

TDT2 – Transferts thermiques

0 Exercices classiques vus en cours :

- II.B.1 : Bilan de puissance volumique (géométries cartésienne, cylindrique et sphérique)
- II.B.2.a : Démonstration de l'équation de la diffusion thermique (géométries cart., cyl. et sph.)
- II.B.2.b : Lien entre les échelles caractéristiques τ et L
- II.C.2.b : Résolution de l'équation de Laplace – Résistance thermique (géométrie cart.)
- II.E.1 : Etablir le schéma numérique explicite relatif à l'équation de la diffusion thermique
- III.A.4 : Exploitation des lois de Wien et de Stefan
- III.B : Application à l'effet de serre

Capacités exigibles	Ch T2	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5-7	Ex 8	Ex 9	Ex 10-11	Ex 12	Ex 13
Conduction, convection et rayonnement. Reconnaître un mode de transfert thermique. <i>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.</i>	•										
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique. Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.	•	•	•		•	•				•	
Premier principe de la thermodynamique. Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.	•	•	•		•	•	•	•		•	
Loi de Fourier. Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. <i>Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.</i>	•	•	•		•	•				•	
Équation de la diffusion thermique. Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.	•	•		•		•	•			•	
Régime stationnaire. Résistance thermique. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.	•	•	•					•			•
Coefficient de transfert thermique de surface ; loi de Newton. Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.	•				•						•
Approche descriptive du rayonnement thermique dans le cas d'un corps noir. Loi de Wien. Loi de Stefan. Effet de serre. Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique sur un modèle à une couche.	•								•	•	•

Données pour l'ensemble des exercices :

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z} \cdot \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin(\theta) a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

◆ **Loi de Wien** pour un corps noir à la température T : $\lambda_{\max} \cdot T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$

◆ **Loi de Stefan** pour un corps noir à la température T : $\varphi^e = \sigma \cdot T^4$ avec $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

1 Isolation d'un mur (d'après oral banque PT)

Avec les nouvelles normes environnementales et les diagnostics de performance énergétique des bâtiments, la cartographie thermique permet de localiser les zones de déperdition thermique les plus importantes. On peut ensuite cibler les travaux d'isolation à effectuer en toute connaissance de cause.



On s'intéresse à un mur de béton de surface $S = 25 \text{m}^2$ et d'épaisseur $e = 15 \text{cm}$. Le béton a pour conductivité thermique $\lambda = 0,92 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Il règne à l'extérieur de l'habitation une température de 4°C et à l'intérieur une température de 19°C .

1 - Montrer que la température dans le mur est solution de l'équation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Exprimer D et son unité.

2 - En déduire le profil de température $T(x)$ dans le mur en régime permanent. Le représenter.

3 - On superpose au mur une épaisseur e' de polystyrène expansé de conductivité $\lambda' = 0,036 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Déterminer l'épaisseur e' nécessaire pour diviser la consommation en chauffage de l'habitation par 10.

4 - Déterminer et tracer l'allure du nouveau profil de température.

5 - Dans ce mur se trouve une fenêtre en double vitrage de 2m^2 de conductivité thermique surfacique $g_{\text{fen}} = 2,8 \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer le flux total au travers du mur.

2 Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude \rightarrow Résistance thermique en cylindriques

Le ballon est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur $e = 30 \text{mm}$, de hauteur $h = 157 \text{cm}$ et de rayon $l = 57 \text{cm}$ dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

1) Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon r ($l < r < l + e$) ne dépend pas de r en régime stationnaire.

2) Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur $e' = 300 \text{mm}$. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur $e'' = 50 \text{mm}$.

3) Calculer la nouvelle résistance thermique.

4) Quel est le meilleur choix ?

Données : conductivités thermiques

Acier : $\lambda = 50 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; Laine de verre : $\lambda' = 0,035 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

Polyester : $\lambda'' = 0,022 \text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

3 Géothermie très basse énergie (d'après PT B 2018)

En géothermie très basse énergie, on utilise l'énergie stockée dans le sol à basse profondeur. La diffusivité thermique d'un sol sableux sec est de $D_{sol} = 0,2 \cdot 10^{-6}$ USI.

