TDT2 – Transferts thermiques

0 Exercices classiques vus en cours :

II.B.1 : Bilan de puissance volumique (géométries cartésienne, cylindrique et sphérique)
II.B.2.a : Démonstration de l'équation de la diffusion thermique (géométries cart., cyl. et sph.)
II.B.2.b : Lien entre les échelles caractéristiques τ et L
II.C.2.b : Résolution de l'équation de Laplace – Résistance thermique (géométrie cart.)
II.E.1 : Etablir le schéma numérique explicite relatif à l'équation de la diffusion thermique
III.A.4 : Exploitation des lois de Wien et de Stefan
III.B : Application à l'effet de serre

Capacités exigibles	Ch T2	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5-7	Ex 8	Ex 9-10-12	Ex 11	Ex 13	TP4
Conduction, convection et rayonnement. Reconnaître un mode de transfert thermique. *Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.*	●										
Flux thermique. Vecteur densité de flux thermique. Calculer un flux thermique à travers une surface orientée et interpréter son signe.	●	●	●		●	●			●		
Premier principe de la thermodynamique. Effectuer un bilan local d'énergie interne pour un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique.	●	●	●		●	●	●		●		
Loi de Fourier. Interpréter et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, verre, acier. *Mesurer la conductivité thermique d'un matériau.*	●	●	●		●	●			●		B
Équation de la diffusion thermique. Établir l'équation de la diffusion thermique sans terme de source au sein d'un solide dans le cas d'une situation à une variable d'espace en géométrie cartésienne, cylindrique ou sphérique. Utiliser une généralisation de l'équation de la diffusion en présence d'un terme de source. Utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur Laplacien et son expression fournie. Analyser une équation de diffusion thermique en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.	●	●		●		●	●		●		A
Régime stationnaire. Résistance thermique. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Déterminer l'expression de la résistance thermique d'un solide dans le cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Exploiter les lois d'association de résistances thermiques.	●	●	●							●	
Coefficient de transfert thermique de surface ; loi de Newton. Utiliser la loi de Newton comme condition aux limites à une interface solide-fluide.	●				●					●	B
Approche descriptive du rayonnement thermique dans le cas d'un corps noir. Loi de Wien. Loi de Stefan. Effet de serre. Exploiter les expressions fournies des lois de Wien et de Stefan. Analyser quantitativement l'effet de serre en s'appuyant sur un bilan énergétique sur un modèle à une couche.	●							●	●	●	

Données pour l'ensemble des exercices :

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,z}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,z}.\vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{r,\theta}.\vec{u}_z$$

$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}.\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi}.\vec{u}_\theta + \frac{1}{r sin\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}.\vec{u}_\varphi$$

$$div\ \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial (\sin(\theta)\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

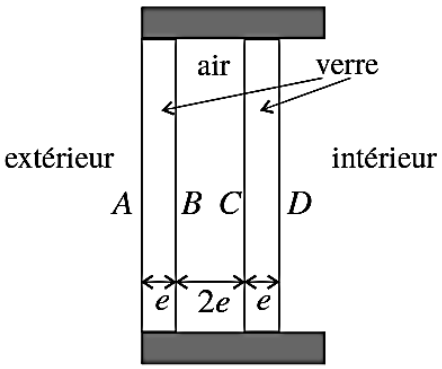
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2.\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

- **Loi de Wien** pour un corps noir à la température T : $\boldsymbol{\lambda_{max}.T = 2898\ \mu m.K}$
- **Loi de Stefan** pour un corps noir à la température T : $\boldsymbol{\varphi^e = \sigma.T^4 \quad avec\ \sigma = 5,67.10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}}$

1 Double vitrage

1. Une fenêtre simple vitrage est constituée d'une plaque de verre de surface S et d'épaisseur e. La conductivité thermique du verre est $\lambda_v = 1{,}0\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Les pertes dues au cadre de la fenêtre sont négligées.

Exprimer la puissance thermique perdue à travers la fenêtre, P_f, en fonction de λ_v, e, S, T_i température à l'intérieur de la maison et T_e température à l'extérieur.



2. Une fenêtre double vitrage est composée de deux vitres identiques d'épaisseur e et de surface S, séparées par une épaisseur $2e$ d'air (voir figure). La conductivité thermique de l'air est $\lambda_a = 2{,}0\times 10^{-2}\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$.

