TDT4 – Transferts thermiques

0 Exercices classiques vus en cours :

II.B.1 : Bilan de puissance volumique (géométries cartésienne, cylindrique et sphérique)
II.B.2.a : Démonstration de l'équation de la diffusion thermique (géométries cart., cyl. et sph.)
II.B.2.b : Lien entre les échelles caractéristiques τ et L
II.C.2.b : Résolution de l'équation de Laplace – Résistance thermique (géométrie cart.)
II.E.1 : Etablir le schéma numérique explicite relatif à l'équation de la diffusion thermique

Capacités exigibles	Ch T4	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6-7	Ex 8	Ex 9-10	Ex 11
Conduction, convection et rayonnement. Identifier un mode de transfert thermique. *Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.*	●									
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique. Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.	●	●	●		●	●	●			
Premier principe de la thermodynamique. Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.	●		●		●	●	●	●	●	●
Loi de Fourier. Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. *Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.*	●		●		●	●	●			
Équation de la diffusion thermique. Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.	●			●		●		●		
Régime stationnaire. Résistance thermique. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.	●	●	●						●	
Coefficient de transfert thermique de surface ; loi de Newton. Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.	●				●					

Données pour l'ensemble des exercices :

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} . \vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} . \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} . \vec{u}_z$$

$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} . \vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} . \vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} . \vec{u}_\varphi$$

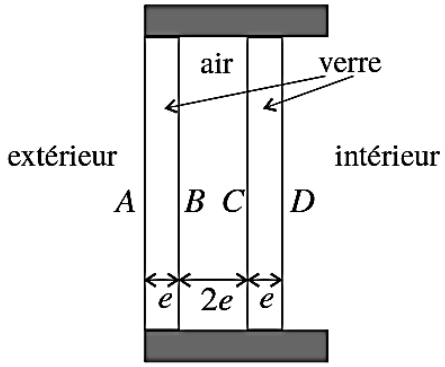
$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial (\sin(\theta)\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

1 Double vitrage

1. Une fenêtre simple vitrage est constituée d'une plaque de verre de surface S et d'épaisseur e. La conductivité thermique du verre est $\lambda_v = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Les pertes dues au cadre de la fenêtre sont négligées.

Exprimer la puissance thermique perdue à travers la fenêtre, P_f, en fonction de λ_v, e, S, T_i température à l'intérieur de la maison et T_e température à l'extérieur.



2. Une fenêtre double vitrage est composée de deux vitres identiques d'épaisseur e et de surface S, séparées par une épaisseur $2e$ d'air (voir figure). La conductivité thermique de l'air est $\lambda_a = 2{,}0\times10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

On appelle A, B, C et D les quatre surfaces indiquées sur la figure. Les températures des surfaces A et D sont $T(A) = T_e$ et $T(D) = T_i$.

a. Exprimer les résistances thermiques $R_{\mathrm{th},AB}$, $R_{\mathrm{th},BC}$ et $R_{\mathrm{th},CD}$ en fonction de e, λ_v, λ_a et S.

b. Exprimer la résistance thermique totale $R_{\mathrm{th},AD}$.

c. Montrer que la puissance thermique perdue à travers la fenêtre double vitrage P'_f est telle que $\dfrac{P'_f}{P_f} \simeq \dfrac{\lambda_a}{2\lambda_v}$. Conclure.

d. Représenter le schéma électrocinétique équivalent à la fenêtre double vitrage.

e. En déduire l'expression de $T_B - T_C$ en fonction de $T_i - T_e$ et des résistances thermiques, puis en fonction de $T_i - T_e$, λ_v et λ_a. Faire l'application numérique et conclure.

2 Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude → *Résistance thermique en cylindriques*

Le ballon est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur $e = 30\ mm$, de hauteur $h = 157\ cm$ et de rayon $l = 57\ cm$ dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

1) Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon r ($l < r < l + e$) ne dépend pas de r en régime stationnaire.

2) Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur $e' = 300\ mm$. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur $e'' = 50\ mm$.

3) Calculer la nouvelle résistance thermique.

4) Quel est le meilleur choix ?

Données : conductivités thermiques

Acier : $\lambda = 50\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$;

Laine de verre : $\lambda' = 0{,}035\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$;

Polyester : $\lambda'' = 0{,}022\ W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$.

3 Cuisson d'un œuf d'autruche *(Type « résolution de problème »)*

➲ Estimer la durée nécessaire pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche.