☞ Déterminer avec un minimum de calculs un ordre de grandeur de la profondeur minimum d'utilisation dans ce sol si l'on souhaite que les fluctuations annuelles de température de l'air à sa surface y soient imperceptibles.



4 Ailette de refroidissement → Prise en compte de transferts thermiques (convectifs) latéraux.

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.



Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

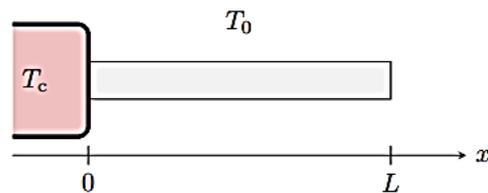


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z , faite d'un matériau de conductivité thermique λ . Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c , et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0 . Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $d\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface dS de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit

$$d\varphi(x) = h(T(x) - T_0) dS.$$

Hypothèses de travail :

- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

5 Igloo (Type « résolution de problème »)

Un explorateur sur la banquise construit un igloo de rayon intérieur $R = 1$ m. La température extérieure est de -20°C et la température minimale nécessaire à la survie est égale à 10°C .

☞ Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs de l'igloo ?

Données :

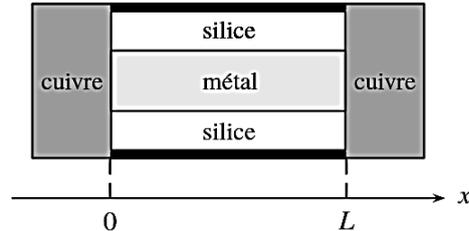
Conductivité thermique de la glace $\lambda = 0,050 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Le métabolisme de l'homme dégage une puissance de 100 W

6 Fusible (d'après Physique – Modélisation E3A PSI 2017)

→ Prise en compte d'un terme source (effet Joule)

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S , de longueur L et de conductivités thermique λ et électrique γ . On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température. Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0 . Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I .



1. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous

$$\text{la forme : } \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I^2}{\gamma S^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

2. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

3. La température de fusion du métal est notée T_F . Donner la position du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale supportée par le fusible. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique avec : $\lambda = 65 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $\gamma = 1,2 \times 10^6 \text{ SI}$; $T_0 = 290 \text{ K}$; $L = 2,5 \text{ cm}$; $T_F = 390 \text{ K}$; $I_{\text{max}} = 16 \text{ A}$.

7 Croûte continentale - Géothermie

→ Prise en compte d'un terme source (désintégration nucléaire)

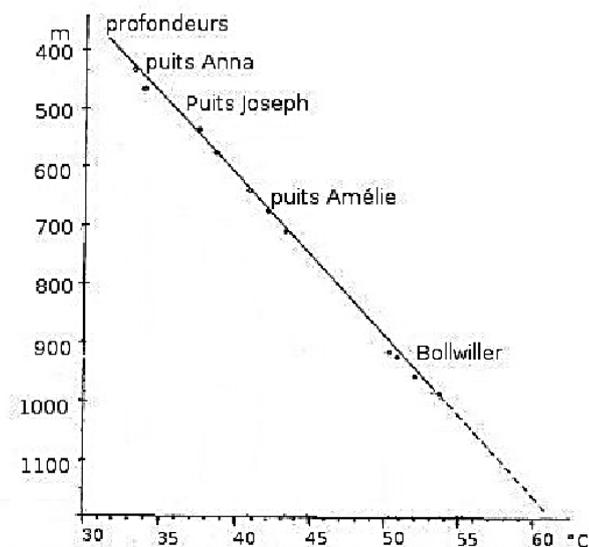


Figure 3 – Température en fonction de la profondeur. La courbe représente la température mesurée au fond de différents puits de mines alsaciens en fonction de leur profondeur.

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne de 30 km, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 2,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Au niveau de la surface, la température vaut en moyenne $T_0 = 13 \text{ °C}$. Les éléments radioactifs présents dans la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique p supposée uniforme.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z , mesurée le long d'un axe vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution ? Les identifier, en s'aidant notamment de la figure 3.

3 - Procéder à la résolution et représenter graphiquement le profil de température.

4 - Estimer un ordre de grandeur de p sachant que la température au niveau de la discontinuité de Moho est de l'ordre de 600 °C.

