Outils mathématiques : Analyse vectorielle

Compétences au programme :

Gradient.	Citer le lien entre le gradient et la différentielle. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes. Utiliser le fait que le gradient d'une fonction f est perpendiculaire aux surfaces iso-f et orienté dans le sens des valeurs de f croissantes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.
Rotationnel.	Citer et utiliser le théorème de Stokes. Exprimer le rotationnel en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
Laplacien d'un champ de vecteurs.	Exprimer le laplacien d'un champ de vecteurs en coordonnées cartésiennes. Utiliser la formule d'analyse vectorielle : $\Delta\vec{a} = \overrightarrow{grad}(div\vec{a}) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}\right)$.
Cas des champs proportionnels à $e^{i(\omega t-\vec{k}.\vec{r})}$ ou à $e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$.	Exprimer l'action des opérateurs d'analyse vectorielle sur un tel champ à l'aide du vecteur $i\vec{k}$. → cf ChEM5

Les chapitres T4, EM1, EM4 et EM5 feront référence à cette fiche.

A) Différentielle et dérivée partielle

Considérons une fonction $f(x, y, z)$ des variables $x, y\ et\ z$.
La **DIFFERENTIELLE** $\boldsymbol{df}$ de cette fonction s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \cdot dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \cdot dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \cdot dz}}$$

Qualitativement, la différentielle df correspond à la variation infinitésimale (ou élémentaire) de la grandeur f quand on fait varier simultanément les variables $x, y\ et\ z$ de façon infinitésimale de $dx, dy\ et\ dz$.

La grandeur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$ est appelée **DERIVEE PARTIELLE** de la fonction f par rapport à la variable x, les autres variables (y, z) étant fixées (i.e. considérées comme des constantes).

Rq : Si la fonction f ne dépend que d'une seule variable, par exemple z, alors $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = 0$ et $df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \cdot dz \Leftrightarrow df = f(z+dz) - f(z) = \frac{df}{dz} \cdot dz.$

B) GRADIENT

L'opérateur **gradient transforme** un champ **scalaire en** un champ **vectoriel**.

1) Définition - propriétés

Soit $f(M)$ un champ scalaire,

$$\boxed{\boldsymbol{df = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dl}}}$$

Avec $\overrightarrow{dl}$ vecteur déplacement élémentaire.

$\overrightarrow{grad}f$ est un vecteur **orthogonal** aux **surfaces iso-$\boldsymbol{f}$** et est orienté selon $\boldsymbol{f}$ **croissant**.

Rappel – En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

2) Expression

Coordonnées **cartésiennes** : $f(M) = f(x, y, z)$

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{grad}f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial z}} \end{pmatrix}}$$

Rq : L'expression du gradient dans les différents systèmes de coordonnées se déduit de la définition $df = \overrightarrow{grad}f.\overrightarrow{dl}$ et des expressions de $\overrightarrow{dl}$.

Les expressions du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques vous seront données.

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dOM} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rsin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

C) DIVERGENCE

L'opérateur **divergence transforme** un champ **vectoriel en** un champ **scalaire**.

1) Définition

Soit $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel, $d\tau$ un volume élémentaire autour du point M et $d\Phi(\vec{a}\,)$ le **flux** de $\vec{a}$ sortant de la surface élémentaire fermée entourant $d\tau$. Par définition, la divergence de $\vec{a}(M)$ notée $div\,\vec{a}(M)$ est :
$div\,\vec{a}(M) = \lim_{d\tau\to 0}\frac{d\Phi(\vec{a}\,)}{d\tau}$ ou encore au premier ordre en $d\tau$: $d\Phi(\vec{a}\,) = div\,\vec{a}(M).\,d\tau$

Rq : Un champ de vecteurs « diverge » en un point si son flux à travers une surface élémentaire entourant ce point est non nul.

2) Expressions

Coordonnées **cartésiennes** : $M(x,y,z)$ et $\vec{a}(M) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

$$\boxed{\boldsymbol{div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}}}$$

Les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques et sphériques vous seront données.

