# Chapitre T2. Transferts thermiques



***Jean Baptiste Joseph Fourier*** *(1768 - 1830) est un mathématicien et physicien français. Il est en particulier connu pour avoir étudié la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction en une série trigonométrique : série de Fourier. La transformation de Fourier est une « méthode » qui s'applique à bien d'autres domaines : théorie du signal, imagerie numérique…*

**INTRO :**

Il existe trois modes de transfert thermique : par convection, par rayonnement et par conduction.
On étudie dans la 2e partie de ce chapitre le transfert thermique conductif au sein de systèmes **solides**.
La conduction thermique a lieu au sein d'un système dont la température n'est pas uniforme : on appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel **l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique**. Pour le décrire, on introduit la fonction température $\boldsymbol{T(M,t)}$ qui dépend de l'instant $t$ et du point $M$ considéré. Cependant, on restreint l'étude à des problèmes tels que la température ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale.
Pour établir l'équation qui régit les variations spatio-temporelles de la température, on utilise un **bilan local d'énergie interne**, déduit du 1er principe de la thermodynamique, sous **forme différentielle**.
Dans la 3e partie, on étudie le rayonnement thermique du corps noir. On introduit les lois de Wien et de Stefan qui lui sont associées et on étudie l'effet de serre à l'aide d'un modèle simplifié de la Terre.

Buts de ce chapitre : Etablir l'équation de la chaleur en utilisant la loi de Fourier ; établir une analogie électro-thermique dans le cas du régime stationnaire ; introduire la loi de Newton qui décrit les échanges conducto-convectifs ; décrire le modèle du corps noir et appliquer les lois qui lui sont associées pour étudier l'effet de serre.

Prérequis :
MP2I : Thermodynamique et Electrocinétique
MPI : T1 Transformations infinitésimales

Plan du chapitre :

**1e partie : Les trois types de transferts thermiques** ..... 3
**2e partie : Transferts thermiques conductifs** ..... 5
A) Flux (ou puissance) thermique – Loi de Fourier ..... 5
1) Vecteur densité de flux thermique ..... 5
2) Loi phénoménologique de Fourier ..... 6
B) Bilan énergétique – Equation de la chaleur ..... 7
1) Bilan local d'énergie interne ..... 7
2) Equation de la diffusion thermique (= équation de la chaleur) ..... 9
C) Cas particulier du régime stationnaire en l'absence de source ..... 12
1) Conservation du flux thermique ..... 12
2) Profil de température en régime stationnaire – Expression du flux thermique ..... 12
3) Analogie avec la conduction électrique – Résistance thermique ..... 13
4) Expression de résistances thermiques ..... 14
5) Associations de résistances thermiques ..... 15
D) Application : Thermique de l'habitat – ARQS thermique ..... 16
1) Bilan thermique ..... 16
2) Dans l'ARQS : expression des pertes thermiques et analogie thermo-électrique ..... 16
E) Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique 1D ..... 17
1) Méthode des différences finies ..... 17
2) Mise en œuvre : cf TP ..... 17
**3e partie : Transferts thermiques radiatifs** ..... 19
A) Lois du rayonnement thermique ..... 19
1) Flux (ou puissances) surfaciques – Bilan ..... 19
2) Corps noir ..... 20
3) Flux surfacique émis par un corps noir isotherme ..... 20
4) Exemples ..... 23
B) Application à l'étude de l'effet de serre ..... 23
1) Principe : serre d'horticulture ..... 23
2) Cas de la Terre ..... 24

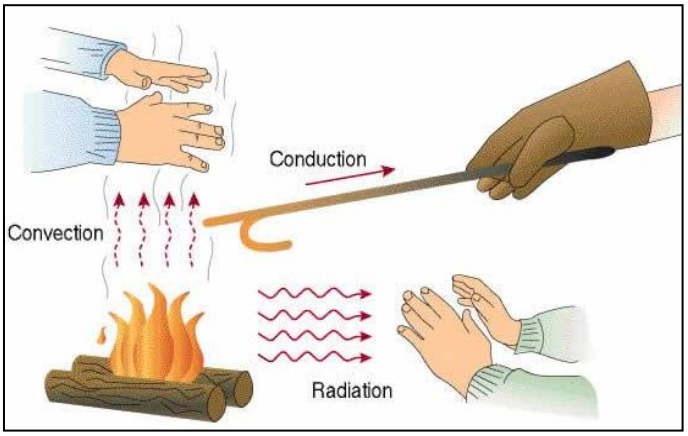
# 1e partie : Les trois types de transferts thermiques

Un système thermodynamique peut échanger de l'énergie sans l'intervention d'une action mécanique mesurable à l'échelle macroscopique. Ce transfert d'énergie complémentaire du travail mécanique s'appelle **TRANSFERT THERMIQUE (ou CHALEUR) et est noté $Q$ (USI : J)**. Il n'est perceptible à l'échelle macroscopique que par la transformation des systèmes qu'il provoque : variation de température, changement d'état physique...

**Un système ($\Sigma_1$) de température $T_1$ fournit effectivement de l'énergie à un système ($\Sigma_2$) de température $T_2$ si $T_2 < T_1$.**
Dans ce cas, la chaleur $Q_2$ reçue par ($\Sigma_2$) de la part de ($\Sigma_1$) est positive et la chaleur $Q_1$ reçue par ($\Sigma_1$) de la part de ($\Sigma_2$) est négative : $Q_1 = -Q_2$.

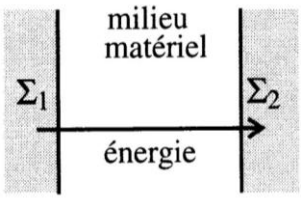
Il existe trois modes de transfert thermique :

- La **CONVECTION THERMIQUE** met en jeu un **fluide qui est en mouvement** entre les deux systèmes : il reçoit de l'énergie du système chaud et cède de l'énergie au système froid.

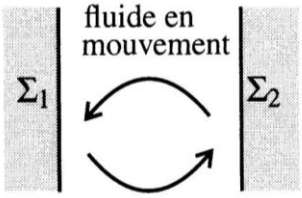



- Le **RAYONNEMENT THERMIQUE** *(objet de la 3e partie)* met en jeu les ondes électromagnétiques émises par les entités des systèmes en agitation thermique. Les photons émis par l'un des systèmes sont reçus par l'autre qui en absorbe une partie. Il y a transfert d'énergie dans les deux sens. Cependant, comme le système chaud émet plus d'énergie que le système froid, le transfert d'énergie global se fait du système chaud vers le système froid. Ce mode de transfert ne nécessite pas la présence d'un milieu matériel.

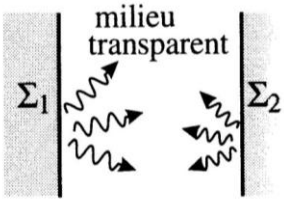
- La **CONDUCTION THERMIQUE** *(objet de la 2e partie)* intervient lorsque les deux systèmes sont séparés par un **milieu matériel immobile**, par exemple une paroi solide. Le transfert d'énergie résulte des collisions entre les particules microscopiques constituant les systèmes et la paroi. Ces particules sont animées d'un mouvement d'agitation thermique quelle que soit l'état des systèmes (solide, liquide ou gaz). Les particules du système ($\Sigma_1$) ayant la température la plus élevée (système chaud) ont une énergie cinétique d'agitation thermique supérieure à celle du système ($\Sigma_2$) ayant une température plus basse (système froid). Lors des chocs, les particules de ($\Sigma_1$) cèdent de l'énergie aux particules de la paroi et les particules de ($\Sigma_2$) reçoivent de l'énergie de la paroi.



conduction



convection



rayonnement

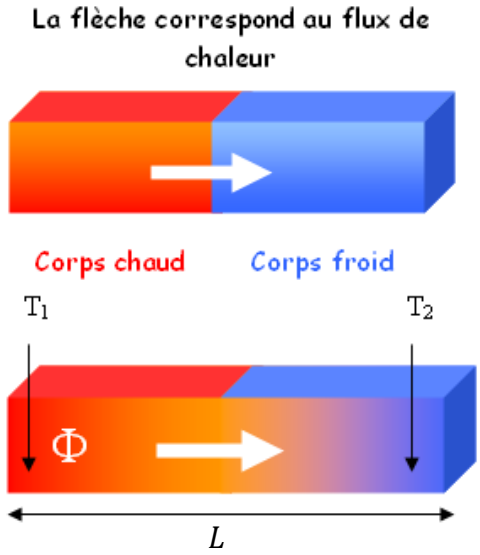
Ex : Le transfert thermique entre l'intérieur d'une habitation et l'extérieur est :
- conductif à travers un mur ou une fenêtre fermée ;
- convectif à travers une fenêtre ouverte ;
- radiatif quand le rayonnement du soleil entre à travers une vitre.