5 - Cette puissance libérée par la Terre peut être récupérée : c'est la géothermie. Déterminer le flux géothermique surfacique en Alsace. En déduire l'énergie potentiellement récupérable par géothermie sur un an. On estime pour cette région un potentiel solaire annuel de l'ordre de 1220 kWh/m^2 ; commenter.

8 Régime sinusoïdal – Onde thermique (d'après CCINP MP 2014)

L'objet de cette partie est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation d'une installation géothermique.

On se place en repère cartésien. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy) (voir **figure III.1**). La température au niveau de cette surface, notée $T(0,t)$, varie sinusoïdalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 : $T(0,t) = T_0 + \alpha \cos(\omega t)$, où α est une constante. Soit un point M dans le sol repéré par ses coordonnées (x, y, z) , avec $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température en M , noté $T(M,t)$.

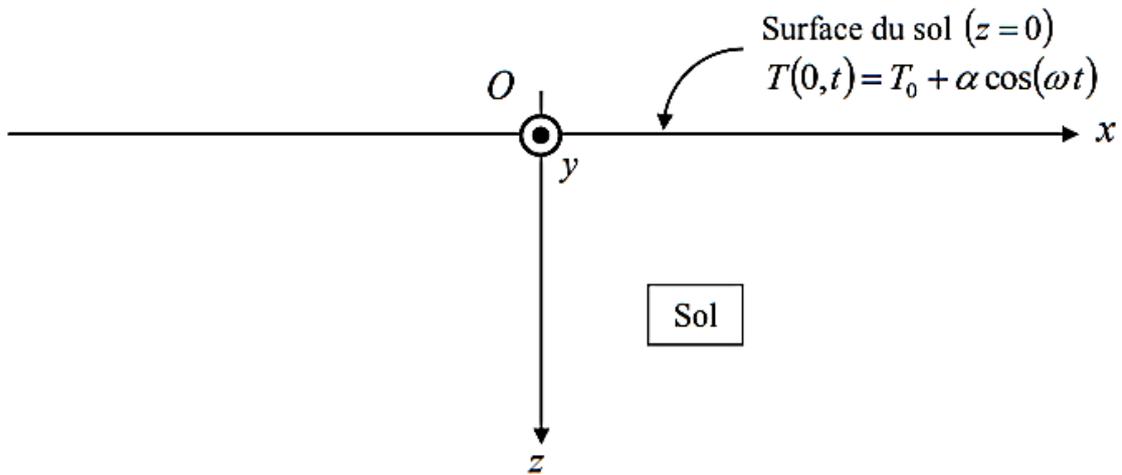


Figure III.1 : repérage adopté pour l'étude de l'onde thermique

III.1 Justifier que $T(M,t)$ ne dépend ni de x ni de y . On notera dans la suite : $T(M,t) = T(z,t)$.

III.2 Donner l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique, en rappelant les grandeurs intervenant dans cette loi. On notera λ la conductivité thermique du sol, supposée constante. Citer une loi physique analogue à la loi de Fourier.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant : $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$. Tout autre phénomène que la conduction thermique est négligé. On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur : $\rho c \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2}$, où ρ et c désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du sol. Ces deux paramètres sont supposés constants.

On cherche la solution de l'équation de la chaleur en régime sinusoïdal permanent. A cet effet, on introduit la variable complexe : $\underline{\theta}(z,t) = f(z)e^{j\omega t}$, avec $j^2 = -1$ et $f(z)$ une fonction de z . L'inconnue $\theta(z,t)$ est alors donnée par : $\theta(z,t) = \text{Re}(\underline{\theta}(z,t))$, où Re désigne la partie réelle.

III.3 Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$. On fera intervenir la diffusivité thermique du sol donnée par : $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

III.4 Exprimer la solution générale de cette équation, en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B . Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces constantes est nulle.

III.5 Montrer que $\underline{\theta}(z,t)$ se met sous la forme : $\underline{\theta}(z,t) = \alpha e^{-\frac{z}{\delta}} \times e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$, où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω et de D .

III.6 Exprimer $T(z,t)$ à l'aide des paramètres : T_0 , δ , α , ω et des variables z et t . Interpréter physiquement l'expression obtenue. Interpréter physiquement le paramètre δ .

