Conservation du flux thermique

En **régime stationnaire et en l'absence de production de chaleur interne**, le **flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant** de n'importe quel système.
On dit qu'il y a **conservation du flux thermique** ou que $\overrightarrow{j_{th}}$ est à flux conservatif.

➲ Démonstration à connaître : En reprenant le bilan d'énergie réalisé au § B.1 pour un volume élémentaire sur l'intervalle $[t, t+dt]$, montrer le résultat ci-dessus.

2) Profil de température en régime stationnaire – Expression du flux thermique

a) Equation de Laplace

En régime stationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Ainsi, **en régime stationnaire et en l'absence de source**, le champ de température vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta T(M) = 0$$

Il n'est pas toujours possible de résoudre analytiquement cette équation.
On détermine la solution analytique dans les conditions suivantes :

→ géométrie unidimensionnelle cartésienne (cf § b) ; symétrie cylindrique (cf TD).
→ contact thermique parfait au niveau des surfaces du système.

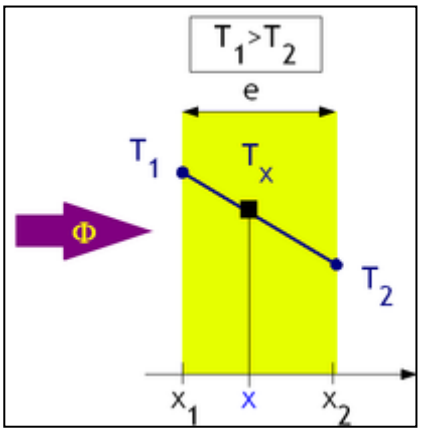
b) En géométrie unidimensionnelle cartésienne

➲ Exercice classique à savoir refaire :

On considère un mur d'épaisseur e et de surface S en contact avec deux thermostats de températures différentes (pour $e \ll \sqrt{S}$, on néglige les effets de bord).

Conditions aux limites :

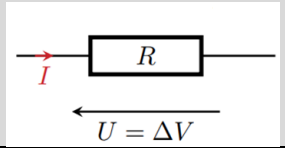
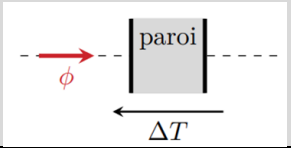
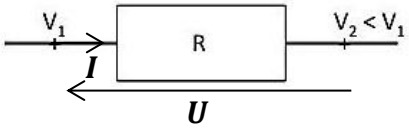
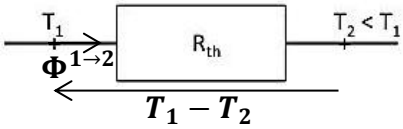
$$T(x=0) = T_1 \quad et \quad T(x=e) = T_2$$



i) Montrer que le profil de température est affine (2 démarches sont possibles).

ii) Montrer que le flux thermique au travers de S vérifie la relation : $T_1 - T_2 = \left(\frac{e}{\lambda.S}\right) \cdot \Phi^{1\to 2}$

3) Analogie avec la conduction électrique – Résistance thermique

Conduction électrique	**Conduction thermique**
	
① **Cause :**	
Différence de potentiel électrique V Tension : $\boldsymbol{U = \Delta V = V_1 - V_2}$	**Différence de température** T $\boldsymbol{\Delta T = T_1 - T_2}$
② **Conséquence :**	
Intensité électrique : $I = \iint_S \vec{j}_{é}.\overrightarrow{dS}$ $\vec{j}_{é}$ vecteur densité de courant électrique, *cf Ch.EM2.*	**Flux thermique** : $\Phi = \iint_S \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}$ $\vec{j}_{th}$ vecteur densité de flux thermique.
③ En **régime stationnaire** (ou ARQS), le long d'un tube de courant, on a **conservation**…	
… de I (loi des branches / des nœuds).	**… du flux** *en l'absence de sources*.
④ En **régime stationnaire** (ou ARQS), loi reliant ① et ②	
	
Loi d'Ohm globale ***en convention récepteur*** **:** $\boldsymbol{U = V_1 - V_2 = R \cdot I}$ $\boldsymbol{R}$ **résistance électrique**	**Loi de Fourier globale** ***en convention récepteur*** **:** $\boldsymbol{T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \Phi^{1\to 2}}$ $\boldsymbol{R_{th}}$ **résistance thermique**

RESISTANCE THERMIQUE :

$\boldsymbol{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi^{1\to 2}}}$ grandeur **positive en** $\boldsymbol{K.W^{-1}}$

→ *convention récepteur thermique*

On définit également une conductance thermique $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$.