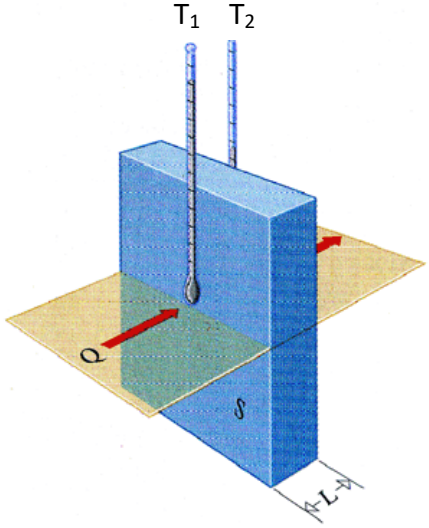
# 2e partie : Transferts thermiques conductifs

## A) Flux (ou puissance) thermique – Loi de Fourier

### 1) Vecteur densité de flux thermique

La présence dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique **d'une inhomogénéité (= non uniformité) de température** fait apparaître un **FLUX THERMIQUE** par conduction qui possède les caractéristiques suivantes :
- il a lieu **spontanément des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides** ;
- *pour un problème unidimensionnel*, il est **proportionnel à l'aire de la surface $S$** à travers laquelle s'effectue le transfert thermique ;
- il est **d'autant plus élevé que la variation spatiale de température est importante**.




On note $\boldsymbol{\Phi^{1\to2}}$ **le flux thermique ou puissance thermique** à travers une surface $S$ dans le sens $1 \to 2$. C'est une grandeur scalaire **algébrique homogène à une puissance (USI : W)** :

$$\boldsymbol{\Phi^{1\to2} = \frac{\delta Q^{1\to2}}{dt} \Leftrightarrow \delta Q^{1\to2} = \Phi^{1\to2} \cdot dt}$$

avec $\delta Q^{1\to2}$ la chaleur élémentaire (USI : J) traversant $S$ dans le sens $1 \to 2$ entre $t$ et $t + dt$ avec $dt$ une durée infinitésimale.

*Rq :*
- *Si (1) correspond à une zone de température supérieure à celle de la zone (2) alors $\delta Q^{1\to2} > 0$ donc $\Phi^{1\to2} > 0$. Evidemment, $\Phi^{1\to2} = -\Phi^{2\to1}$.*
- *On trouve différentes notations pour le flux/puissance thermique : $\Phi^{1\to2}$, ${P_{th}}^{1\to2}$ ou $\dot{Q}^{1\to2}$.*

Pour s'affranchir de la surface $S$, on définit le **vecteur densité de flux thermique** $\overrightarrow{\boldsymbol{J_{th}}}$, noté également $\overrightarrow{\boldsymbol{J_Q}}$. C'est un **vecteur colinéaire à la direction selon laquelle la température varie[*1] et homogène à un flux (ou une puissance) surfacique (USI : W.m$^{-2}$)** :

$$\boldsymbol{\Phi^{1\to2} = \iint_S \overrightarrow{J_{th}} . \overrightarrow{dS_{1\to2}}}$$

Avec $\overrightarrow{dS_{1\to2}}$ un vecteur élément de surface, normal à la surface et orienté dans le sens $1 \to 2$.
Sens de $\overrightarrow{J_{th}}$ : $\overrightarrow{\boldsymbol{J_{th}}}$ **est orienté des hautes vers les basses températures[*2].**

## 2) Loi phénoménologique de Fourier

Expérimentalement, si les variations (spatio-temporelles) de températures ne sont pas trop importantes, on rend compte localement des phénomènes de conduction de la chaleur par la Loi de Fourier (1807).

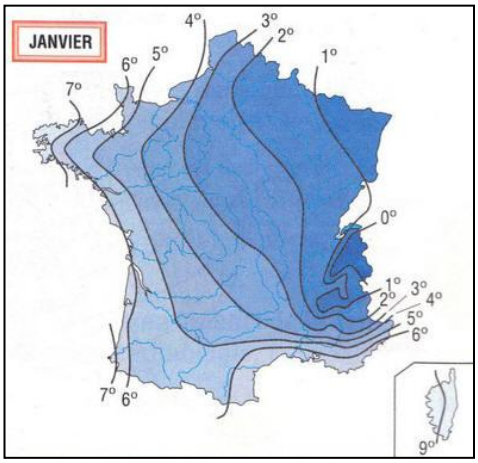
**LOI DE FOURIER** : Il existe un coefficient **positif** $\lambda$, caractéristique du **matériau** dans lequel la conduction thermique a lieu, tel que :

$$\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda . \overrightarrow{grad}\, T$$

$\lambda$ est appelé **conductivité thermique** (USI : $W.m^{-1}.K^{-1}$)

- *Gradient de température $\overrightarrow{grad}\, T$ (USI : $K.m^{-1}$) – Cohérence avec les propriétés de $\overrightarrow{J_{th}}$*

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite *surface isotherme, cf ci-contre*.



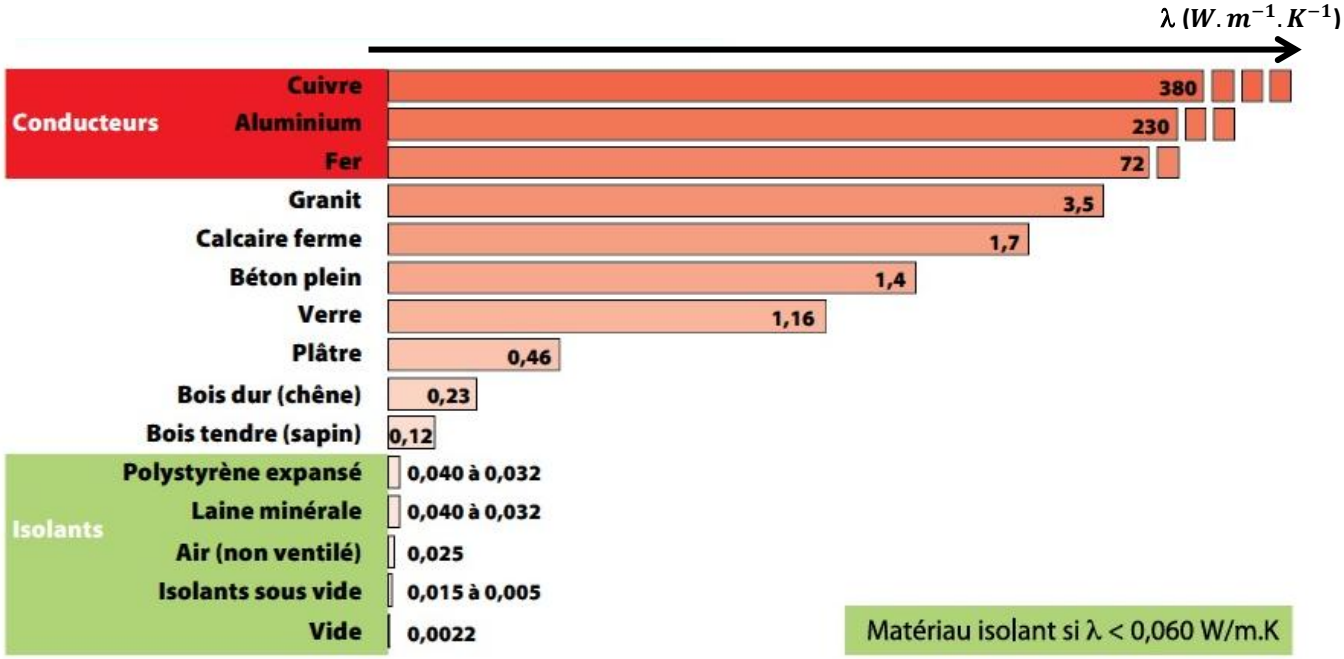

L'opérateur gradient **quantifie la non uniformité de la température**.

La loi de Fourier $\overrightarrow{J_{th}} = -\lambda . \overrightarrow{grad}\, T$ traduit mathématiquement les propriétés du flux thermique :

- $\overrightarrow{J_{th}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{grad}\, T$, il est donc normal à l'isotherme (cohérent avec [*1] p.5) ;
- le coefficient de proportionnalité entre $\overrightarrow{J_{th}}$ et $\overrightarrow{grad}\, T$ est négatif, $\overrightarrow{J_{th}}$ est donc orienté des zones chaudes vers les zones froides (cohérent avec [*2] p.5).

- *Conductivité thermique $\lambda$ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)*

Selon le matériau dans lequel s'effectue le transfert thermique, la puissance transmise est plus ou moins grande ; on parle de matériaux conducteurs ou isolants.




**ODG à connaître :**

| Conducteurs thermiques | Eau ; verre | Isolants thermiques : air, laine de verre |
|---|---|---|
| Ex : $\lambda(acier) \sim 50\ W.m^{-1}.K^{-1}$ | $\lambda \sim 1\ W.m^{-1}.K^{-1}$ | $\lambda \sim 10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}$ |

# B) Bilan énergétique – Equation de la chaleur

## 1) Bilan local d'énergie interne

On considère un système (Σ) **solide** immobile, assimilé à une **PCI**, constitué d'un matériau caractérisé par : $\rho$ sa **masse volumique**, $c$ sa **capacité thermique massique** *et* $\lambda$ sa **conductivité thermique**.
On note $T(M,t)$ le champ de température au sein du système (Σ) : $T$ varie au cours du temps et $T$ n'est pas uniforme*, il y a donc **conduction thermique** au sein de (Σ).
* *on se limite ici au cas où $T$ dépend d'une seule variable de l'espace.*

Pour obtenir une équation locale reliant $T(M,t)$ au vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$, on applique le **1er principe de la thermodynamique pour une transformation élémentaire** entre $t$ et $t+dt$ à un **volume élémentaire de (Σ)**. On établit cette équation dans 3 géométries (§ a, b, c) et on admet la généralisation (§ d).