III.7 Exprimer la profondeur L_{10} pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol.

III.8 On donne pour un sol humide : $D = 0,257 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer numériquement L_{10} dans les deux cas suivants :

- Cas n° 1 : variation quotidienne de température ;
- Cas n° 2 : variation annuelle de température.

A quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir la canalisation de l'installation géothermique ?

III.9 Calculer littéralement puis numériquement le décalage temporel Δt entre $T(z = L_{10}, t)$ et $T(0, t)$ dans les deux cas de la question **III.8**.

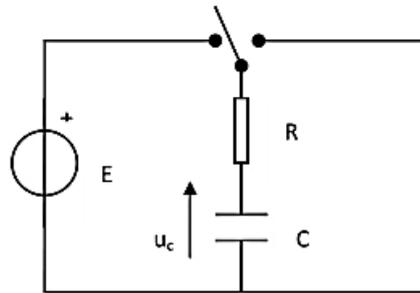
III.10 Le modèle développé vous paraît-il pertinent ? Quels phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir ? Répondre succinctement.

9 Maquette de maison (d'après oral CCINP TSI)

→ ARQS

On dispose d'une boîte en plastique, fermée, pouvant représenter sommairement une maquette de maison. Cette boîte contient une résistance électrique chauffante alimentée par une tension continue réglable. Un capteur de température, relié par une interface à un ordinateur, permet de suivre l'évolution de la température de l'air à l'intérieur de la boîte en fonction du temps. Un autre capteur mesure la température extérieure.

1. Expliquer à quoi correspondent les cinq paliers de température sur la courbe de la fenêtre 2 du document 1.
2. On peut définir une résistance thermique globale de la boîte. Donner la valeur de cette résistance thermique.
3. De quels paramètres dépend cette résistance thermique ? On précisera comment chacun de ces paramètres influencerait les résultats de l'expérience si on le modifiait.
4. On arrête le chauffage à la fin de la première expérience et on laisse la maquette de la maison se refroidir. Proposer un bilan thermique sur la maquette, permettant ainsi de prévoir l'évolution de la température lors de cette phase de refroidissement. On établira en particulier l'équation différentielle vérifiée par la température et sa résolution en faisant intervenir, entre autres, la capacité thermique C de la maquette.
5. On donne le circuit électrique suivant.

