

**Contenu :**

<b>MP-MPI</b> – Ex 1 : Thermodynamique des supraconducteurs .....	1
<i>Transferts thermiques</i>	
<b>MP</b> – Ex 2 : Installation motrice avec turbine à gaz.....	5
<i>Machines thermiques à écoulement</i>	
<b>MPI</b> – Ex 2 : Refroidissement d'un astéroïde.....	7
<i>Transferts thermiques par rayonnement</i>	

**MP-MPI – Ex 1 : Thermodynamique des supraconducteurs**

Les vecteurs sont surmontés d'une flèche ( $\vec{w}$ ), à l'exception des vecteurs unitaires notés avec un chapeau ( $\hat{u}$ ). Les applications numériques seront réalisées avec seulement deux chiffres significatifs. Les *données numériques* nécessaires et un *formulaire*, relatif en particulier aux coordonnées sphériques, figurent en fin d'énoncé.

Parmi les applications importantes des basses températures, on compte la supraconductivité : certains métaux ou oxydes métalliques acquièrent, en dessous d'une certaine température critique ( $T < T_{sc}$ ) un caractère supraconducteur, le matériau pouvant conduire un courant électrique *permanent* sans aucune dissipation d'énergie. Cette propriété est par exemple mise à profit pour la production de champs magnétiques intenses.

Dans tout ce qui suit, le matériau supraconducteur est assimilé à un conducteur thermique de conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de FOURIER, de masse volumique  $\rho$  et de capacité thermique massique  $c$ . On rappelle que, dans ce cas, l'évolution de la température à l'*intérieur* du matériau conducteur est donnée par l'équation de diffusion thermique :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T \quad \text{où } \Delta \text{ est l'opérateur laplacien.}$$

Les échanges thermiques entre ce matériau et le fluide qui l'entoure seront, dans tous les cas, décrits par la loi de NEWTON : le transfert thermique pariétal (à la surface ou sur les bords) du solide de température  $T$  vers le fluide de température  $T_f$ , par unité de temps et par unité d'aire, est  $j_{\text{par}} = k(T - T_f)$  où  $k$  est une constante. Les études menées en I.A et I.B sont totalement indépendantes.

## I.A Refroidissement progressif d'un supraconducteur

Le matériau (supraconducteur) étudié dans cette partie I.A à la forme d'une boule de rayon  $R$ , de température uniforme  $T(t)$ . Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient, à grande distance du matériau, la température uniforme et constante  $T_0 < T_{sc}$  (cf. figure 1).

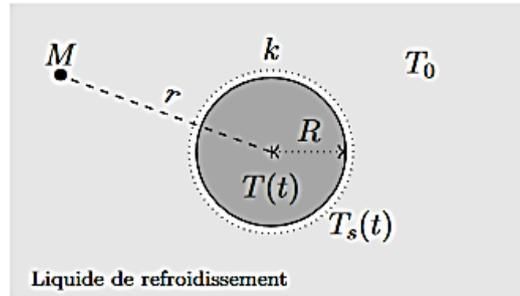


FIGURE 1 – Boule de supraconducteur en cours de refroidissement

- – 1. Donner, en les justifiant, les unités (ou les dimensions) de  $k$  et  $\lambda$ .  
Établir, dans le cas unidimensionnel, l'équation de diffusion thermique rappelée ci-dessus.
- – 2. Rappeler l'expression de la diffusivité thermique  $D_{th}$  d'un matériau.  
À quelle condition, portant sur la durée  $\Delta t$  du refroidissement, l'hypothèse consistant à considérer la température du matériau comme *uniforme* est-elle légitime? *On se placera dans ce cas dans la suite.*
- – 3. Exprimer en fonction des données la capacité thermique  $C_{th}$  de la boule solide, ainsi que la résistance thermique d'isolement  $R_{th}$  associée aux échanges pariétaux convecto-conductifs à sa surface.

Pour l'étude du refroidissement, il faut aussi tenir compte des transferts thermiques au sein du liquide réfrigérant. On admet que la température  $T_f$  en un point  $M$  du liquide supposé immobile ne dépend que de la distance  $r$  au centre  $O$  de la boule (figure 1). On néglige la capacité thermique massique du liquide réfrigérant ; sa conductivité thermique est notée  $\lambda'$ .

- – 4. Montrer que  $T_f(r,t) = T_0 + [T_s(t) - T_0] R/r$
- – 5. Pourquoi est-il licite de décrire les transferts à travers le fluide en termes de résistance thermique?  
Exprimer la résistance thermique  $R'_{th}$  associée au refroidissement conductif, en fonction de  $\lambda'$  et  $R$ .

On suppose pour finir que  $\lambda' \gg Rk$ .

- – 6. Déterminer l'équation d'évolution de la température  $T(t)$  de la boule solide ; on posera  $\tau = \frac{\rho R c}{3k}$ .
- – 7. On notera  $T_i = T(t = 0)$  la température initiale du matériau. Tracer l'allure de la courbe  $T(t)$  et exprimer la durée  $\Delta t$  au bout de laquelle le matériau débute la transition conducteur  $\mapsto$  supraconducteur.