Coordonnées cylindriques

$M(r,\theta,z)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z$

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques

$M(r,\theta,\varphi)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

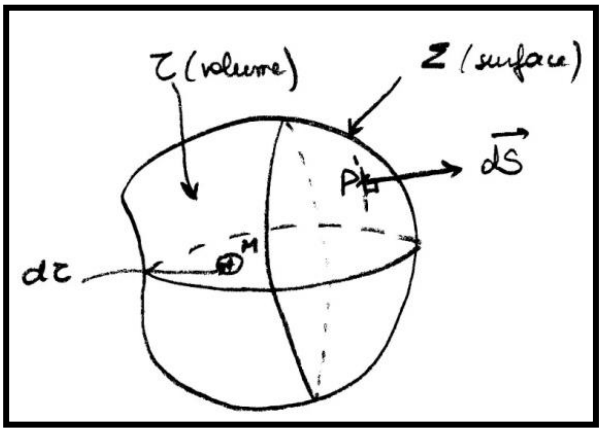
$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(\sin(\theta)\,a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

3) THEOREME D'OSTROGRADSKI

A un instant t fixé, le flux d'un champ de vecteur $\vec{a}$ à travers une surface fermée Σ est égale à l'intégrale de la divergence de $\vec{a}$ sur le volume τ délimité par la surface Σ :

$$\boxed{\Phi(\vec{a}\,) = \oiint_{\boldsymbol{P\in\Sigma}} \boldsymbol{\vec{a}(P,t)\overrightarrow{dS}} = \iiint_{\boldsymbol{M\in\tau}} \mathbf{div}\boldsymbol{\vec{a}(M,t)\,d\tau}}$$

Le vecteur surface $\overrightarrow{dS}$ est **normal** à Σ en P et est **orienté vers l'extérieur** de la surface.



NB :
- 💣 Il s'agit du **flux sortant** de la surface ($\overrightarrow{dS}$ perpendiculaire à Σ orienté vers **l'extérieur**).
- **Un champ à flux conservatif** est un champ de vecteur dont le flux à travers toute surface fermée est nul. C'est le cas du champ magnétostatique $\vec{B}$, cf ChEM2.

D) ROTATIONNEL

L'opérateur **rotationnel transforme** un champ **vectoriel en** un champ **vectoriel**.

1) Définition

Soit $\vec{a}(M)$ un champ vectoriel, $d\Gamma$ un contour élémentaire (courbe fermée) orienté autour du point M, $\overrightarrow{dS} = dS\vec{n}$ le vecteur surface élémentaire associé à ce contour ($\vec{n}$ orthogonal à la surface et orienté suivant le sens du contour) et $dC(M)$ la **circulation** élémentaire de $\vec{a}$ le long du contour $d\Gamma$.
Par définition, le rotationnel de $\vec{a}(M)$ noté $\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M)$ est :
$(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M)).\vec{n} = \lim_{d\tau\to 0}\frac{dC(\vec{a})}{dS}$ ou encore au premier ordre en dS : $dC(\vec{a}) = (\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M)).\overrightarrow{dS}$
Rq : Un champ de vecteurs dont le rotationnel en un point est non nul « tourne » (« est en rotation ») autour de ce point.

2) Expressions

Coordonnées **cartésiennes** : $M(x,y,z)$ et $\vec{a}(M) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_z}{\partial y} - \dfrac{\partial a_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a_y}{\partial x} - \dfrac{\partial a_x}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

Les expressions du rotationnel en coordonnées cylindriques et sphériques vous seront données.