On appelle A, B, C et D les quatre surfaces indiquées sur la figure. Les températures des surfaces A et D sont $T(A) = T_e$ et $T(D) = T_i$.

a. Exprimer les résistances thermiques $R_{th,AB}$, $R_{th,BC}$ et $R_{th,CD}$ en fonction de e, λ_v, λ_a et S.

b. Exprimer la résistance thermique totale $R_{th,AD}$.

c. Montrer que la puissance thermique perdue à travers la fenêtre double vitrage P'_f est telle que $\dfrac{P'_f}{P_f} \simeq \dfrac{\lambda_a}{2\lambda_v}$. Conclure.

d. Représenter le schéma électrocinétique équivalent à la fenêtre double vitrage.

e. En déduire l'expression de $T_B - T_C$ en fonction de $T_i - T_e$ et des résistances thermiques, puis en fonction de $T_i - T_e$, λ_v et λ_a. Faire l'application numérique et conclure.

2 ✎ Isolation thermique d'un ballon d'eau chaude → *Résistance thermique en cylindriques*

Le ballon est modélisé par un cylindre creux en acier d'épaisseur $e = 30\ mm$, de hauteur $h = 157\ cm$ et de rayon $l = 57\ cm$ dont les parois planes sont parfaitement calorifugées.

1) Montrer que le flux thermique sortant d'un cylindre de rayon r ($l < r < l + e$) ne dépend pas de r en régime stationnaire.

2) Par une analogie à préciser, en déduire la résistance thermique du ballon. La calculer numériquement.

On décide d'isoler le dispositif. Une première solution consiste à utiliser de la laine de verre d'épaisseur $e' = 300\ mm$. Une autre possibilité est de choisir du polyester d'épaisseur $e'' = 50\ mm$.

3) Calculer la nouvelle résistance thermique.

4) Quel est le meilleur choix ?

Données : conductivités thermiques

Acier : $\lambda = 50\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$;

Laine de verre : $\lambda' = 0{,}035\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$;

Polyester : $\lambda'' = 0{,}022\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$.

3 Cuisson d'un œuf d'autruche *(Type « résolution de problème »)*

➲ Estimer la durée nécessaire pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche.

Donnée :

Un œuf de poule a une masse environ 25 fois inférieure à celle d'un œuf d'autruche.

4 Ailette de refroidissement

→ Prise en compte de transferts thermiques (convectifs) latéraux.

Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des ailettes de refroidissement en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.

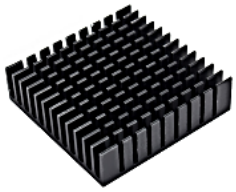


Figure 4 – Ailettes de refroidissement d'un processeur.

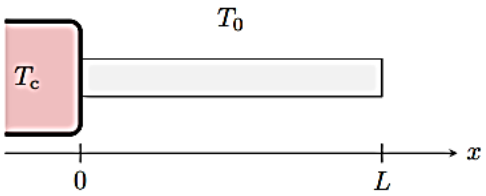


Figure 5 – Schéma de l'ailette étudiée.

On étudie ici une ailette parallélépipédique, de longueur L dans la direction x et de côtés a et b dans les directions y et z, faite d'un matériau de conductivité thermique λ. Cette ailette est accolée au composant à refroidir, de température T_c, et placée dans l'air de température supposée uniforme T_0. Les échanges entre l'ailette et l'air sont modélisés par la loi de Newton : le flux $\mathrm{d}\varphi$ cédé à l'air par un élément de surface $\mathrm{d}S$ de l'ailette situé à l'abscisse x s'écrit

$$\mathrm{d}\varphi(x) = h(T(x) - T_0)\,\mathrm{d}S\,.$$

Hypothèses de travail :

- ▷ le régime est stationnaire ;
- ▷ la température est uniforme sur une section donnée de l'ailette ;
- ▷ l'ailette est en contact thermique parfait avec le matériau à refroidir ;
- ▷ la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

1 - Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\delta^2}T = -\frac{1}{\delta^2}T_0\,,$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

2 - Résoudre cette équation différentielle.