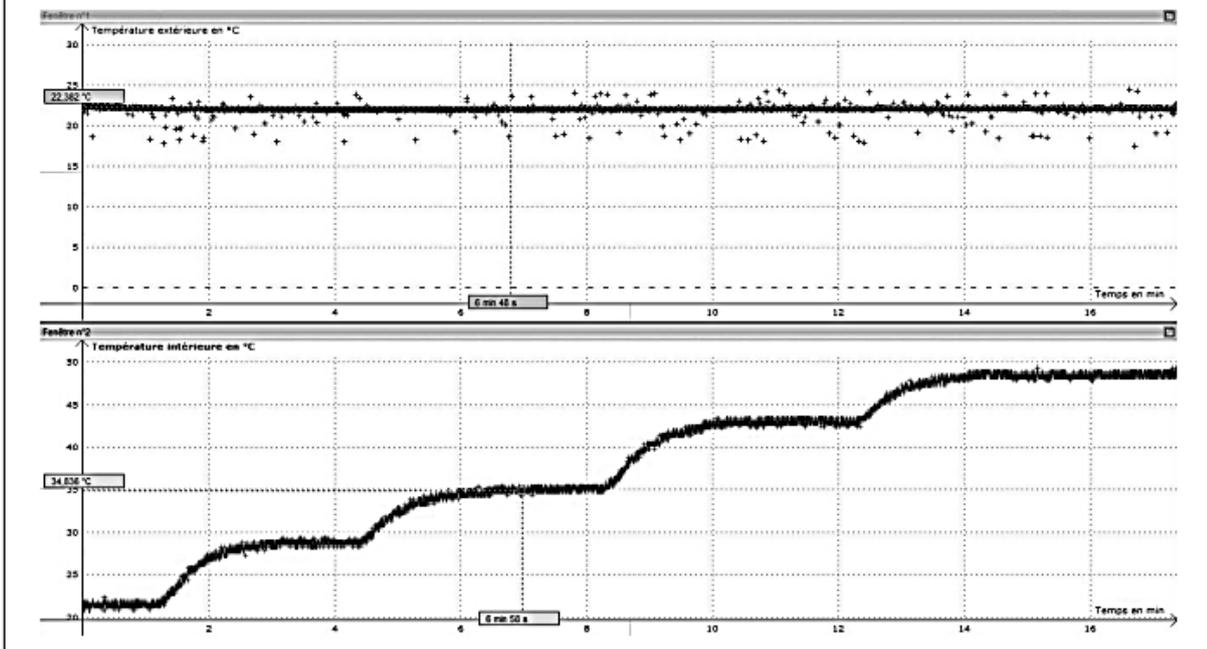


Souligner les analogies qui existent entre ce circuit électrique et l'expérience de chauffe et refroidissement de l'intérieur de la boîte en plastique précédente. On établira en particulier l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t)$.

6. Un étudiant veut suivre avec un boîtier d'acquisition (impédance d'entrée R_e de l'ordre de $10\text{ M}\Omega$) la tension aux bornes du condensateur dans la phase de charge. Le choix des paramètres est $R = 1\text{ M}\Omega$, $C = 10\text{ }\mu\text{F}$ et $E = 5\text{ V}$. Durée d'acquisition 100 ms , période d'échantillonnage 1 ms , déclenchement manuel.
 - 6.a. En régime permanent, u_c n'atteint pas 5 V . Quel est le problème ?
 - 6.b. Il n'observe pas du tout la courbe de charge du condensateur. Proposer des explications et améliorations.

Document 1 : première expérience

On mesure les évolutions temporelles des températures à l'extérieur (fenêtre 1) et à l'intérieur (fenêtre 2) de la boîte.

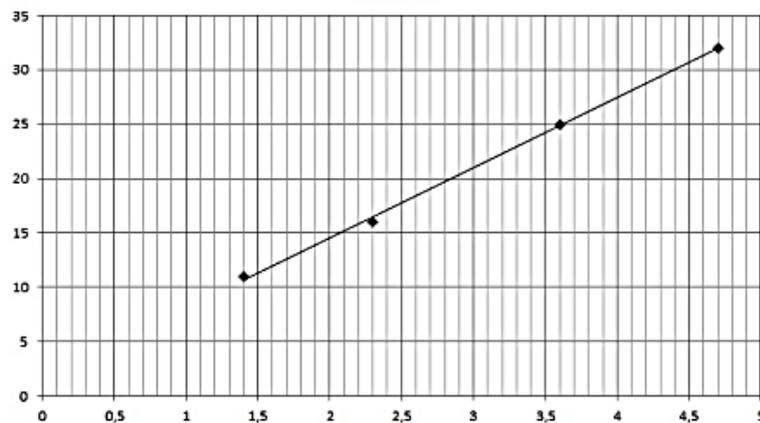


Document 2 : deuxième expérience

En régime permanent établi, on mesure la puissance P (en W) fournie par la résistance chauffante et la différence de température ΔT (en °C) entre l'intérieur et l'extérieur de la boîte.

P	ΔT
4,7	32
1,4	11
2,3	16
3,6	25

$$\Delta T = f(P)$$



10 ✎ Justifications de la loi de Wien et de la loi de Stefan

On rappelle la loi de Planck qui exprime la densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir isotherme à la température T :