Coordonnées cylindriques

$M(r,\theta,z)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial a_r}{\partial z} - \dfrac{\partial a_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Coordonnées sphériques

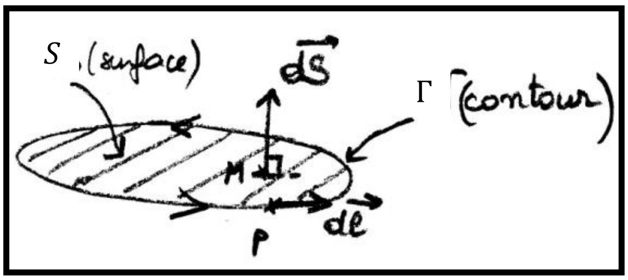
$M(r,\theta,\varphi)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin(\theta)\,a_\varphi)}{\partial \theta} - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

3) THEOREME DE STOKES

A un instant t fixé, la circulation d'un champ de vecteur $\vec{a}$ le long d'un contour orienté Γ est égale au flux du rotationnel de $\vec{a}$ à travers une surface ***Σ* s'appuyant sur *Γ* et orientée selon la règle de la main droite** :

$$\boxed{C(\vec{a}) = \oint_{P\in\Gamma} \vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{t})\overrightarrow{\boldsymbol{dl}} = \iint_{M\in S}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{t})\right).\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}}$$



*Rq : **Un champ à circulation conservative** est un champ de vecteur dont la circulation le long de tout contour est nulle. C'est le cas du champ électrostatique $\vec{E}$, cf ChEM1.*

E) LAPLACIEN SCALAIRE et LAPLACIEN VECTORIEL

L'opérateur **laplacien scalaire transforme** un champ **scalaire en** un champ **scalaire**.
L'opérateur **laplacien vectoriel transforme** un champ **vectoriel en** un champ **vectoriel**.

1) Définitions

Le laplacien d'un champ scalaire f est :

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{div}(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{f})}$$

Le laplacien d'un champ vectoriel $\vec{a}$ est :

$$\boxed{\Delta\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{div}\vec{\boldsymbol{a}}) - \overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,(\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{a}})}$$

Rq : le Laplacien vecteur est noté avec ou sans flèche : $\vec{\Delta}\vec{a}$ *ou* $\Delta\vec{a}$

2) Expressions

Coordonnées cartésiennes : $M(x, y, z)$; $f(M) = f(x, y, z)$ et $\vec{a}(M) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

- Laplacien scalaire :

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{z}^2}}$$

- Laplacien vectoriel :

$$\boxed{\Delta\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{a}_x \\ \Delta \boldsymbol{a}_y \\ \Delta \boldsymbol{a}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_x}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_x}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_x}{\partial \boldsymbol{z}^2} \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_y}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_y}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_y}{\partial \boldsymbol{z}^2} \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_z}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_z}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{a}_z}{\partial \boldsymbol{z}^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{a}}}{\partial \boldsymbol{x}^2} + \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{a}}}{\partial \boldsymbol{y}^2} + \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{a}}}{\partial \boldsymbol{z}^2}}$$

Les expressions des laplaciens en coordonnées cylindriques et sphériques vous seront données.
Cas du laplacien scalaire :

Coordonnées cylindriques

$$f(M) = f(r, \theta, z)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$f(M) = f(r, \theta, \varphi)$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

F) Formules utiles (cf ChEM4)

$$\boldsymbol{div}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{a}}\right) = \boldsymbol{0}$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{V}\right) = \vec{\boldsymbol{0}}$$

G) Le vecteur symbolique « nabla »

On définit le vecteur symbolique « nabla » en **coordonnées cartésiennes** par : $\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Tout seul, il n'a aucun sens, il faut l'appliquer à « quelque chose » (scalaire ou vecteur).

En coordonnées CARTESIENNES, les expressions des opérateurs (gradient, divergence, rotationnel et Laplacien scalaire) se retiennent facilement par des opérations (*produits « simple » / scalaire / vectoriel*) avec le vecteur « nabla ».

Coordonnées **cartésiennes** : $M(x, y, z)$; $f(M) = f(x, y, z)$ et $\vec{a}(M) = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$

♦ Gradient :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{f} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f}$$

♦ Divergence :

$$\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}.\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

♦ Rotationnel :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \vec{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

♦ Laplacien scalaire :

$$\boldsymbol{\Delta f} = \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{f} = \vec{\boldsymbol{\nabla}}^2\boldsymbol{f}$$