Donnée :

Un œuf de poule a une masse environ 25 fois inférieure à celle d'un œuf d'autruche.

4 Ailette de refroidissement

→ Prise en compte de transferts thermiques (convectifs) latéraux.

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.

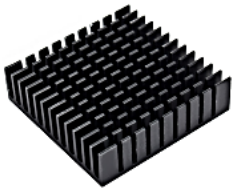


Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

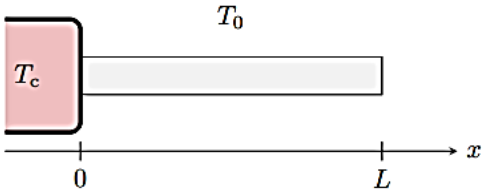


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi(x) = h(T(x) - T_0)\,\mathrm{d}S\,.$$

Hypothèses de travail :

- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0\,,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

5 Igloo *(Type « résolution de problème »)*

Un explorateur sur la banquise construit un igloo de rayon intérieur R = 1 m. La température extérieure est de – 20°C et la température minimale nécessaire à la survie est égale à 10°C.

➲ Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs de l'igloo ?

Données :

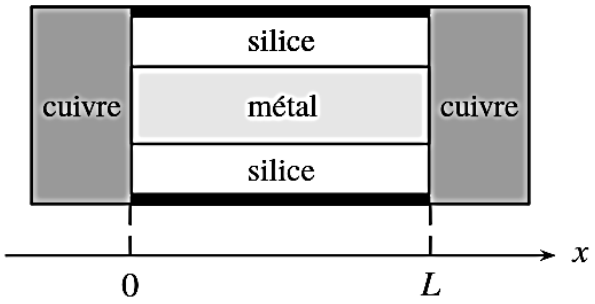
Conductivité thermique de la glace $\lambda = 0{,}050\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$

Le métabolisme de l'homme dégage une puissance de 50 W

6 Fusible *(d'après Physique – Modélisation E3A PSI 2017)*

→ Prise en compte d'un terme source (effet Joule)

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S, de longueur L et de conductivités thermique λ et électrique γ. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température. Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I.



1. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme : $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{I^2}{\gamma S^2} + \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

2. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

3. La température de fusion du métal est notée T_F. Donner la position du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale supportée par le fusible. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique avec : $\lambda = 65\,\mathrm{W\cdot K^{-1}\cdot m^{-1}}$; $\gamma = 1{,}2 \times 10^6$ SI ; $T_0 = 290$ K ; $L = 2{,}5$ cm ; $T_F = 390$ K ; $I_{\max} = 16$ A.

4. Exprimer le flux thermique $\Phi(0)$ à travers la section en $x = 0$ en fonction de la résistance électrique du fil, $R = \dfrac{L}{\gamma S}$, et I. Préciser si ce flux est reçu ou fourni par le fil. Commenter.

7 Croûte continentale

→ Prise en compte d'un terme source (désintégration nucléaire)

La croûte continentale terrestre a une épaisseur l d'environ 35 km ; elle est équivalente à une couche homogène de conductivité $\lambda = 23\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Au niveau du sol, la température est $T_2 = 273$ K, et à la profondeur l, elle vaut $T_1 = 873$ K.

0. Justifier que pour l'étude on peut négliger la courbure de la Terre. On travaillera alors en coordonnées cartésiennes avec (Ox) l'axe normal à la croûte terrestre.
1. Calculer la puissance géothermique par unité de surface J_{th} issue de la croûte continentale.
2. Les éléments radioactifs de la croûte dissipent une puissance volumique $\sigma_u = 3\times10^{-3}\,\mathrm{W\cdot m^{-3}}$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la température de la croûte.
3. En déduire la puissance géothermique par unité de surface, J'_{th}, au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs. Conclure.

8 Effet de cave – Onde thermique sinusoïdale *(exercice proche de CCINP MP 2014)*

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. On négligera la présence de matériaux radioactifs dans le sol.

La température au niveau du sol est $T(0,t) = T_0 + a \cdot \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe :

$$\underline{T}(0,t) = T_0 + a \cdot exp(j\omega t)$$

Pour le sol, on note la masse volumique $\mu = 3{,}0 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$, la capacité thermique massique $c = 515\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ et la conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$.

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$.

