TDT4 – Transferts thermiques

0 Exercices classiques vus en cours :

II.B.1 : Bilan de puissance volumique (géométries cartésienne, cylindrique et sphérique)
II.B.2.a : Démonstration de l'équation de la diffusion thermique (géométries cart., cyl. et sph.)
II.B.2.b : Lien entre les échelles caractéristiques τ et L
II.C.2.b : Résolution de l'équation de Laplace – Résistance thermique (géométrie cart.)
II.E.1 : Etablir le schéma numérique explicite relatif à l'équation de la diffusion thermique

Capacités exigibles	Ch T4	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5-7	Ex 8	TP4
Conduction, convection et rayonnement. Identifier un mode de transfert thermique. *Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.*	●							
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique. Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.	●	●	●		●	●		
Premier principe de la thermodynamique. Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.	●	●	●		●	●	●	
Loi de Fourier. Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. *Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.*	●	●	●		●	●		B
Équation de la diffusion thermique. Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.	●	●		●		●	●	A
Régime stationnaire. Résistance thermique. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.	●	●	●					
Coefficient de transfert thermique de surface ; loi de Newton. Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.	●				●			B

Données pour l'ensemble des exercices :

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z}.\vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta}.\vec{u}_z$$

$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}.\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}.\vec{u}_\varphi$$

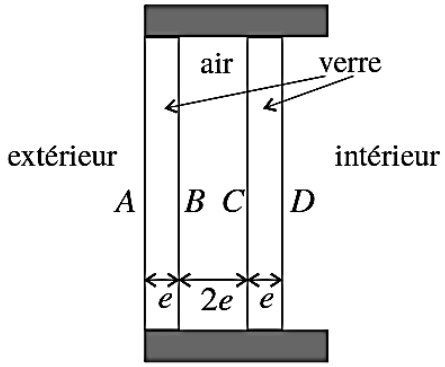
$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial (\sin(\theta)\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

1 Double vitrage

1. Une fenêtre simple vitrage est constituée d'une plaque de verre de surface S et d'épaisseur e. La conductivité thermique du verre est $\lambda_v = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Les pertes dues au cadre de la fenêtre sont négligées.

Exprimer la puissance thermique perdue à travers la fenêtre, P_f, en fonction de λ_v, e, S, T_i température à l'intérieur de la maison et T_e température à l'extérieur.



2. Une fenêtre double vitrage est composée de deux vitres identiques d'épaisseur e et de surface S, séparées par une épaisseur $2e$ d'air (voir figure). La conductivité thermique de l'air est $\lambda_a = 2{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

On appelle A, B, C et D les quatre surfaces indiquées sur la figure. Les températures des surfaces A et D sont $T(A) = T_e$ et $T(D) = T_i$.

a. Exprimer les résistances thermiques $R_{\mathrm{th},AB}$, $R_{\mathrm{th},BC}$ et $R_{\mathrm{th},CD}$ en fonction de e, λ_v, λ_a et S.

b. Exprimer la résistance thermique totale $R_{\mathrm{th},AD}$.

c. Montrer que la puissance thermique perdue à travers la fenêtre double vitrage P'_f est telle que $\dfrac{P'_f}{P_f} \simeq \dfrac{\lambda_a}{2\lambda_v}$. Conclure.

d. Représenter le schéma électrocinétique équivalent à la fenêtre double vitrage.

e. En déduire l'expression de $T_B - T_C$ en fonction de $T_i - T_e$ et des résistances thermiques, puis en fonction de $T_i - T_e$, λ_v et λ_a. Faire l'application numérique et conclure.

2 Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude → *Résistance thermique en cylindriques*

Le ballon est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur $e = 30\ mm$, de hauteur $h = 157\ cm$ et de rayon $l = 57\ cm$ dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

1) Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon r ($l < r < l + e$) ne dépend pas de r en régime stationnaire.

2) Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur $e' = 300\ mm$. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur $e'' = 50\ mm$.

3) Calculer la nouvelle résistance thermique.

4) Quel est le meilleur choix ?

Données : conductivités thermiques

Acier : $\lambda = 50\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$;

Laine de verre : $\lambda' = 0{,}035\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$;

Polyester : $\lambda'' = 0{,}022\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$.

3 Cuisson d'un œuf d'autruche *(Type « résolution de problème »)*

➲ Estimer la durée nécessaire pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche.

Donnée :

Un œuf de poule a une masse environ 25 fois inférieure à celle d'un œuf d'autruche.

4 Ailette de refroidissement

→ Prise en compte de transferts thermiques (convectifs) latéraux.

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.