3 - Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

4 - On observe sur la figure 4 plusieurs ailettes montées les unes à côté des autres. Quel en est l'intérêt par rapport à une seule ailette de plus grandes dimensions ? On pourra comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimensions latérales $a \times b$ à celui d'une unique ailette plus grande, de dimensions $Na \times Nb$.

5 Igloo *(Type « résolution de problème »)*

Un explorateur sur la banquise construit un igloo de rayon intérieur R = 1 m. La température extérieure est de – 20°C et la température minimale nécessaire à la survie est égale à 10°C.

➲ Quelle doit être l'épaisseur minimale des murs de l'igloo ?

Données :

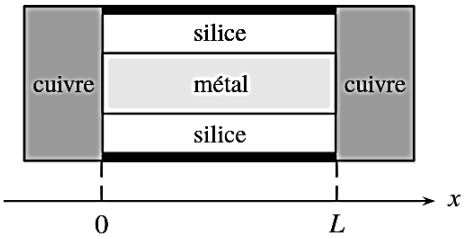
Conductivité thermique de la glace $\lambda = 0{,}050\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$

L'homme dégage une puissance de 100 W

6 Fusible *(d'après Physique – Modélisation E3A PSI 2017)*

→ Prise en compte d'un terme source (effet Joule)

Un fusible en céramique est constitué d'un fil métallique cylindrique de section S, de longueur L et de conductivités thermique λ et électrique γ. On considère que toutes ces grandeurs sont uniformes dans le fil métallique et indépendantes de la température. Le fil métallique est soudé à ses deux extrémités sur des plots de cuivre massif que l'on considère conducteur électrique et thermique parfait. Le cuivre est maintenu à une température constante T_0. Il s'agit de la température de l'air extérieur au fusible. Le fil métallique est inséré dans une gaine en silice assurant une isolation latérale thermique et électrique parfaite. Le fil métallique est parcouru par un courant d'intensité I.



1. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température peut s'écrire sous la forme : $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{I^2}{\gamma S^2} + \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

2. Établir le profil de température dans le fil métallique en régime stationnaire. Tracer l'allure de ce profil.

3. La température de fusion du métal est notée T_F. Donner la position du fil métallique où débute la fusion du métal lorsque le courant atteint l'intensité maximale supportée par le fusible. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique avec : $\lambda = 65\,\mathrm{W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}}$; $\gamma = 1{,}2 \times 10^6$ SI ; $T_0 = 290$ K ; $L = 2{,}5$ cm ; $T_F = 390$ K ; $I_{\max} = 16$ A.

7 Croûte continentale - Géothermie

→ Prise en compte d'un terme source (désintégration nucléaire)

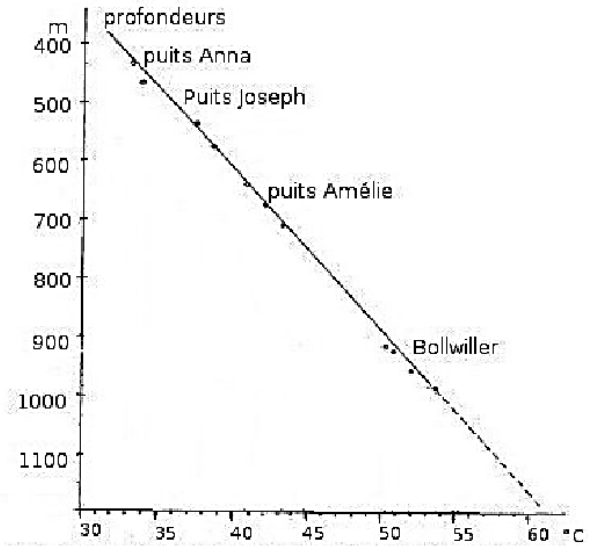


Figure 3 – Température en fonction de la profondeur. La courbe représente la température mesurée au fond de différents puits de mines alsaciens en fonction de leur profondeur.

La croûte continentale terrestre a une épaisseur moyenne de 30 km, limitée par la discontinuité de Moho. Sa conductivité thermique moyenne vaut $\lambda = 2{,}5\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Au niveau de la surface, la température vaut en moyenne $T_0 = 13\,°\mathrm{C}$. Les éléments radioactifs présents dans la croûte terrestre libèrent, en se désintégrant, une puissance volumique p supposée uniforme.