Il peut exister à l'intérieur du système des **processus qui dégagent ou absorbent de l'énergie thermique**, on parle de **terme source**.
Ex : Effet Joule dans un conducteur ohmique traversé par un courant, désintégrations nucléaires dans un matériau radioactif, réaction chimique endo/exo-thermique, cf TD.

Pour prendre en compte ces processus, on introduit généralement $\mathbb{P}_V$ **la puissance thermique volumique produite (ou créée) algébriquement** (USI : W.m$^{-3}$). Elle est positive si le processus dégage réellement de l'énergie thermique, négative si elle en absorbe.
La puissance thermique produite dans un élément de volume $d\tau(M)$ autour du point $M$ s'écrit :

$$\mathbb{P}_V(M,t).d\tau(M)$$

En l'absence de terme source, on a $\mathbb{P}_V(M,t)=0$.

**a) En géométrie unidimensionnelle cartésienne** : cf p.8
**b) En géométrie cylindrique** : cf p.8
**c) En géométrie sphérique** : cf p.8

**d) Généralisation**
Pour généraliser le bilan de puissance volumique, on introduit le scalaire $\boldsymbol{div\,\overrightarrow{j_{th}}}$ *(qui se lit "divergence du vecteur densité de flux thermique")*, cf *fiche outils maths « analyse vectorielle »*.
En présence d'un terme source, on a :

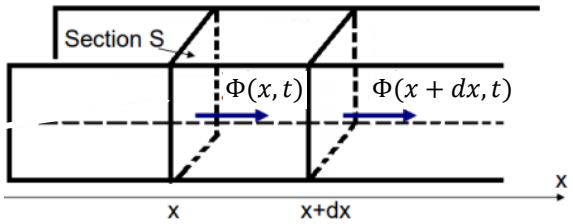
$$\underbrace{\boldsymbol{\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t}}}_{stockage} = \underbrace{\boldsymbol{-div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t)}}_{transfert\ conductif\ entrant} + \underbrace{\mathbb{P}_V}_{source}$$

Sans terme source, on a :

$$\boldsymbol{\rho c\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t)}$$

Avec $\rho$ la **masse volumique** et $c$ la **capacité thermique massique**.

Sous cette forme, ces équations sont indépendantes du système de coordonnées choisi et permettent de décrire la conduction dans le cas général où $T$ dépend du temps et des 3 coordonnées spatiales.

| Géométrie | **a) unidimensionnelle cartésienne** | **b) cylindrique** | **c) sphérique** |
|---|---|---|---|
| Champ de température au sein du système (Σ) | La température dépend du temps et d'une seule variable d'espace cartésienne, $x$ :<br>$\boldsymbol{T(M,t) = T(x,t)}$ | La température est invariante par rotation autour d'un axe $(Oz)$ et par translation le long de $(Oz)$.<br>En coordonnées **cylindriques** :<br>$\boldsymbol{T(M,t) = T(r,t)}$ | La température est invariante par rotation autour d'un point $O$.<br>En coordonnées **sphériques** :<br>$\boldsymbol{T(M,t) = T(r,t)}$ |
| Volume élémentaire considéré | **Parallélépipède** de section $S$ situé entre les abscisses $x$ et $x + dx$ :<br> | Portion de matériau comprise **entre les cylindres** $C(r)$ et $C(r+dr)$ d'axe $(Oz)$, de hauteur $H$ et de rayons respectifs $r$ et $r + dr$ : | Portion de matériau comprise **entre les sphères** $S(r)$ et $S(r+dr)$ de centre $O$ et de rayons respectifs $r$ et $r + dr$ : |
| Bilan de puissance volumique | ♦ **En présence d'un terme source :**<br>$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} + \mathbb{P}_V(x,t)$<br>♦ **Sans terme source :**<br>$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}}$<br>Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(x,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$ vecteur densité de flux thermique. | ♦ **En présence d'un terme source :**<br>$\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}.\frac{\partial (r.j_{th}(r,t))}{\partial r} + \mathbb{P}_V(r,t)$<br>♦ **Sans terme source :**<br>$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r}.\frac{\partial (r.j_{th}(r,t))}{\partial r}}$<br>Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(r,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ vecteur densité de flux thermique | ♦ **En présence d'un terme source :**<br>$\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}.\frac{\partial (r^2.j_{th}(r,t))}{\partial r} + \mathbb{P}_V(r,t)$<br>♦ **Sans terme source :**<br>$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}.\frac{\partial (r^2.j_{th}(r,t))}{\partial r}}$<br>Avec $\overrightarrow{\boldsymbol{j_{th}(M,t)}} = \boldsymbol{j_{th}(r,t)}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$ vecteur densité de flux thermique. |

➲ Démonstrations à connaître : Etablir les bilans de puissances volumiques des § a, b et c.
Pour a), on considère qu'il n'y a pas de transfert thermique échangé au travers des surfaces normales à $(Oy)$ et à $(Oz)$.
Pour b), on considère qu'il n'y a pas de transfert thermique échangé au travers des surfaces normales à $(Oz)$.

## 2) Equation de la diffusion thermique (= équation de la chaleur)

L'équation de la diffusion thermique est une **équations aux dérivées partielles** vérifiée par le **champ de température** $\boldsymbol{T(M,t)}$ dans un matériau solide.

### a) Mise en équation – Diffusivité thermique

➲ Démonstration à connaître : On reprend l'étude menée au § B.1. En utilisant la loi de Fourier, établir l'équation de la diffusion thermique :

i) en géométrie cartésienne:

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}} + \mathbb{P}_V(x,t)$$

ii) en géométrie cylindrique :

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)} + \mathbb{P}_V(r,t)$$

iii) en géométrie sphérique :

$$\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = \lambda \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right)} + \mathbb{P}_V(r,t)$$

◆ **Généralisation : en géométrie quelconque**

Pour généraliser l'équation de diffusion thermique, on introduit le scalaire $\boldsymbol{\Delta T}$ *(qui se lit « laplacien » de T)*, cf *fiche outils maths « analyse vectorielle »*. On a :

$$\boxed{\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,t)} + \mathbb{P}_V(M,t)}$$

Avec $\rho$ la **masse volumique**, $c$ la **capacité thermique massique** *et* $\lambda$ la **conductivité thermique**

*Rq : On obtient cette équation en combinant la loi de Fourier au bilan de puissance volumique généralisé :*

$$\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = -div\,\overrightarrow{j_{th}}(M,t) + \mathbb{P}_V(M,t) \text{ avec } \overrightarrow{j_{th}} = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,T$$

*sachant que* $\Delta T = div(\overrightarrow{grad} T)$.

Dans la suite, on va discuter de l'équation de la chaleur sans terme source : $\boldsymbol{\rho c \frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M,t)}$

On introduit $\boldsymbol{D}$ la **diffusivité thermique** (= coefficient de diffusion) du matériau

$$\boxed{\boldsymbol{D = \frac{\lambda}{\rho c}} \quad (\boldsymbol{USI : m^2.s^{-1}})}$$

$\boldsymbol{D}$ : grandeur **intensive** qui caractérise la capacité d'un matériau à **transmettre une variation de température d'un point à un autre** de ce matériau sachant que $\boldsymbol{\lambda}$ (resp$^t$ $\boldsymbol{c}$) mesure la capacité du matériau à **conduire** (resp$^t$ **accumuler**) la **chaleur**.

L'équation de la diffusion thermique sans terme source s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = D.\Delta T(M,t)}}$$

➲ Exercice classique : Vérifier l'USI de la diffusivité thermique par analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion.

Quelques valeurs de diffusivité :

| matériau | $a.10^6$ en $m^2.s^{-1}$ |
|---|---|
| cuivre | 117 |
| acier | $\simeq 10$ |
| verre | 0,34 |
| eau | 0,14 |
| air (sous $P = 1.10^5$ Pa) | 20 |

*Rq : - De nombreux phénomènes physiques sont régis par une équation de diffusion i.e. une équation entre des dérivées spatiales du 2$^e$ ordre et temporelle du 1$^{er}$ ordre d'une grandeur. Ex : diffusion de particules ; pénétration d'un champ électromagnétique dans un conducteur en régime variable cf ChEM7.*

- *L'équation de la diffusion thermique est une **équation linéaire**.*
- *L'équation de la diffusion thermique n'est pas invariante par renversement du temps : si $T(M,t)$ est solution de l'équation, $T(M,-t)$ ne l'est pas. La dérivée première temporelle de l'équation de diffusion est la traduction mathématique de **l'irréversibilité** du transfert thermique spontané (du chaud vers le froid et non l'inverse).*
- *Une résolution analytique de l'équation de la diffusion n'est possible que pour des géométries très simples. Dans le cas où la géométrie est plus compliquée, il faut recourir à des méthodes de résolution numérique, cf § E et TP.*

**b) Lien entre les échelles caractéristiques**

Soit $\boldsymbol{\tau}$ **et** $\boldsymbol{L}$**,** respectivement **la durée et la longueur caractéristiques du phénomène de diffusion**. En ordre de grandeur,

◆ la diffusion thermique pendant une durée $\tau$ a un effet sur une distance :

$$\boxed{L \approx \sqrt{D\tau}}$$

◆ pour que la diffusion thermique ait un effet sur une distance $L$, il faut attendre une durée :

$$\boxed{\tau \approx \frac{L^2}{D}}$$

Ces résultats sont indépendants des températures mises en jeu.

➲ Démonstration à connaître : Analyser l'équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour établir la relation entre $\tau$ et $L$.