Plus $\boldsymbol{R_{th}}$ est **élevée**, plus **l'isolation thermique est importante**.

NB : Attention à la convention récepteur : accompagnez votre relation d'un schéma et vérifiez vos signes !

4) Expression de résistances thermiques

a) En géométrie unidimensionnelle cartésienne

D'après le § C.2.b, la résistance thermique d'une paroi plane d'épaisseur e et de section S faite dans un matériau de conductivité thermique λ vaut :

$$\boldsymbol{R_{th} = \frac{e}{\lambda . S}}$$

Elle dépend du matériau mais aussi de la géométrie du système.

R_{th} est d'autant plus élevée que e est élevé, que S est faible et que λ est faible. Ce qui est cohérent avec la notion d'isolation thermique.

Rq : La résistance électrique d'un conducteur d'épaisseur e et de section S faite dans un matériau de conductivité électrique γ vaut $R = \frac{e}{\gamma \cdot S}$ (cohérence avec la notion d'isolation électrique).

NB :

La **résistance thermique** $\boldsymbol{R_{th}}$ quantifie la **facilité/difficulté des transferts thermiques** au travers d'un système, et tient compte non seulement du **matériau** (conductivité thermique) mais aussi de la **géométrie**.

La **diffusivité thermique** $\boldsymbol{D}$ compare les propriétés de **conduction** (conductivité thermique) et de **stockage** thermique (capacité thermique). Elle est intrinsèque à un **matériau**, et indépendante de la géométrie du système.

b) Résistance thermique d'interface

On considère deux milieux de températures respectives T_1 et T_2 séparés par un fluide. Le flux thermique élémentaire traversant la surface dS_P dans le sens 1 → 2 est donné par la loi de Newton (cf § B.2.c) :

$$d\Phi^{1\to 2} = h(T_1 - T_2)dS_P$$

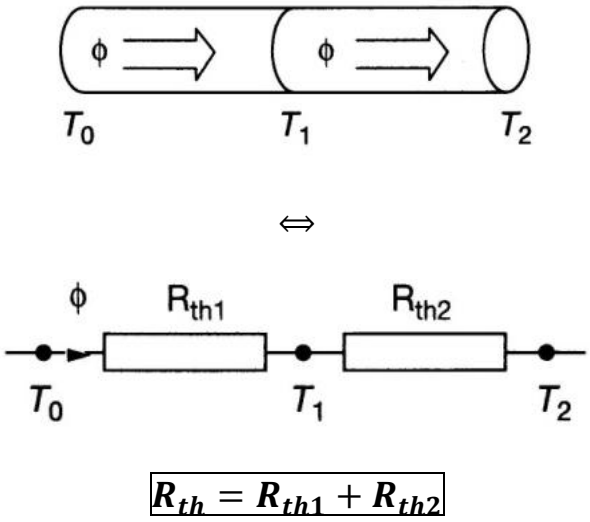
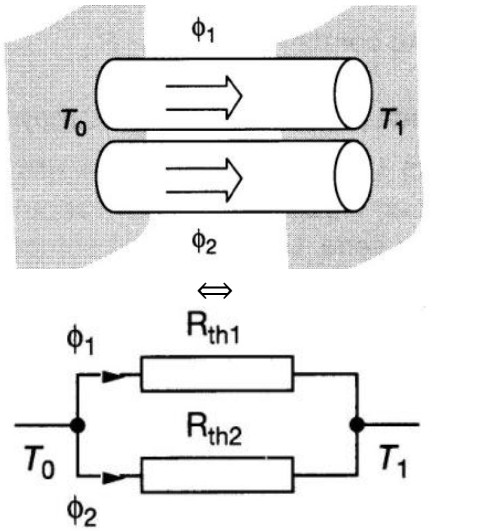
En régime stationnaire, on peut associer à cette interface de surface S une résistance thermique d'interface (ou de contact ou de convection) :

$$\boldsymbol{R_{th,i} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi^{1\to 2}} = \frac{1}{hS}}$$