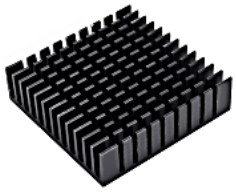


Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

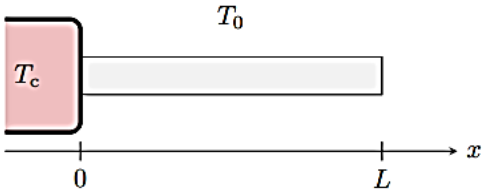


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi(x) = h(T(x) - T_0)\,\mathrm{d}S\,.$$

Hypothèses de travail :

- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0\,,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

5 Igloo *(Type « résolution de problème »)*

Un explorateur sur la banquise construit un igloo de rayon intérieur R = 1 m. La température extérieure est de – 20°C et la température minimale nécessaire à la survie est égale à 10°C.

➲ Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs de l'igloo ?

Données :

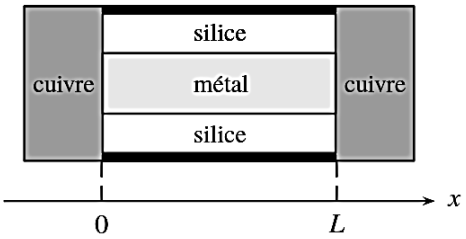
Conductivité thermique de la glace λ = 0,050 $W.m^{-1}.K^{-1}$

L'homme dégage une puissance de 100 W

6 Fusible *(d'après Physique – Modélisation E3A PSI 2017)*

→ Prise en compte d'un terme source (effet Joule)

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S, de longueur L et de conductivités thermique λ et électrique γ. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température. Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I.



1. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme : $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{I^2}{\gamma S^2} + \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

2. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

3. La température de fusion du métal est notée T_F. Donner la position du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale supportée par le fusible. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique avec : $\lambda = 65\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$; $\gamma = 1{,}2 \times 10^6$ SI ; $T_0 = 290$ K ; $L = 2{,}5$ cm ; $T_F = 390$ K ; $I_{\max} = 16$ A.

7 Croûte continentale - Géothermie

→ Prise en compte d'un terme source (désintégration nucléaire)

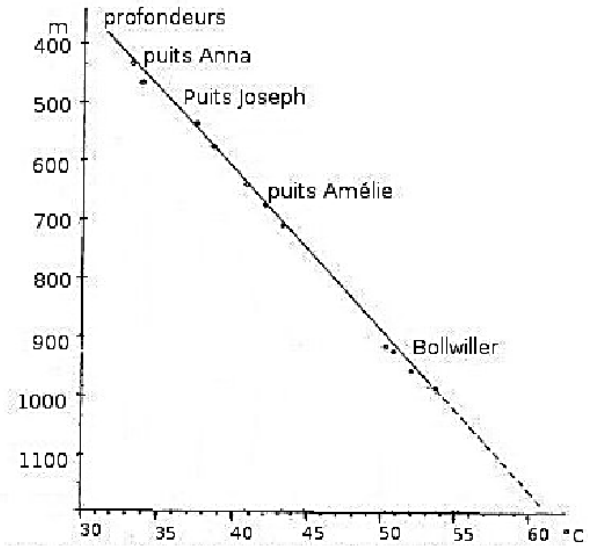


Figure 3 – Température en fonction de la profondeur. La courbe représente la température mesurée au fond de différents puits de mines alsaciens en fonction de leur profondeur.

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne de 30 km, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 2{,}5\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Au niveau de la surface, la température vaut en moyenne $T_0 = 13\,°\mathrm{C}$. Les éléments radioactifs présents dans la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique p supposée uniforme.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution ? Les identifier, en s'aidant notamment de la figure 3.

3 - Procéder à la résolution et représenter graphiquement le profil de température.

4 - Estimer un ordre de grandeur de p sachant que la température au niveau de la discontinuité de Moho est de l'ordre de 600 °C.

5 - Cette puissance libérée par la Terre peut être récupérée : c'est la géothermie. Déterminer le flux géothermique surfacique en Alsace. En déduire l'énergie potentiellement récupérable par géothermie sur un an. On estime pour cette région un potentiel solaire annuel de l'ordre de $1220\,\mathrm{kWh/m^2}$: commenter.

8 Effet de cave – Onde thermique sinusoïdale *(exercice proche de CCINP MP 2014)*

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. On négligera la présence de matériaux radioactifs dans le sol.

La température au niveau du sol est $T(0,t) = T_0 + a \cdot \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe :

$$\underline{T}(0,t) = T_0 + a \cdot exp(j\omega t)$$

Pour le sol, on note la masse volumique $\mu = 3{,}0 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$, la capacité thermique massique $c = 515\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ et la conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$.

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$.

1. On cherche une solution de la forme $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$ et en déduire $T(x,t)$.
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15 °C autour d'une température moyenne de 3 °C en hiver.