**NB** : Cette relation est très utile pour **déterminer des résultats en ODG**, cf TD et on la retrouve dans le critère de stabilité de résolution numérique de l'équation de diffusion thermique, cf § E.

Ex :

◆ Considérons une plaque plane d'épaisseur 1 m, initialement à température uniforme $T_0$ = 20°C. Pour t > 0, on impose une température $T_G$ = 30°C en x = 0. La température à l'autre extrémité est maintenue constante. Voici les résultats d'une résolution numérique de l'équation de la chaleur, cf TP :

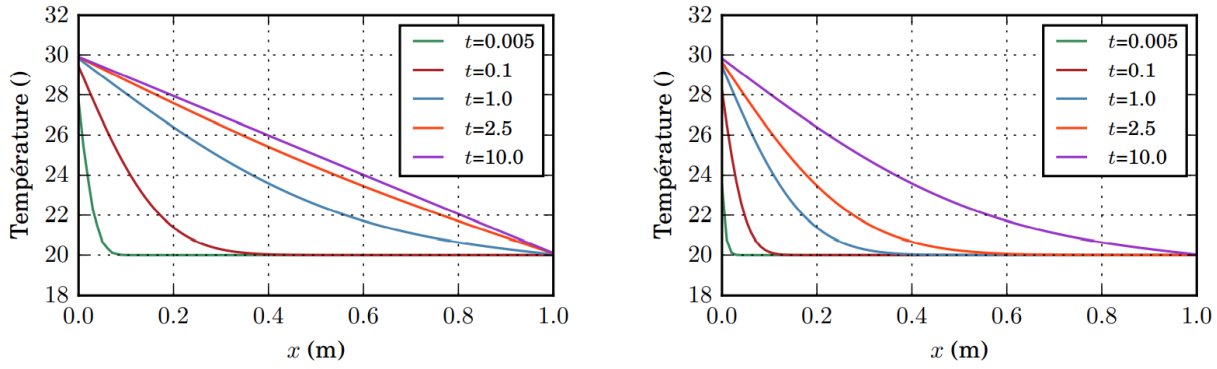



**Figure 1 – Profil de température au sein d'une plaque plane à différents instants.** Figure de gauche : $D = 0{,}1\,\mathrm{m}^2/\,\mathrm{min}$ ; figure de droite : $D = 0{,}01\,\mathrm{m}^2/\,\mathrm{min}$. Tous les autres paramètres sont identiques dans les deux simulations, en particulier $\Delta T = 10\,°\mathrm{C}$. Les temps sont exprimés en minutes.

Observations : Avancée progressive d'un front de diffusion jusqu'à atteindre en régime stationnaire un profil de température affine (cf § C). Régime stationnaire atteint plus rapidement pour le cas de gauche.

➲ Interpréter en introduisant $\tau$ la durée caractéristique de variation de la température.

**c) Conditions aux limites**

La résolution complète de l'équation de diffusion nécessite de connaître les conditions initiales (à $t = 0$) et les conditions aux limites (aux points de la surface du système (Σ) étudié).

Quelle que soit la situation, on a **continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique** $\overrightarrow{j_{th}}$ (il n'y a pas d'accumulation d'énergie à l'interface).

◆ **Cas d'un contact thermique parfait entre deux matériaux solides**

Dans ce cas, en un point $P$ de la surface du système (Σ), on a :

- **continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique**
- et **continuité du champ de température** :

$$\boldsymbol{T(P,t)_{solide\,1} = T(P,t)_{solide\,2}}$$

◆ **Cas d'un contact avec un fluide – Transfert thermique conducto-convectif : loi de Newton**

Lorsque le matériau solide (ex : mur) est en contact avec un fluide (ex : air), il apparaît un phénomène de convection au voisinage de la surface du solide.

Cet échange conducto-convectif est décrit par la **LOI DE NEWTON**. A l'interface fluide / solide, le flux thermique élémentaire traversant en $P$ la surface $dS_P$ dans le sens fluide → solide s'écrit :

$$\boldsymbol{d\Phi_{Flu\to Sol} = h(T_{Flu} - T(P,t))dS_P} \text{ avec}$$

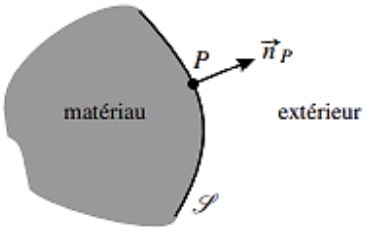
- $T_{Flu}$ la température du fluide suffisamment éloigné de la paroi (où la convection n'est plus active),
- $T(P,t)$ la température du solide en $P$ à $t$,
- $h$ le coefficient de transfert conducto-convectif ($\boldsymbol{USI : W.m^{-2}.K^{-1}}$) qui dépend de la nature du solide et du fluide ainsi que de la vitesse du fluide et de l'état de surface du solide, cf TP.

*ODG du coefficient h :*

| fluide | type de transfert | $h$ en $\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$ |
|---|---|---|
| gaz | convection naturelle | $5 - 30$ |
| | convection forcée | $10 - 300$ |
| eau | convection naturelle | $100 - 1000$ |
| | convection forcée | $300 - 12000$ |

Dans le cas d'un contact du système (Σ) solide avec un fluide, la continuité de la composante normale du vecteur densité de flux thermique en un point $P$ de la surface, s'écrit :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_{th}}(P,t)\cdot\vec{n}_P = -h(T_{Flu} - T(P,t))}$$




◆ **Cas d'une paroi adiabatique**

Dans le cas où le système (Σ) présente une paroi adiabatique, en un point $P$ de cette paroi, on a :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{j_{th}}(P,t)\cdot\vec{n}_P = 0}$$

# C) Cas particulier du régime stationnaire en l'absence de source

On suppose dans ce paragraphe que le régime stationnaire est atteint : **la température en tout point du système est indépendante du temps : on a $T(M)$ et $\overrightarrow{j_{th}}(M)$.**

*Rq : Les résultats établis ici sont généralisables au cas des régimes quasi-stationnaires (ARQS thermique), cf TD et TP.* ***L'ARQS est vérifiée lorsque le temps caractéristique de variation des conditions aux limites est très supérieur au temps caractéristique $\tau$ de diffusion****, cf § B.2.b.*

## 1) Conservation du flux thermique

En **régime stationnaire et en l'absence de production de chaleur interne**, le **flux thermique entrant est égal au flux thermique sortant** de n'importe quel système.
On dit qu'il y a **conservation du flux thermique** ou que $\overrightarrow{j_{th}}$ est à flux conservatif.

➲ Démonstration à connaître : En reprenant le bilan d'énergie réalisé au § B.1 pour un volume élémentaire sur l'intervalle $[t, t+dt]$, montrer le résultat ci-dessus.

## 2) Profil de température en régime stationnaire – Expression du flux thermique

### a) Equation de Laplace

En régime stationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Ainsi, **en régime stationnaire et en l'absence de source**, le champ de température vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta T(M) = 0$$

Il n'est pas toujours possible de résoudre analytiquement cette équation.
On détermine la solution analytique dans les conditions suivantes :

→ géométrie unidimensionnelle cartésienne (cf § b) ; symétrie cylindrique (cf TD).
→ contact thermique parfait au niveau des surfaces du système.

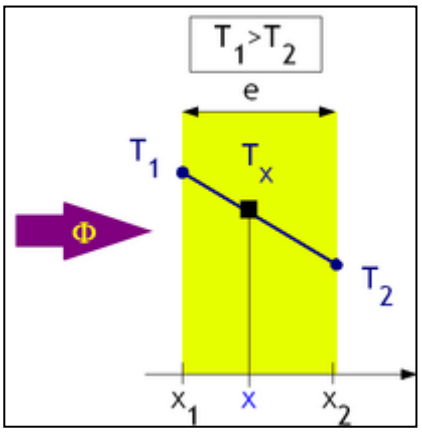
### b) En géométrie unidimensionnelle cartésienne

➲ Exercice classique à savoir refaire :

On considère un mur d'épaisseur $e$ et de surface $S$ en contact avec deux thermostats de températures différentes (pour $e \ll \sqrt{S}$, on néglige les effets de bord).