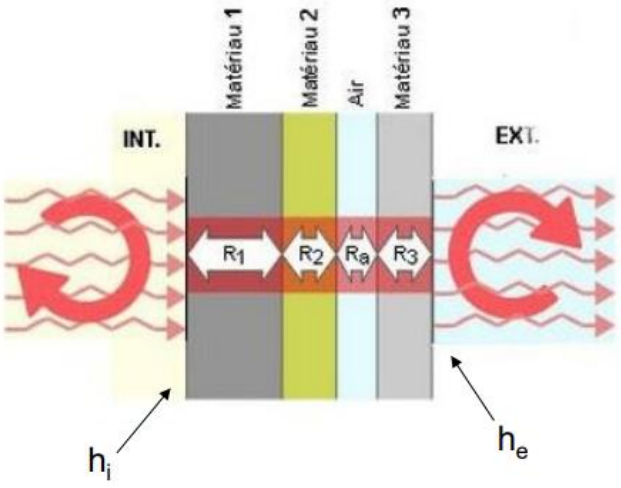
Rq : Le contact thermique parfait entre deux milieux se définit par $R_{th,i} \to 0$, donc $h \to \infty$ et donc $T_1 = T_2$ sous peine d'avoir un flux infini.

5) Associations de résistances thermiques

Tout comme on associe les résistances électriques, on peut associer les résistances thermiques.

Association **série**	Association **parallèle**
Les **résistances** thermiques sont en **<u>série</u> ssi elles sont traversées par le même flux thermique.**	Les **résistances** thermiques sont en **<u>parallèle</u> ssi elles ont la même différence de température à leurs « bornes ».**
 $\boldsymbol{R_{th} = R_{th1} + R_{th2}}$	 $\boldsymbol{G_{th} = G_{th1} + G_{th2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}}$
Ex : double vitrage	Ex : mur percé d'une fenêtre

Autre exemple d'association série : paroi multi-couche (prise en compte des résistances d'interface) :



$$R_{th} = \frac{1}{h_i.S} + \sum R_{cond.} + \frac{1}{h_e.S}$$

<u>Rq</u> :

- *On peut également exploiter les formules des ponts diviseurs de température (pour des résistances thermiques en série) et de flux (pour des résistances thermiques en parallèle), cf TD.*
- *L'analogie thermo-électrique n'est pas seulement formelle : un métal bon conducteur électrique est aussi un bon conducteur thermique. En effet, les mouvements des électrons délocalisés transportent tout aussi bien une charge qu'une énergie d'agitation thermique : les deux types de conduction sont liés.*

D) Application : Thermique de l'habitat – ARQS thermique

1) Bilan thermique

Système considéré : air intérieur et parois de l'habitation de capacité thermique C
Hypothèses : la température est quasi-uniforme au sein du système et varie « lentement » au cours du temps (ARQS).

Le 1er principe de la thermodynamique donne :

$$dU = -\Phi_{pertes}dt + \Phi_{chauffage}dt$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\Phi_{chauffage}}_{\text{production/source}} = \underbrace{C\frac{dT}{dt}}_{\text{stockage}} + \underbrace{\Phi_{pertes}}_{\text{flux sortant}}$$

Rq : en régime stationnaire, le chauffage compense les pertes.

2) Dans l'ARQS : expression des pertes thermiques et analogie thermo-électrique

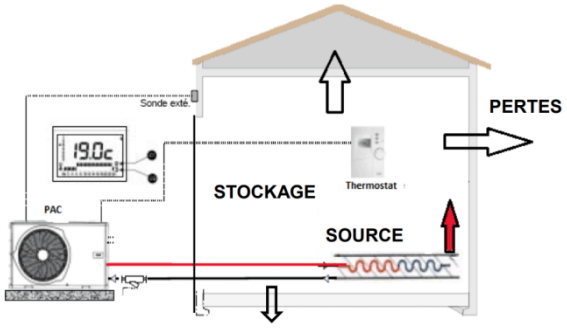
Pour évaluer les pertes, en ARQS, on exploite la relation :