On néglige localement la courbure de la Terre et on se place en régime permanent : la température ne dépend que de la profondeur z, mesurée le long d'un axe vertical descendant.

1 - Établir l'équation différentielle régissant le champ de température $T(z)$.

2 - Combien de conditions aux limites sont nécessaires pour la résolution ? Les identifier, en s'aidant notamment de la figure 3.

3 - Procéder à la résolution et représenter graphiquement le profil de température.

4 - Estimer un ordre de grandeur de p sachant que la température au niveau de la discontinuité de Moho est de l'ordre de 600 °C.

5 - Cette puissance libérée par la Terre peut être récupérée : c'est la géothermie. Déterminer le flux géothermique surfacique en Alsace. En déduire l'énergie potentiellement récupérable par géothermie sur un an. On estime pour cette région un potentiel solaire annuel de l'ordre de $1220\,\mathrm{kWh/m^2}$: commenter.

8 ✎ Effet de cave – Onde thermique sinusoïdale *(exercice proche de CCINP MP 2014)*

L'atmosphère occupe le demi-espace $x < 0$ et le sol le demi-espace $x > 0$. On négligera la présence de matériaux radioactifs dans le sol.

La température au niveau du sol est $T(0,t) = T_0 + a \cdot \cos(\omega t)$. On utilisera la notation complexe :

$$\underline{T}(0,t) = T_0 + a \cdot exp(j\omega t)$$

Pour le sol, on note la masse volumique $\mu = 3{,}0 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$, la capacité thermique massique $c = 515\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ et la conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$.

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$.

1. On cherche une solution de la forme $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(j\omega t)$. Déterminer $\underline{f}(x)$ et en déduire $T(x,t)$.
2. Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température $T(0)$ de 15 °C autour d'une température moyenne de 3 °C en hiver.

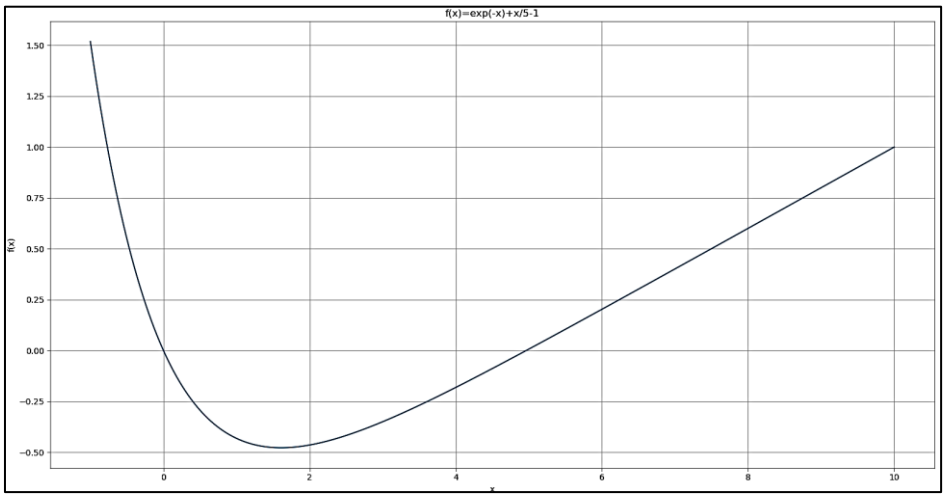
9 Justifications de la loi de Wien et de la loi de Stefan

On rappelle la loi de Planck qui exprime la densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir isotherme à la température T :

$$F^e(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} . \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

Avec h la constante de Planck : $h = 6{,}63.10^{-34} J.s$ et k_B la constante de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$.

1) La fonction densité spectrale de flux surfacique admet un maximum pour une longueur d'onde notée λ_{max} que l'on souhaite relier à la température T du corps noir étudié. Pour cela, on pose $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ et on note $x_{max} = \frac{hc}{\lambda_{max} k_B T}$.
   a) Montrer que x_{max} vérifie l'équation $e^{-x_{max}} + \frac{x_{max}}{5} - 1 = 0$.
   b) Déterminer une valeur approchée de x_{max} avec la courbe ci-dessous
   c) Conclure sur la loi de Wien.