Conditions aux limites :

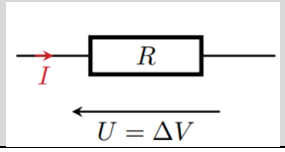
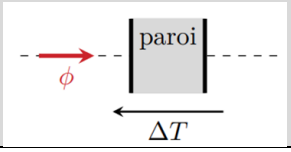
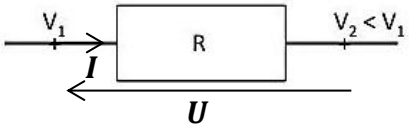
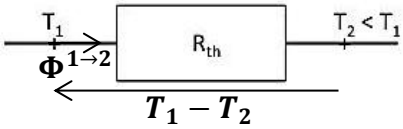
$$T(x=0) = T_1 \quad et \quad T(x=e) = T_2$$




i) Montrer que le profil de température est affine (2 démarches sont possibles).

ii) Montrer que le flux thermique au travers de $S$ vérifie la relation : $T_1 - T_2 = \left(\frac{e}{\lambda.S}\right) \cdot \Phi^{1\to 2}$

## 3) Analogie avec la conduction électrique – Résistance thermique

| **Conduction électrique** | **Conduction thermique** |
|---|---|
|  |  |
| ① **Cause :** | |
| **Différence de potentiel** électrique $V$<br>Tension : $\boldsymbol{U = \Delta V = V_1 - V_2}$ | **Différence de température** $T$<br>$\boldsymbol{\Delta T = T_1 - T_2}$ |
| ② **Conséquence :** | |
| **Intensité électrique** : $I = \iint_S \vec{j}_{é}.\overrightarrow{dS}$<br>$\vec{j}_{é}$ vecteur densité de courant électrique, *cf Ch.EM2.* | **Flux thermique** : $\Phi = \iint_S \vec{j}_{th}.\overrightarrow{dS}$<br>$\vec{j}_{th}$ vecteur densité de flux thermique. |
| ③ En **régime stationnaire** (ou ARQS), le long d'un tube de courant, on a **conservation**… | |
| **… de I** (loi des branches / des nœuds). | **… du flux** *en l'absence de sources*. |
| ④ En **régime stationnaire** (ou ARQS), loi reliant ① et ② | |
|  |  |
| **Loi d'Ohm globale** ***en convention récepteur*** **:**<br>$\boldsymbol{U = V_1 - V_2 = R \cdot I}$<br>$\boldsymbol{R}$ **résistance électrique** | **Loi de Fourier globale** ***en convention récepteur*** **:**<br>$\boldsymbol{T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \Phi^{1\to2}}$<br>$\boldsymbol{R_{th}}$ **résistance thermique** |

**RESISTANCE THERMIQUE :**

$\boldsymbol{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi^{1\to2}}}$ grandeur **positive en** $\boldsymbol{K.W^{-1}}$

→ *convention récepteur thermique*

On définit également une conductance thermique $G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$.

Plus $\boldsymbol{R_{th}}$ est **élevée**, plus **l'isolation thermique est importante**.

**NB** : Attention à la convention récepteur : accompagnez votre relation d'un schéma et vérifiez vos signes !

## 4) Expression de résistances thermiques

### a) En géométrie unidimensionnelle cartésienne

D'après le § C.2.b, la résistance thermique d'une paroi plane d'épaisseur $e$ et de section $S$ faite dans un matériau de conductivité thermique $\lambda$ vaut :

$$\boldsymbol{R_{th} = \frac{e}{\lambda . S}}$$

Elle dépend du matériau mais aussi de la géométrie du système.

$R_{th}$ est d'autant plus élevée que $e$ est élevé, que $S$ est faible et que $\lambda$ est faible. Ce qui est cohérent avec la notion d'isolation thermique.

*Rq : La résistance électrique d'un conducteur d'épaisseur e et de section S faite dans un matériau de conductivité électrique γ vaut* $R = \frac{e}{\gamma \cdot S}$ *(cohérence avec la notion d'isolation électrique).*

**NB :**

La **résistance thermique** $\boldsymbol{R_{th}}$ quantifie la **facilité/difficulté des transferts thermiques** au travers d'un système, et tient compte non seulement du **matériau** (conductivité thermique) mais aussi de la **géométrie**.

La **diffusivité thermique** $\boldsymbol{D}$ compare les propriétés de **conduction** (conductivité thermique) et de **stockage** thermique (capacité thermique). Elle est intrinsèque à un **matériau**, et indépendante de la géométrie du système.

### b) Résistance thermique d'interface

On considère deux milieux de températures respectives $T_1$ et $T_2$ séparés par un fluide. Le flux thermique élémentaire traversant la surface $dS_P$ dans le sens 1 → 2 est donné par la loi de Newton (cf § B.2.c) :

$$d\Phi^{1\to 2} = h(T_1 - T_2)dS_P$$

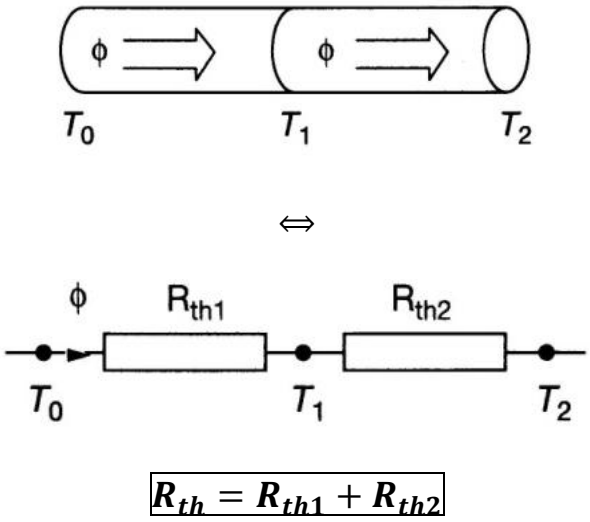
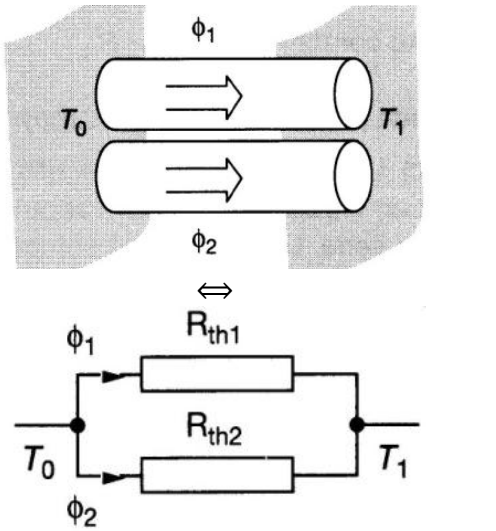
En régime stationnaire, on peut associer à cette interface de surface $S$ une résistance thermique d'interface (ou de contact ou de convection) :

$$\boldsymbol{R_{th,i} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi^{1\to 2}} = \frac{1}{hS}}$$

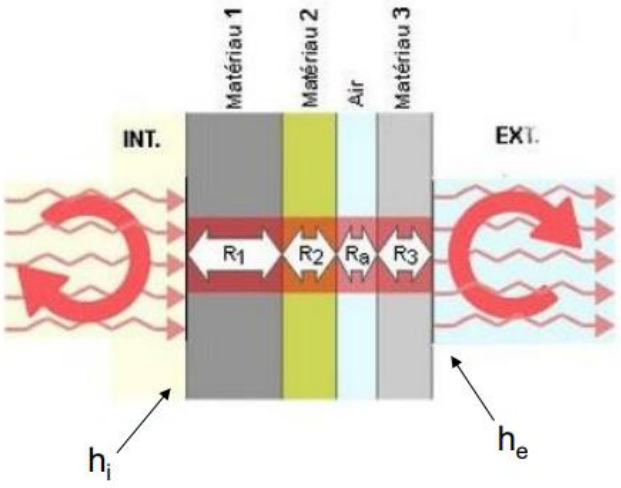
*Rq : Le contact thermique parfait entre deux milieux se définit par* $R_{th,i} \to 0$*, donc* $h \to \infty$ *et donc* $T_1 = T_2$ *sous peine d'avoir un flux infini.*

## 5) Associations de résistances thermiques

Tout comme on associe les résistances électriques, on peut associer les résistances thermiques.

| Association **série** | Association **parallèle** |
|---|---|
| Les **résistances** thermiques sont en **<u>série</u> ssi elles sont traversées par le même flux thermique.** | Les **résistances** thermiques sont en **<u>parallèle</u> ssi elles ont la même différence de température à leurs « bornes ».** |
|  $\boldsymbol{R_{th} = R_{th1} + R_{th2}}$ |  $\boldsymbol{G_{th} = G_{th1} + G_{th2} \Leftrightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}}$ |
| Ex : double vitrage | Ex : mur percé d'une fenêtre |

Autre exemple d'association série : paroi multi-couche (prise en compte des résistances d'interface) :




$$R_{th} = \frac{1}{h_i.S} + \sum R_{cond.} + \frac{1}{h_e.S}$$

*<u>Rq</u> :*

- *On peut également exploiter les formules des ponts diviseurs de température (pour des résistances thermiques en série) et de flux (pour des résistances thermiques en parallèle), cf TD.*
- *L'analogie thermo-électrique n'est pas seulement formelle : un métal bon conducteur électrique est aussi un bon conducteur thermique. En effet, les mouvements des électrons délocalisés transportent tout aussi bien une charge qu'une énergie d'agitation thermique : les deux types de conduction sont liés.*

# D) Application : Thermique de l'habitat – ARQS thermique

## 1) Bilan thermique

Système considéré : air intérieur et parois de l'habitation de capacité thermique $C$
Hypothèses : la température est quasi-uniforme au sein du système et varie « lentement » au cours du temps (ARQS).