$$F^e(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

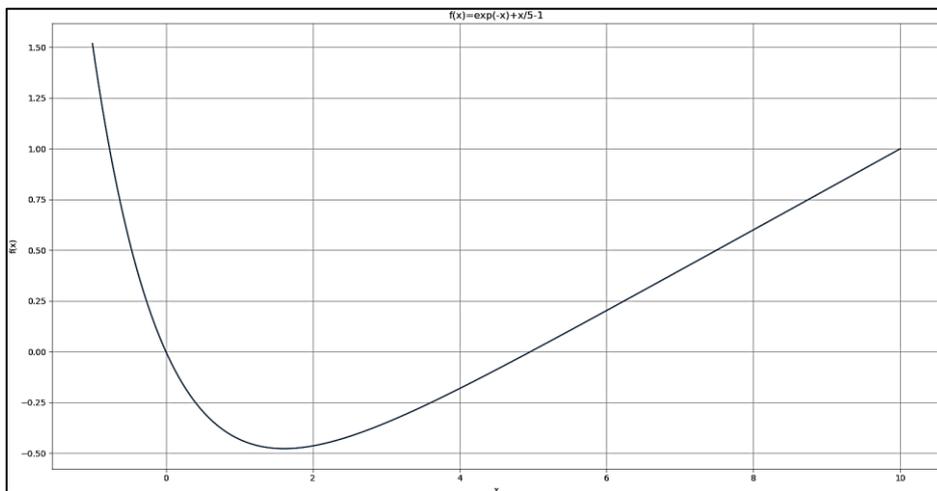
Avec h la constante de Planck : $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ et k_B la constante de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

1) La fonction densité spectrale de flux surfacique admet un maximum pour une longueur d'onde notée λ_{max} que l'on souhaite relier à la température T du corps noir étudié. Pour cela, on pose $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ et on note $x_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max} k_B T}$.

a) Montrer que x_{max} vérifie l'équation $e^{-x_{max}} + \frac{x_{max}}{5} - 1 = 0$.

b) Déterminer une valeur approchée de x_{max} avec la courbe ci-dessous

c) Conclure sur la loi de Wien.



2) a) Rappeler la relation entre le flux surfacique total émis et la densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir.

b) On pose à nouveau $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$. Montrer que $\varphi^e = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$.

c) Conclure sur la loi de Stefan.

Donnée : $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

11 ✎ Lampe à incandescence

Une lampe à incandescence a les caractéristiques suivantes :

- filament de tungstène de forme cylindrique de surface $S_F = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$;
- ampoule de verre de faible épaisseur et de forme sphérique de rayon $R = 2,5 \text{ cm}$.

La puissance rayonnée par le filament est P .

On fait l'hypothèse que le rayonnement du filament est celui d'un corps noir de température T_F .

- 1) Calculer T_F pour une puissance rayonnée $P = 60 \text{ W}$. Quelle est la valeur de la longueur d'onde λ_{max} correspondant à l'émission maximale ?
- 2) 98% du flux émis est compris dans l'intervalle $[0,5 \cdot \lambda_{max}; 8 \cdot \lambda_{max}]$. Commenter.

12 ✎ Bilan thermique d'un astéroïde

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R , de conductivité thermique λ , en régime stationnaire. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : les éléments radioactifs présents libèrent en se désintégrant une puissance volumique \mathcal{P}_v . On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1. A l'aide d'un bilan thermique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.
2. Exprimer $T(r)$ en fonction de λ , \mathcal{P}_v , r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

On note T_s la température à la surface de l'astéroïde. On assimilera l'astéroïde à un corps noir de température T_s pour exprimer la puissance surfacique qu'il émet par rayonnement.

3. Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R , λ , \mathcal{P}_v et σ la constante de Stefan.

13 Comparaison des fenêtres à double vitrage (d'après CCINP MP 2013)

On suppose qu'un corps noir au fond d'une cavité est éclairé par le soleil. L'ensemble du problème sera unidimensionnel. Le corps noir ne rayonne que d'un côté. Une fenêtre est interposée entre le soleil et le corps noir comme représenté sur la figure 6.

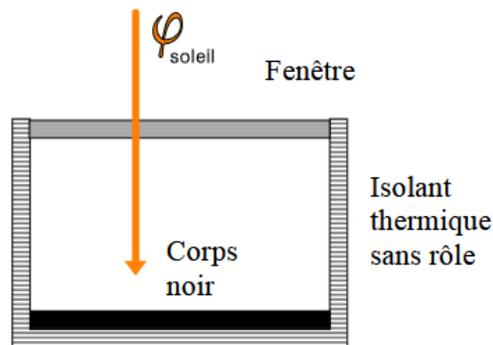


Figure 6 : corps noir recouvert d'une vitre éclairé par un rayonnement solaire

Dans cette partie, le corps noir sera supposé parfait, absorbant l'intégralité du rayonnement incident et réémettant tout le rayonnement absorbé. Toutes les vitres sont en verre que l'on suppose parfaitement transparent au rayonnement solaire et se comportant comme un corps noir dans l'infrarouge lointain. Dans cette partie du problème, on supposera que le flux surfacique solaire incident φ_s , normal au corps noir, est égal à 1000 W.m^{-2} .