2) a) Rappeler la relation entre le flux surfacique total émis et la densité spectrale de flux surfacique émis par un corps noir.
   b) On pose à nouveau $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$. Montrer que $\varphi^e = \frac{2\pi {k_B}^4 T^4}{h^3 c^2} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$.
   c) Conclure sur la loi de Stefan.

Donnée : $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$

10 Lampe à incandescence

Une lampe à incandescence a les caractéristiques suivantes :

- filament de tungstène de forme cylindrique de surface $S_F = 2.10^{-5}\ m^2$;
- ampoule de verre de faible épaisseur et de forme sphérique de rayon $R = 2{,}5\ cm$.

La puissance rayonnée par le filament est P.

On fait l'hypothèse que le rayonnement du filament est celui d'un corps noir de température T_F.

1) Calculer T_F pour une puissance rayonnée $P = 60\ W$. Quelle est la valeur de la longueur d'onde λ_{max} correspondant à l'émission maximale ?
2) 98% du flux émis est compris dans l'intervalle $[0{,}5.\lambda_{max}; 8.\lambda_{max}]$. Commenter.

11 Bilan thermique d'un astéroïde

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R, de conductivité thermique λ, en régime stationnaire. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : les éléments radioactifs présents libèrent en se désintégrant une puissance volumique $\mathcal{P}_v$. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

1. A l'aide d'un bilan thermique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.
2. Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, $\mathcal{P}_v$, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.

On note T_s la température à la surface de l'astéroïde. On assimilera l'astéroïde à un corps noir de température T_s pour exprimer la puissance surfacique qu'il émet par rayonnement .

3. Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, $\mathcal{P}_v$ et σ la constante de Stefan.

12 Capteur solaire

1. Soit une plaque dont la surface S orientée vers le Soleil est noircie et considérée comme un corps noir et dont l'autre face est brillante et n'échange pas de rayonnement avec le milieu extérieur. Soit J la puissance solaire reçue au niveau du sol par unité de surface (J=800 $\mathrm{W.m^{-2}}$).
   (a) Calculer la température d'équilibre T_1 de S.
   (b) Quelle est la valeur λ_1 de la longueur d'onde du maximum de rayonnement émis ? A quel domaine spectral appartient-elle ?
2. On intercale une vitre V entre la surface noire de la plaque et le rayonnement solaire. On admettra que le verre absorbe totalement tout rayonnement infrarouge tel que $\lambda > 1\mu\mathrm{m}$ et que le rayonnement solaire, arrivant au sol n'en contient quasiment pas. Soient T_V et T_2 les températures respectives de la vitre et de la plaque. En considérant la vitre comme un corps noir qui émet dans deux demi-espaces (vers l'extérieur et vers la plaque), écrire un nouveau bilan thermique pour S et pour V. En déduire les températures T_V et T_2. Conclusion ?
3. De l'eau circule au contact de la surface noire S de la plaque. La température d'équilibre de S est alors $T_3 = 333\mathrm{K}$. L'eau, à son arrivée, est à une température de 7 °C.
   (a) Effectuer un nouveau bilan thermique pour S et pour V.
   (b) Quelle doit être la surface du capteur pour produire 15 L d'eau chaude ($T \approx T_3$) à l'heure ? On donne la capacité thermique massique de l'eau $c = 4,18\mathrm{kJ.K^{-1}.kg^{-1}}$.

13 Résistance thermique relative au rayonnement thermique

On considère une personne à la température T_h et telle que la surface S de sa peau est $S \approx 2\ m^2$.
Cette personne est placée dans un milieu de température $T_a = 300\ K$.
On considère que la personne et le milieu ambiant émettent un rayonnement assimilé à celui d'un corps noir et on suppose que la personne absorbe tout le rayonnement émis par le milieu ambiant.
On s'intéresse au flux surfacique radiatif pour la personne : $\varphi^R = \varphi^e - \varphi^a$ avec φ^e le flux surfacique émis par la personne et φ^a le flux surfacique qu'elle absorbe.

1) Montrer que, lorsque $\frac{|T_h - T_a|}{T_a} \ll 1$, on peut écrire $\varphi^R \approx K \cdot (T_h - T_a)$ avec $K = 4\sigma {T_a}^3$, σ étant la constante de Stefan.
2) Comparer cette expression à celle de la loi de Newton. Conclure en exprimant la résistance thermique relative au rayonnement thermique.