Le 1er principe de la thermodynamique donne :

$$dU = -\Phi_{pertes}dt + \Phi_{chauffage}dt$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\Phi_{chauffage}}_{\text{production/source}} = \underbrace{C\frac{dT}{dt}}_{\text{stockage}} + \underbrace{\Phi_{pertes}}_{\text{flux sortant}}$$

*Rq : en régime stationnaire, le chauffage compense les pertes.*

## 2) Dans l'ARQS : expression des pertes thermiques et analogie thermo-électrique

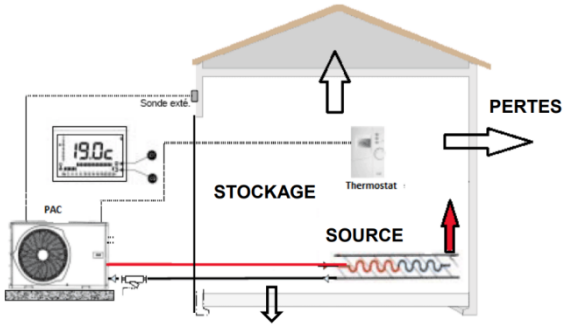
Pour évaluer les pertes, en ARQS, on exploite la relation :

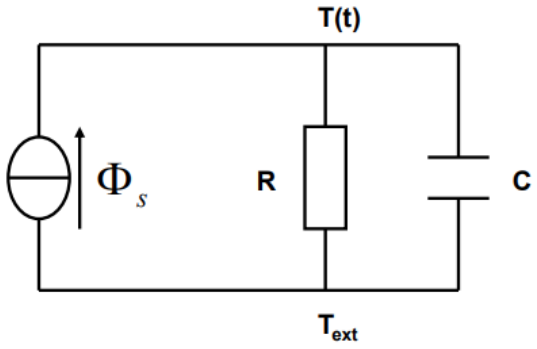
$$\Phi_{pertes} = \frac{T(t) - T_{ext}}{R_{th}}$$

en supposant que l'on peut modéliser la paroi qui sépare l'habitation de l'extérieur par une résistance thermique équivalente $R_{th}$, cf p.15.
On a ainsi :

$$\boldsymbol{\Phi_{chauffage} = C\frac{dT}{dt} + \frac{T(t) - T_{ext}}{R_{th}}}$$

Ce bilan est l'équivalent de la loi des nœuds en électricité et selon cette modélisation, on peut donner un schéma électrocinétique équivalent :




Avec $\Phi_S = \Phi_{chauffage}$

*Cf épreuve CCINP MP 2016 sur l'étude thermique d'un bâtiment et l'analogie thermoélectrique.*

# E) Résolution numérique de l'équation de la diffusion thermique 1D

## 1) Méthode des différences finies

Pour résoudre l'équation de la diffusion 1D, on peut utiliser la **méthode des différences finies qui dérive de la méthode d'Euler explicite**, *cf capacités numériques*.
On s'intéresse au problème de la diffusion thermique en géométrie unidimensionnelle cartésienne.
On considère une barre homogène, de section $S$ et de longueur $L$ : la température est uniforme dans chaque section droite de la barre. On note $(Ox)$ l'axe de la barre.
Le matériau constitutif de la barre est caractérisé par : $\rho$ sa **masse volumique**, $c$ sa **capacité thermique massique** et $\lambda$ sa **conductivité thermique.** On introduit $D$ le **coefficient de diffusion** du matériau :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

Dans ce cadre, en l'absence de terme source, l'équation de la diffusion thermique s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

On cherche la solution $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et pour $t \in [0, tf]$.
Pour résoudre numériquement cette équation, il faut la discrétiser.
On introduit $T$ un tableau qui rassemble les températures en différents points de la barre et à différents instants. $T$ a $nx \times nt$ éléments avec $\boldsymbol{nx}$ **le nombre de points** sur l'intervalle $[0, L]$ et $\boldsymbol{nt}$ **le nombre d'instants** sur l'intervalle $[0, tf]$ où on cherche la température.
On introduit un **pas d'espace :** $\boldsymbol{dx = \frac{L}{nx-1}}$ et un **pas de temps :** $\boldsymbol{dt = \frac{tf}{nt-1}}$.
Pour une expérience, $dx$ correspond à la distance entre deux capteurs de température et $dt$ correspond à la période d'échantillonnage, cf TP. On a :

$\boldsymbol{T[k][i] = T(x_k, t_i) = T(k.dx, i.dt)}$ avec $k \in [\![0, nx-1]\!]$ et $i \in [\![0, nt-1]\!]$ ;
$T[k] = T(x_k, t)$ qui donne l'évolution temporelle de la température en $x_k$ ;
$T[:, i] = T(x, t_i)$ qui donne le profil de température à l'instant $t_i$.

➲ Démonstration à connaître :
i) Faire un $DL_1$ en $dt$ de $T[k][i+1] = T(x_k, t_i + dt)$. En déduire une expression approchée de la dérivée partielle 1e temporelle de la température en $x_k$.
ii) Faire un $DL_2$ en $dx$ de $T[k \pm 1][i] = T(x_k \pm dx, t_i)$. En déduire une expression approchée de la dérivée partielle 2e spatiale de la température à l'instant $t_i$.
iii) Réécrire l'équation de diffusion avec ces résultats et montrer que la relation de récurrence qui donne $\boldsymbol{T[k][i+1]}$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{T[k][i+1] = T[k][i] + \frac{dt.D}{dx^2}.(T[k+1][i] + T[k-1][i] - 2.T[k][i])}}$$

Cette relation correspond à un **schéma numérique explicite** : elle permet de calculer la température en $x_k$ à l'instant $t_i + dt$ connaissant les températures à l'instant « précédent » $t_i$.
Les températures au sein de la barre étant connues à $t = 0$ (**condition initiale**) et connaissant les **conditions aux limites** (par exemple, la température aux extrémités de la barre est imposée à toute date), on peut déterminer la température au sein de la barre à toute date à partir du **schéma numérique** inséré dans **deux boucles *for* imbriquées**.
On admet que l'erreur associée à ce schéma numérique conduit au **critère de stabilité** suivant :

$$\frac{D.dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2}$$

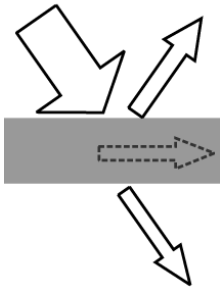
## 2) Mise en œuvre : cf TP

# 3e partie : Transferts thermiques radiatifs

## A) Lois du rayonnement thermique

### 1) Flux (ou puissances) surfaciques – Bilan

♦ Lorsqu'un corps reçoit un rayonnement électromagnétique on observe trois phénomènes :
- la **REFLEXION** : une partie de l'énergie incidente est renvoyée dans le demi-espace d'où elle provient ;
- la **TRANSMISSION** : une autre partie de l'énergie incidente traverse le corps ;
- l'**ABSORPTION** : une dernière partie de l'énergie incidente est absorbée par le corps i.e. convertie en énergie interne.



♦ Un corps **TRANSPARENT** est un **corps n'absorbant pas** : l'énergie incidente est soit réfléchie, soit transmise.
Un corps **OPAQUE** est un corps à travers lequel il n'y a **aucune transmission** : l'énergie incidente est soit réfléchie, soit absorbée.
**NB** : Pour les milieux, il n'existe pas de transparence ou d'opacité absolue, celles-ci dépendent de la longueur d'onde. Par exemple, le verre est transparent dans le visible mais opaque aux infrarouges.

♦ Dans la suite, **on s'intéresse seulement aux corps opaques** et on mène des bilans en termes de **flux** (ou puissances) **surfaciques** :

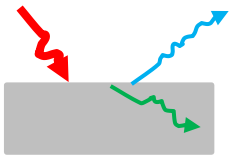
Soit $d\Phi$ le flux (ou puissance), en $W$, traversant une surface élémentaire $dS$, le **FLUX SURFACIQUE** (ou puissance surfacique) $\varphi$, en $W.m^{-2}$, est donné par :

$$\boldsymbol{d\Phi = \varphi . dS}$$

**NB** : La norme du vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ (cf 2e partie § A.1) a la dimension d'un flux surfacique. Le flux surfacique associé à un rayonnement électromagnétique correspond à la norme du vecteur de Poynting $\vec{\pi}$ (cf ChEM4).

Pour un corps opaque, on a le bilan suivant :

$$\varphi^i = \varphi^r + \varphi^a$$



Pour être à l'équilibre thermodynamique, un corps doit évacuer l'énergie qu'il reçoit du rayonnement électromagnétique. Pour cette raison, il rayonne lui-même : sous l'effet de l'agitation thermique, les particules qui constituent le corps s'agitent (cf ChEM8) et émettent des ondes électromagnétiques appelées « **RAYONNEMENT THERMIQUE** ».
On note $\varphi^e$ le flux surfacique émis par le corps. En considérant que le flux surfacique $\varphi^e$ est uniforme à la surface $S$ du corps qui l'émet, on a le flux du rayonnement thermique qui s'écrit : $\Phi^e = \varphi^e . S$.

💣 Ne pas confondre $\varphi^e$, produit par le corps lui-même, et $\varphi^r$, réfléchi par le corps éclairé par un rayonnement incident.
**NB** : Par convention, les flux surfaciques $\varphi^i$, $\varphi^r$, $\varphi^a$ et $\varphi^e$ sont positifs.

On peut introduire deux autres flux surfaciques :
- le flux surfacique partant : $\varphi^p = \varphi^r + \varphi^e$
- le flux surfacique radiatif : $\varphi^R = \varphi^p - \varphi^i = \varphi^e - \varphi^a$.

Un corps est à **<u>l'équilibre radiatif</u>** s'il n'y a ni accumulation, ni perte d'énergie par rayonnement. Ainsi, pour un corps opaque à l'équilibre radiatif, les flux surfaciques vérifient :

$$\varphi^{\mathrm{R}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi^e = \varphi^a}$$

**Si le corps est à l'équilibre thermique alors on considère qu'il est à l'équilibre radiatif** *(le transfert thermique radiatif étant prépondérant et plus rapide que les transferts thermiques par conduction et convection).*

## 2) Corps noir

Un **<u>CORPS NOIR</u>** est un **corps qui absorbe l'intégralité du rayonnement électromagnétique qu'il reçoit** :

$$\boldsymbol{\varphi^a = \varphi^i}$$

Conséquence : Pour un **corps noir à l'équilibre radiatif**, on a :

$$\boldsymbol{\varphi^e = \varphi^a = \varphi^i}$$

Dans la pratique, il n'existe aucun matériau se comportant comme un corps noir sur tout le spectre électromagnétique. **Le corps noir est un modèle idéal dont certains objets réels se rapprochent, au moins sur certains intervalles de longueur d'onde** :

- une plaque recouverte de noir de fumée pour le rayonnement visible.
- une brique pour le domaine infrarouge.