1. On cherche une solution de la forme $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$ et en déduire $T(x,t)$.
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15 °C autour d'une température moyenne de 3 °C en hiver.

9 Maquette de maison *(d'après oral CCINP TSI)*

On dispose d'une boîte en plastique, fermée, pouvant représenter sommairement une maquette de maison. Cette boîte contient une résistance électrique chauffante alimentée par une tension continue réglable. Un capteur de température, relié par une interface à un ordinateur, permet de suivre l'évolution de la température de l'air à l'intérieur de la boîte en fonction du temps. Un autre capteur mesure la température extérieure.

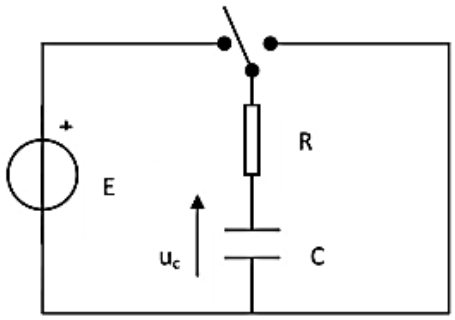
1. Expliquer à quoi correspondent les cinq paliers de température sur la courbe de la fenêtre 2 du document 1.

2. On peut définir une résistance thermique globale de la boîte. Donner la valeur de cette résistance thermique.

3. De quels paramètres dépend cette résistance thermique ? On précisera comment chacun de ces paramètres influencerait les résultats de l'expérience si on le modifiait.

4. On arrête le chauffage à la fin de la première expérience et on laisse la maquette de la maison se refroidir. Proposer un bilan thermique sur la maquette, permettant ainsi de prévoir l'évolution de la température lors de cette phase de refroidissement. On établira en particulier l'équation différentielle vérifiée par la température et sa résolution en faisant intervenir, entre autres, la capacité thermique C de la maquette.

5. On donne le circuit électrique suivant.



Souligner les analogies qui existent entre ce circuit électrique et l'expérience de chauffe et refroidissement de l'intérieur de la boîte en plastique précédente. On établira en particulier l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$.

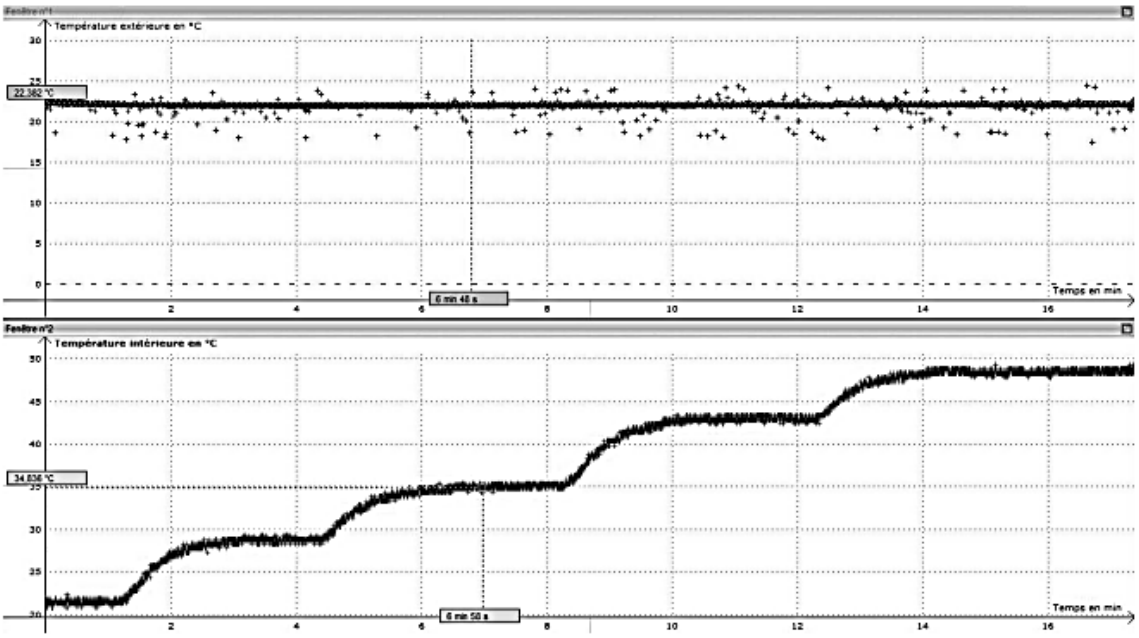
6. Un étudiant veut suivre avec un boîtier d'acquisition (impédance d'entrée R_e de l'ordre de 10 MΩ) la tension aux bornes du condensateur dans la phase de charge. Le choix des paramètres est R = 1 MΩ, C = 10 μF et E = 5 V. Durée d'acquisition 100 ms, période d'échantillonnage 1 ms, déclenchement manuel.