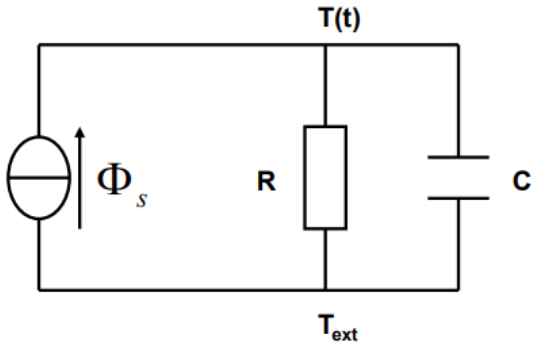
$$\Phi_{pertes} = \frac{T(t) - T_{ext}}{R_{th}}$$

en supposant que l'on peut modéliser la paroi qui sépare l'habitation de l'extérieur par une résistance thermique équivalente R_{th}, cf p.13.
On a ainsi :

$$\boldsymbol{\Phi_{chauffage} = C\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{ext}}{R_{th}}}$$

Ce bilan est l'équivalent de la loi des nœuds en électricité et selon cette modélisation, on peut donner un schéma électrocinétique équivalent :





Avec $\Phi_S = \Phi_{chauffage}$

Cf épreuve CCINP MP 2016 sur l'étude thermique d'un bâtiment et l'analogie thermoélectrique.

E) Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique 1D

1) Méthode des différences finies

Pour résoudre l'équation de la diffusion 1D, on peut utiliser la **méthode des différences finies qui dérive de la méthode d'Euler explicite**, cf *capacités numériques*.
On s'intéresse au problème de la diffusion thermique en géométrie unidimensionnelle cartésienne.
On considère une barre homogène, de section S et de longueur L : la température est uniforme dans chaque section droite de la barre. On note (Ox) l'axe de la barre.
Le matériau constitutif de la barre est caractérisé par : ρ sa **masse volumique**, c sa **capacité thermique massique** et λ sa **conductivité thermique.** On introduit D le **coefficient de diffusion** du matériau :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Dans ce cadre, en l'absence de terme source, l'équation de la diffusion thermique s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

On cherche la solution $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et pour $t \in [0, tf]$.
Pour résoudre numériquement cette équation, il faut la discrétiser.
On introduit T un tableau qui rassemble les températures en différents points de la barre et à différents instants. T a $nx \times nt$ éléments avec $\boldsymbol{nx}$ **le nombre de points** sur l'intervalle $[0, L]$ et $\boldsymbol{nt}$ **le nombre d'instants** sur l'intervalle $[0, tf]$ où on cherche la température.
On introduit un **pas d'espace :** $\boldsymbol{dx = \frac{L}{nx-1}}$ et un **pas de temps :** $\boldsymbol{dt = \frac{tf}{nt-1}}$.
Pour une expérience, dx correspond à la distance entre deux capteurs de température et dt correspond à la période d'échantillonnage, cf TP. On a :

$\boldsymbol{T[k][i] = T(x_k, t_i) = T(k.dx, i.dt)}$ avec $k \in [\![0, nx-1]\!]$ et $i \in [\![0, nt-1]\!]$;
$T[k] = T(x_k, t)$ qui donne l'évolution temporelle de la température en x_k ;
$T[:, i] = T(x, t_i)$ qui donne le profil de température à l'instant t_i.

➲ Démonstration à connaître :
i) Faire un DL_1 en dt de $T[k][i+1] = T(x_k, t_i + dt)$. En déduire une expression approchée de la dérivée partielle 1e temporelle de la température en x_k.
ii) Faire un DL_2 en dx de $T[k \pm 1][i] = T(x_k \pm dx, t_i)$. En déduire une expression approchée de la dérivée partielle 2e spatiale de la température à l'instant t_i.
iii) Réécrire l'équation de diffusion avec ces résultats et montrer que la relation de récurrence qui donne $\boldsymbol{T[k][i+1]}$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{T[k][i+1] = T[k][i] + \frac{dt.D}{dx^2}.(T[k+1][i] + T[k-1][i] - 2.T[k][i])}}$$

Cette relation correspond à un **schéma numérique explicite** : elle permet de calculer la température en x_k à l'instant $t_i + dt$ connaissant les températures à l'instant « précédent » t_i.
Les températures au sein de la barre étant connues à $t = 0$ (**condition initiale**) et connaissant les **conditions aux limites** (par exemple, la température aux extrémités de la barre est imposée à toute date), on peut déterminer la température au sein de la barre à toute date à partir du **schéma numérique** inséré dans **deux boucles *for* imbriquées**.
On admet que l'erreur associée à ce schéma numérique conduit au **critère de stabilité** suivant :

$$\frac{D.dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2}$$

2) Mise en œuvre : cf TP