La **meilleure réalisation pratique d'un corps noir** correspond à une **ouverture de faible dimension** pratiquée dans une **enceinte creuse** dont les parois sont maintenues à une température fixe $T$. Tout rayonnement provenant de l'extérieur et qui arrive sur l'ouverture entre dans l'enceinte et subit un très grand nombre de réflexions. Du fait de l'absorption partielle des parois intérieures de la cavité, le rayonnement est absorbé avant de pouvoir sortir de la cavité.

*<u>Rq</u> : on parle parfois de corps gris lorsqu'une proportion, indépendante de la longueur d'onde, du rayonnement incident est absorbée.*

## 3) Flux surfacique émis par un corps noir isotherme

Le rayonnement émis par un corps noir présente un **spectre continu** : il se répartit sur un intervalle de longueurs d'onde. Pour le décrire, on introduit la densité spectrale de flux surfacique émis $F^e(\lambda)$.

Soit $d\varphi^e$ le flux surfacique élémentaire émis dans l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, la **<u>densité spectrale de flux surfacique émis</u>** $F^e(\lambda)$ est donnée par :

$$d\varphi^e = F^e(\lambda).\, d\lambda$$

L'USI de $F^e(\lambda)$ est $W.m^{-3}$ mais on l'exprime usuellement en $W.m^{-2}.\mu m^{-1}$ ou en $kW.m^{-2}.nm^{-1}$.

Le flux surfacique total est donc $\varphi^e = \int_0^\infty F^e(\lambda).\, d\lambda$.

**a) Loi de Planck (1900)**

La **loi de Planck** exprime la densité spectrale de flux surfacique émis par un **corps noir isotherme** à la température $T$ :

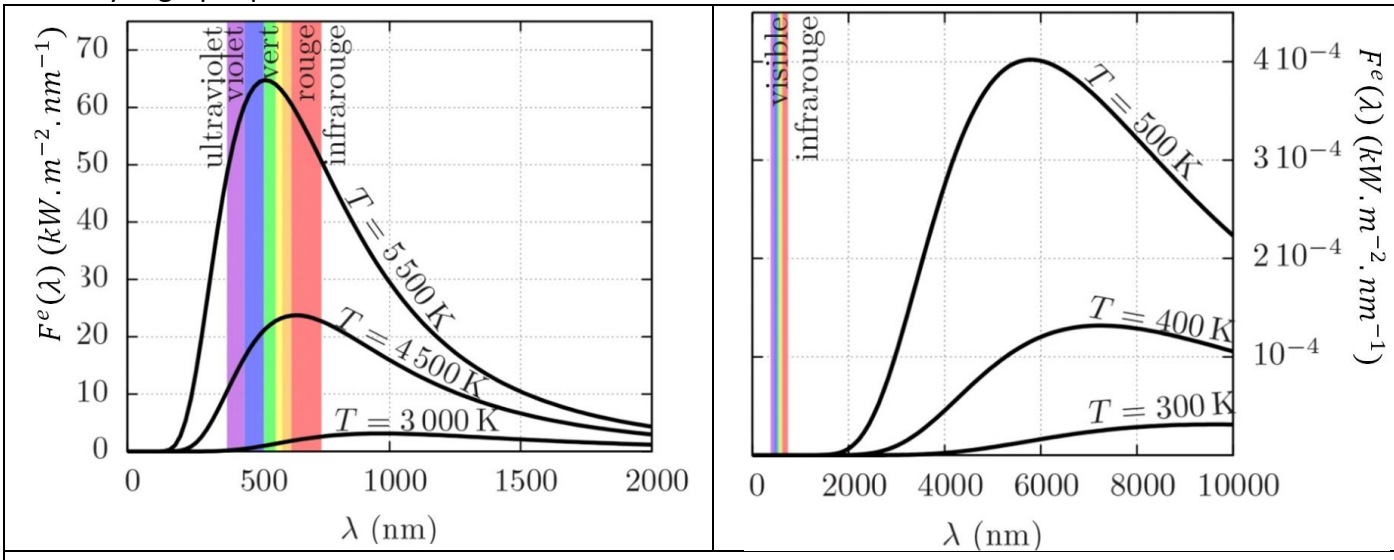
$$F^e(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} . \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Avec :

- $h$ la **constante de Planck** : $\boldsymbol{h = 6,63.10^{-34} J.s}$. $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ est l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda$ (cf ChMQ1) ;
- $k_B$ la **constante de Boltzmann** : $\boldsymbol{k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}}$ . $E = k_B T$ est l'énergie d'agitation thermique typiquement disponible par entité constitutive d'un corps à la température $T$.

➲ Analyse dimensionnelle : vérifier que l'argument de l'exponentielle est adimensionné et vérifier l'homogénéité de l'expression globale de la densité spectrale de flux surfacique émis $F^e(\lambda)$.

♦ Analyse graphique :




Evolution de la densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir de température $T$ en fonction de la longueur d'onde pour différentes températures $T$.

A température fixée, on observe que la densité spectrale de flux surfacique émis admet un **maximum** pour une longueur d'onde $\lambda_{max}$.

On constate que la longueur d'onde $\boldsymbol{\lambda_{max}}$ **diminue lorsque la température augmente** : il s'agit de la loi de Wien, énoncée en 1893 (cf § b).

Par ailleurs, on constate que **l'aire sous la courbe augmente lorsque la température augmente** : il s'agit de la loi de Stefan-Boltzmann, énoncée en 1879 (cf § c).

*Rq : À la fin du 19e siècle, les physiciens essayaient de démontrer en vain ces deux lois à partir de la physique classique. C'est Planck qui, à la fin du 19e siècle, introduit l'idée que le rayonnement électromagnétique (notamment la lumière) n'est pas absorbé et émis de manière continue, mais uniquement de manière discrète : l'énergie du rayonnement électromagnétique de fréquence $\nu$ est un multiple entier de $h\nu$. Cette hypothèse de quantification de l'énergie permet d'établir les lois de Wien et de Stefan et signe la naissance de la mécanique quantique : elle a été reprise par Einstein en 1905 pour interpréter l'effet photo-électrique (cf ChMQ1).*

**b) Loi de (déplacement de) Wien (1893)**

La **densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir à la température $T$** est **maximale** pour une longueur d'onde $\lambda_{max}$ qui vérifie :

$$\boldsymbol{\lambda_{max}.T = 2898\ \mu m.K}$$

De plus, on peut montrer que 98% du flux émis est compris dans l'intervalle $[0{,}5.\lambda_{max}; 8.\lambda_{max}]$.

Justification de la loi de Wien à partir de la loi de Planck : cf TD.

*Interprétation de la loi de Wien : plus un corps est chaud, plus ses atomes s'agitent et plus grande est leur propension à émettre des photons plus énergétiques. Comme l'énergie d'un photon est $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$, un corps plus chaud a tendance à émettre une plus forte proportion de photons de courte longueur d'onde.*

Ex : Lorsqu'on chauffe un métal, il passe du rouge au jaune puis devient blanc (avec un maximum dans le bleu).

**c) Loi de Stefan(-Boltzmann) (1879)**

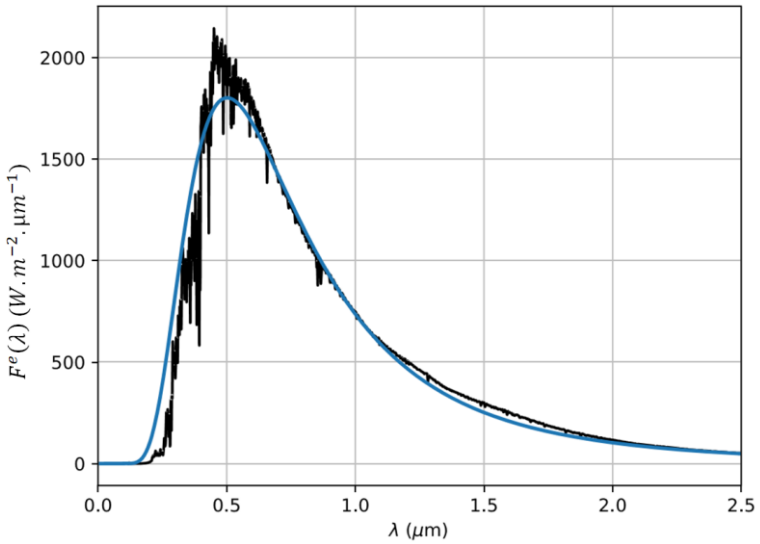
Le **flux surfacique émis par un corps noir à la température $T$** vérifie :

$$\boldsymbol{\varphi^e = \sigma.T^4} \qquad avec\ \sigma = 5{,}67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}\ \text{constante de Stefan}$$

Justification de la loi de Stefan à partir de la loi de Planck : cf TD.