3.1 Questions préliminaires

- 3.1.1 Donner la loi du déplacement de Wien reliant la température du corps noir T_{CN} et la longueur d'onde λ_m du maximum d'émission du corps noir en μm .
- 3.1.2 Indiquer dans quel domaine spectral émet un corps noir chauffé à 300K et à 5800K (température du soleil).
- 3.1.3 Le verre est globalement transparent pour le rayonnement solaire (le soleil émet dans le visible) et se comporte comme un corps noir dans l'infrarouge lointain (issu des corps à température ambiante). Sachant que 95 % du rayonnement d'un corps noir est concentré entre $0,5 \lambda_m$ et $8 \lambda_m$, déterminer la longueur d'onde approximative à laquelle le verre change de comportement. Les constructeurs en fonction du type de verre donnent 3 - 4 μm .

3.2 Comparaison du simple et du double vitrage

- 3.2.1 La fenêtre est composée d'une simple vitre (température T_{v1}). A partir d'un bilan radiatif et sans tenir compte de la présence d'air, déterminer la température du corps noir T_{CNa} en régime stationnaire. Effectuer l'application numérique pour $T_{CNa}(\varphi_s = 1000 \text{ W.m}^{-2})$.

3.2.2 La fenêtre est maintenant composée d'un double vitrage. La vitre extérieure est à la température T_{v1} et la vitre face au corps noir à la température T_{v2} . A partir d'un bilan radiatif et sans tenir compte de la présence d'air, déterminer la température du corps noir T_{CNb} en régime stationnaire.

Effectuer l'application numérique pour T_{CNb} ($\varphi_s = 1000 \text{ W.m}^{-2}$).

On cherche maintenant une durée caractéristique de la décroissance de la température pour les différentes fenêtres. On ne tient toujours pas compte de l'air. On suppose que le corps noir est à la température de $T_2 = 333 \text{ K}$ à $t = 0 \text{ s}$, qu'il rayonne et se refroidit. Il ne reçoit plus de rayonnement solaire. Sachant que le corps noir a une capacité thermique $C = 10^4 \text{ J.K}^{-1}$, une surface A de 1 m^2 et que la capacité thermique des vitres est négligeable :

3.2.3 Déterminer la durée τ_a pour que le corps noir soit à une température de $T_1 = 300 \text{ K}$ pour le simple vitrage. Effectuer l'application numérique et donner cette durée en minutes et secondes.

3.2.4 Déterminer la durée τ_b pour que le corps noir soit à une température de $T_1 = 300 \text{ K}$ pour le double vitrage. Exprimer τ_b en fonction de τ_a . L'application numérique n'est pas demandée.

3.3 Amélioration par métallisation externe

3.3.1 Sur la face la plus externe du double vitrage à la température T_{v1} , est déposée une fine couche métallique ou un revêtement à faible émission thermique. On suppose que cette couche transmet intégralement le flux solaire et réduit de moitié l'émission de cette face. En conséquence, on devra écrire que le flux surfacique émis par la vitre vaut $\varphi = \frac{1}{2} \sigma T^4$ pour la face métallisée et $\varphi = \sigma T^4$ pour la face non métallisée. A partir d'un bilan radiatif et sans tenir compte de la présence d'air, déterminer la température T_{CNc} du corps noir. La température de la vitre face au corps noir est notée T_{v2} . Effectuer l'application numérique pour T_{CNc} ($\varphi_s = 1000 \text{ W.m}^{-2}$).

3.3.2 Déterminer la durée caractéristique τ_c de la décroissance de la température pour passer de $T_2 = 333 \text{ K}$ à $T_1 = 300 \text{ K}$ pour cette fenêtre. Comme précédemment, on suppose que le corps noir ne reçoit plus de rayonnement solaire, qu'il a une capacité thermique $C = 10^4 \text{ J.K}^{-1}$, une surface A de 1 m^2 et que la capacité thermique des vitres est négligeable. Exprimer τ_c en fonction de τ_a . L'application numérique n'est pas demandée.

