– Interro n°01 – Sujet A –

– 6 septembre 2024 –

Exercice 1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

Solution (Exercice 1)

cf. Exercices de la banque CCINP.

Exercice 2

1. Donner l'équivalent de l'expression suivante : $\alpha_n = \tan\left(\dfrac{n+1}{n^3}\right)$
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$

Solution (Exercice 2)

1. $\dfrac{n+1}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\alpha_n \sim \dfrac{n+1}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2}$.
2. On calcule le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \mathrm{o}(x^5)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}(x^4)} \\
&= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \mathrm{o}(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

– Interro n°01 – Sujet B –

– 6 septembre 2024 –

Exercice 3

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto \cos^4 x$.

Solution (Exercice 3)

cf. Exercices de la banque CCINP.

Exercice 4

1. Donner l'équivalent de l'expression suivante : $u_n = \sin\left(\dfrac{n}{(n+1)^3}\right)$
2. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{x}{\tan x}$

Solution (Exercice 4)

1. $\dfrac{n}{(n+1)^3} \sim \dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim \dfrac{n}{(n+1)^3} \sim \dfrac{1}{n^2}$.
2. On calcule le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5)$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\tan x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \mathrm{o}(x^4)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{2x^4}{15} + \frac{x^4}{9} + \mathrm{o}(x^4) \\
&= 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{45}x^4 + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$