**d) Modélisation**

Le graphique ci-dessous compare les densités spectrales de flux surfacique émis
- par le Soleil et mesurée au-dessus de l'atmosphère
- par un corps noir de température $T = 5777\ K$.




Bien que le Soleil ne soit pas un corps noir à l'équilibre (sa température de surface vaut approximativement $T = 5800\ K$ mais sa température augmente en se rapprochant de son centre), les courbes sont relativement proches.

En pratique, les lois de Wien et de Stefan seront utilisées pour des systèmes qui s'éloignent du modèle strict : systèmes hors équilibre ou systèmes qui ne sont pas totalement absorbants. La température prise en compte dans les lois sera celle de la surface du système.

### 4) Applications

➲ 1e application :

En supposant que la surface du corps humain se comporte comme un corps noir :

- calculer la longueur d'onde du maximum d'émission par un corps humain, dans quel domaine se situe cette émission ?
- calculer le flux thermique émis par un corps humain.

➲ 2e application :

En supposant que la surface du Soleil se comporte comme un corps noir :

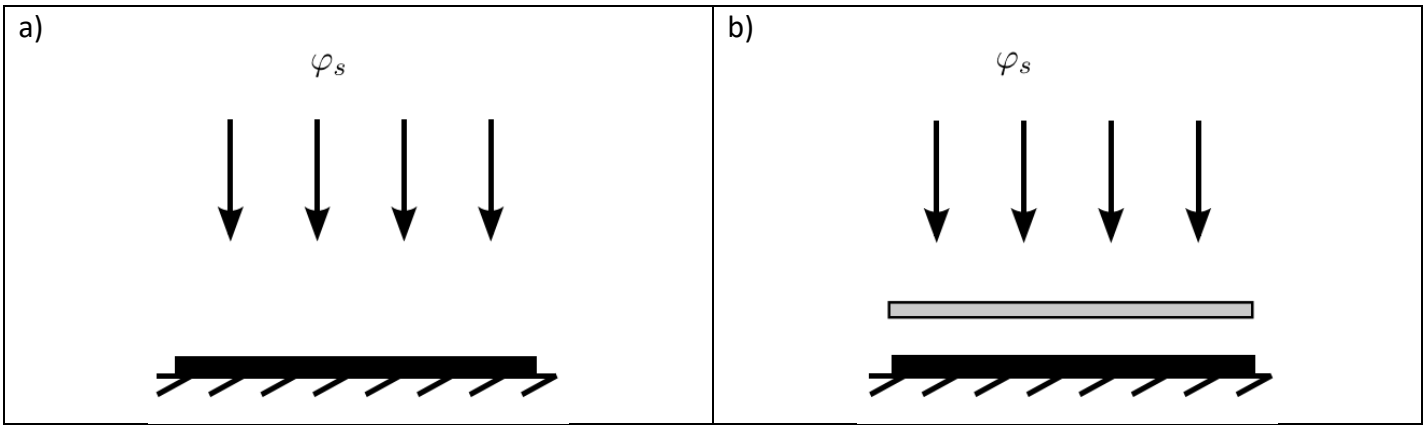
- déterminer la température de surface du Soleil sachant que $\lambda_{max} \approx 500\ nm$ ;
- sachant que 98% du flux émis par un corps est compris dans l'intervalle $[0{,}5.\lambda_{max}; 8.\lambda_{max}]$, préciser les domaines dans lesquels se situe le rayonnement solaire ;
- déterminer l'ordre de grandeur de la puissance rayonnée par le Soleil et la comparer à la puissance d'une tranche de centrale nucléaire $1GW$ ;
- calculer le flux surfacique solaire (en moyenne sur une journée) qui arrive à la surface de la Terre.

Données :

Rayons du Soleil $R_S = 6{,}96.10^5\ km$, de la Terre $R_T = 6{,}4.10^3\ km$ ; Distance Terre-Soleil $d_{TS} = 1{,}5.10^8\ km$

## B) Application à l'étude de l'effet de serre

### 1) Principe : serre d'horticulture




L'objectif est de déterminer la température d'une plaque noire éclairée par le Soleil (flux surfacique moyen incident sur Terre : $\varphi_S = 3{,}4.10^2\ W.m^{-2}$) en l'absence ou en présence de vitre.

Hypothèses :

- seuls les transferts thermiques radiatifs sont considérés
- la plaque et la vitre sont à l'équilibre thermique donc radiatif
- la surface de la plaque se comporte comme un corps noir
- la vitre ne réfléchit aucun rayonnement et elle est transparente au rayonnement solaire (qui contient essentiellement des UV et du visible), en revanche, elle absorbe le rayonnement infrarouge.

➲ Cas a) étant donné l'hypothèse d'équilibre radiatif et en exploitant la loi de Stefan, déterminer la température de la plaque.

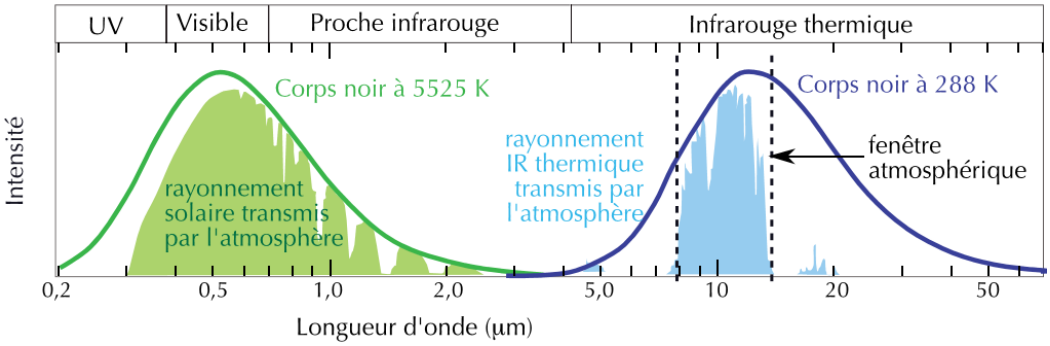
➲ Cas b) étant donné l'hypothèse d'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre, exprimer le flux surfacique émis par la plaque en fonction de $\varphi_S$ puis en exploitant la loi de Stefan, déterminer la température de la plaque. Commenter.

## 2) Cas de la Terre

L'objectif est de déterminer la température de la surface terrestre éclairée par le Soleil (flux surfacique moyen incident sur Terre : $\varphi_S = 3{,}4.10^2\ W.m^{-2}$) en l'absence ou en présence d'atmosphère.

Hypothèses :

- seuls les transferts thermiques radiatifs sont considérés
- la Terre et l'atmosphère sont à l'équilibre thermique donc radiatif
- on considèrera que les surfaces de la Terre et de l'atmosphère sont égales (l'épaisseur de l'atmosphère est d'environ $30\ km \ll R_T = 6{,}4.10^3\ km$)
- la surface de la Terre se comporte comme un corps noir
- l'atmosphère est transparente au rayonnement solaire (qui contient essentiellement des UV et du visible), en revanche, elle absorbe une fraction $\beta \approx 0{,}9$ de rayonnement infrarouge :




Spectre d'absorption par l'atmosphère des rayonnements émis par le Soleil et la Terre en l'absence de nuages et d'aérosols

*D'après un article de J.Poitou, issu de la revue « Reflets de la physique » n°33 (2013)*

### a) En l'absence d'atmosphère

➲ Etant donné l'hypothèse d'équilibre radiatif et en exploitant la loi de Stefan, déterminer la température de la surface terrestre en l'absence d'atmosphère et commenter.

On peut affiner en prenant en compte l'albédo $A$ : fraction du rayonnement reçu réfléchie par une surface.

Ex : les océans ont un albédo compris entre 5 et 10% ; le sable entre 25 et 40% ; la glace environ 60% ; la neige épaisse et fraîche jusqu'à 90%.

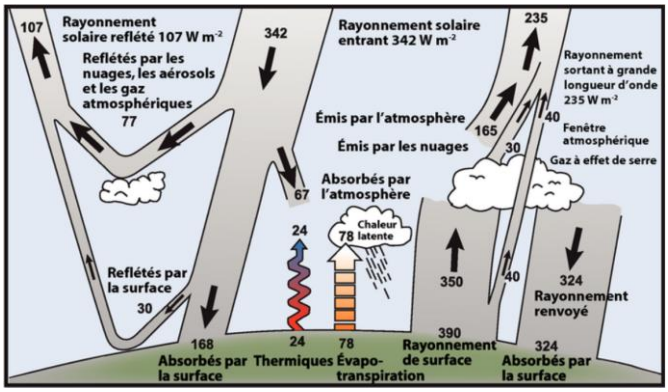
➲ Sachant que l'albédo moyen de la surface terrestre $A \approx 30\%$, déterminer sa température.

### b) En présence d'atmosphère

➲ Etant donné l'hypothèse d'équilibre radiatif de la Terre et de l'atmosphère, exprimer le flux surfacique émis par la Terre en fonction de $\varphi_S$ puis en exploitant la loi de Stefan, déterminer la température de la surface terrestre en présence d'atmosphère et commenter.

Pour améliorer le modèle, il faudrait prendre en compte le fait que :

- l'atmosphère absorbe et réfléchit une fraction du rayonnement solaire ;
- une partie de la puissance reçue par la surface de la Terre n'est pas émise sous forme de rayonnement, mais sert à l'évaporation des océans…




*→ Échanges énergétiques Terre-atmosphère-espace en $W.m^{-2}$, d'après un article de Kiehl et Trenberth*