3.4 Prise en compte des échanges diffusifs dans le double vitrage

On prend en compte les échanges de type diffusif dus à un gaz de conductivité thermique λ présent entre les deux vitres.

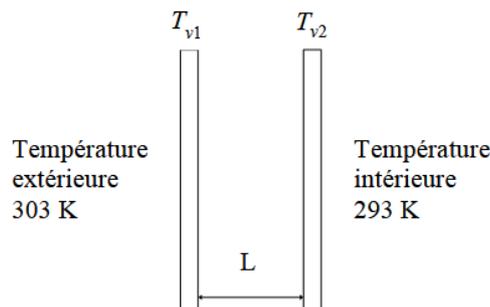


Figure 7 : vitres composant le double vitrage

Dans les doubles vitrages, le constructeur vante le remplacement de la lame d'air emprisonnée entre les deux vitres par de l'argon. A pression atmosphérique et à 300 K, la conductivité thermique de l'argon vaut $0,0177 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ alors que pour l'air, elle s'élève à $0,0240 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. La résistance thermique est définie par :

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\Phi}$$

où $\Delta T = T_{v1} - T_{v2}$ est la différence de températures entre les deux thermostats entre lesquelles s'échange un flux énergétique Φ (en W). La température intérieure est de 293K et la température extérieure de 303K comme indiqué sur la figure 7.

3.4.4 Exprimer R_{th} en fonction de la surface A de chaque vitre, de la distance entre les deux thermostats L et de la conductivité thermique λ .

3.4.5 Donner l'analogie entre les grandeurs thermiques ($R_{th}, \Delta T, \Phi$) et les grandeurs électriques dans un tableau en spécifiant, pour chaque grandeur, l'unité.

3.4.6 Les vitres séparées par l'air sont distantes de $d = 1\text{cm}$. Quelle distance L permet d'avoir la même résistance thermique avec de l'argon ? La différence vous paraît-elle importante ?

On suppose une faible différence de température (linéarisation du problème) et l'on prend en considération (1) la conductivité thermique et (2) le rayonnement entre les deux vitres.

3.4.7 Ecrire le flux énergétique entre la vitre 1 et la vitre 2 en fonction des données du problème (surface A , distance L entre les vitres, températures des vitres T_{v1} et T_{v2} , conductivité λ et constante de Stephan σ). Linéariser cette expression sachant que :

$$T_{v1}^4 - T_{v2}^4 = [T_{v2} + (T_{v1} - T_{v2})]^4 - T_{v2}^4 \approx (T_{v1} - T_{v2}) \times 4T_{v2}^3 .$$

3.4.8 Que vaut la résistance thermique pour la lame d'air (L vaut alors $d = 1\text{cm}$) sans le rayonnement (R_{ths}) et avec le rayonnement (R_{tha}) ? Effectuer l'application numérique. On prendra une surface $A = 1\text{m}^2$. Est-ce que la contribution du rayonnement est importante ? Remarque : il est courant que la métallisation ou une couche à faible émission thermique soit située sur une des faces internes.

3.4.9 Entre une lame d'air et une lame d'argon, la différence est un peu plus grande que celle que l'on a calculée. De plus, si l'espacement entre les vitres est supérieur à 1,2 cm, la résistance thermique ne varie plus. Quel phénomène de transport thermique permet d'expliquer ces observations ?

3.4.10 Le coefficient de transfert thermique U d'une fenêtre, exprimé en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, est défini comme l'inverse du produit de la résistance thermique de l'objet et de sa surface A . Il vaut pour les différents types de fenêtres :

Système	Fenêtre	U ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$)
I	Simple vitrage	5,8
II	Double vitrage ordinaire	2,8
III	Double vitrage avec métallisation	1,9
IV	Double vitrage avec métallisation et argon	1,1
V	Triple vitrage avec métallisation et argon	0,8

Pour référence, les murs ont typiquement un coefficient de transfert thermique de $0,5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

Analyser l'importance du nombre de vitres à partir du tableau ci-dessus et des questions précédentes. Justifier que l'on installe majoritairement des fenêtres en double vitrage.