6.a. En régime permanent, u_c n'atteint pas 5 V. Quel est le problème ?

6.b. Il n'observe pas du tout la courbe de charge du condensateur. Proposer des explications et améliorations.

Document 1 : première expérience

On mesure les évolutions temporelles des températures à l'extérieur (fenêtre 1) et à l'intérieur (fenêtre 2) de la boîte.

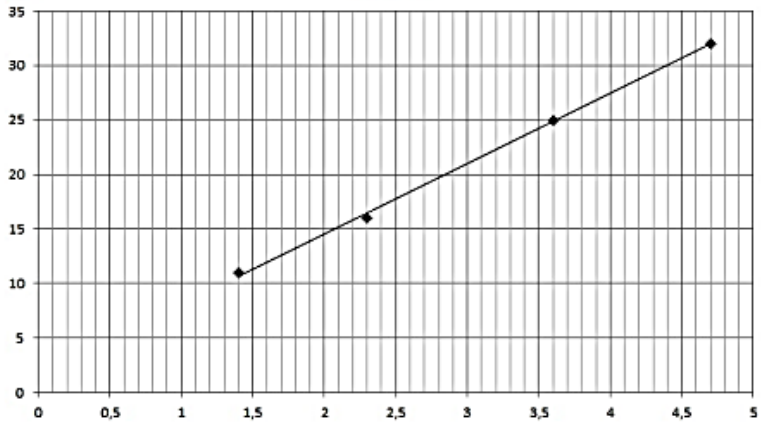


Document 2 : deuxième expérience

En régime permanent établi, on mesure la puissance P (en W) fournie par la résistance chauffante et la différence de température ΔT (en °C) entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte.

P	ΔT
4, 7	32
1, 4	11
2, 3	16
3, 6	25

ΔT=f(P)



10 Combinaison de plongée *(d'après oral CCP PSI)* *(Type « résolution de problème »)*

→ ARQS

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35°C.

➲ Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans la Manche à 17°C.

Données :

- capacité thermique massique du corps humain : $c_{\text{corps}} = 3{,}5\,\text{kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- résistance thermique de la peau : $R_{\text{peau}} = 3\cdot10^{-2}\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$;
- puissance produite par le métabolisme : $P_{\text{corps}} = 100\,\text{W}$;
- puissance surfacique reçue par le corps humain dans l'eau (par convection) : $P_{\text{conv}} = \alpha(T_{\text{ext}} - T)$, avec T la température de la peau, T_{ext} la température de l'eau et $\alpha = 10\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

11 Age de la Terre selon Lord Kelvin

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace $z > 0$. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement vers le bas) et du temps t. La planète a une conductivité thermique λ, une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c, toutes trois uniformes. On note $j_{\text{th}}(z,t)$ la densité de courant thermique.

1. Montrer que : $\dfrac{\partial j_{\text{th}}}{\partial T} = D\dfrac{\partial^2 j_{\text{th}}}{\partial z^2}$ (équation (1)) où D est la diffusivité thermique, $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$.

Au milieu du XIX$^{\text{e}}$ siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à une température T_S. Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ?

3. Lord Kelvin proposa la solution : $j_{\text{th}}(z,t) = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{4Dt}\right)$ où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre. On **admet** qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation (1). Vérifier qu'elle est compatible avec la condition initiale et les conditions aux limites. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

4. On suppose que $A = a\,(T_0 - T_S)^{\alpha}\,\lambda^{\beta}\rho^{\gamma}c^{\delta}$ où a est un facteur numérique et où α, β, γ et δ sont des exposants éventuellement nuls. Calculer α, β, γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.

5. On peut montrer que $a = 1/\sqrt{\pi}$. Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\partial T/\partial z$. Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de $1\times10^{-6}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. L'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de $30\,\text{K}\cdot\text{km}^{-1}$. Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?

6. Que pensez-vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ? Quel est (ou quels sont) le (ou les) ingrédients physique(s) que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?