## I.B Refroidissement stationnaire d'un fil supraconducteur

L'absence de résistivité dans les matériaux supraconducteurs n'empêche pas, notamment dans le cadre de régimes transitoires électromagnétiques, l'existence de dissipations de puissance dues au champ électrique induit. Il s'ensuit un chauffage local du matériau supraconducteur. Le passage éventuel de celui-ci au-dessus de la température critique  $T_{sc}$  a alors un effet catastrophique : l'effet Joule apparaît, la température augmente de plus en plus et la surchauffe du bobinage peut détruire celui-ci : c'est le phénomène de *quench* (voir figure 2).



FIGURE 2 – Fuite d'hélium suite à la destruction (*quench*) d'un aimant supraconducteur utilisé pour la RMN. Département de Chimie de l'université de l'Alberta

On va dans ce qui suit s'intéresser aux conditions de refroidissement propres à éviter le phénomène de quench.

Le matériau supraconducteur étudié a la forme d'un fil cylindrique de rayon  $R$ , de très grande longueur (figure 3). Il est entièrement plongé dans un liquide réfrigérant qui maintient une température uniforme  $T_0 < T_{sc}$ , avec lequel les échanges thermiques se font selon la loi de NEWTON. La totalité du fil cylindrique est le siège d'une production de puissance électromagnétique avec la densité volumique supposée uniforme et constante  $p_u$ .

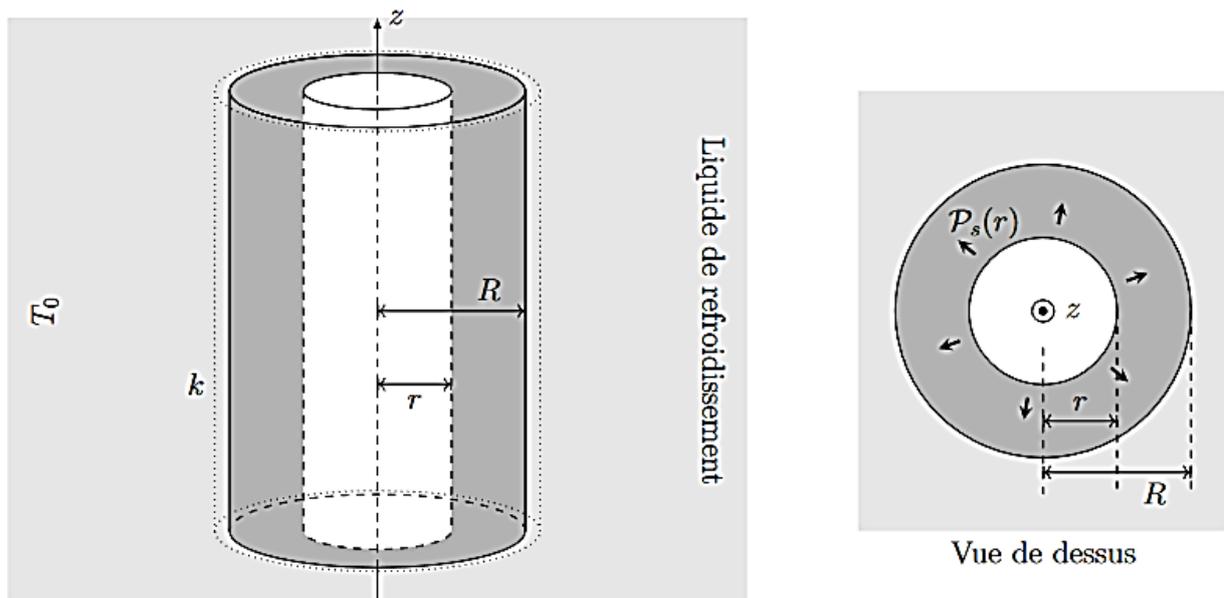


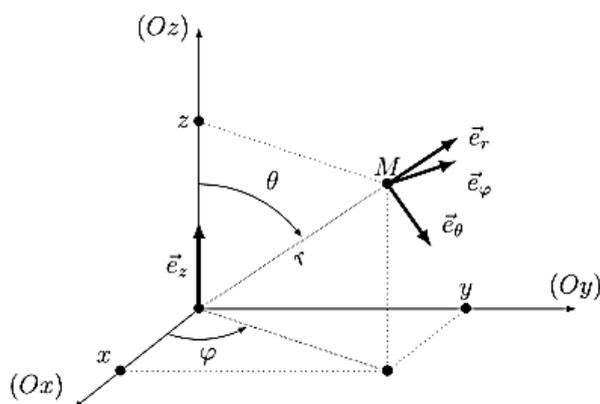
FIGURE 3 – Fil supraconducteur en régime stationnaire

- – 8. Exprimer la puissance totale  $\mathcal{P}_s(r)$  évacuée par une hauteur  $H$  de la partie du fil située au plus à la distance  $r$  de l'axe avec  $0 \leq r < R$ , cf. figure 3.
- – 9. En déduire, en régime permanent, l'intensité  $j_{th}(r)$  de la densité volumique de flux thermique conductif dans le fil.
- – 10. Déterminer l'expression de la température de surface  $T_s$  en fonction de  $T_0$ ,  $k$ ,  $p_u$  et  $R$ .
- – 11. À quel endroit dans le fil la température est-elle maximale?  
Déterminer l'expression de la valeur  $T_{max}$  correspondante.

Montrer que le phénomène de *quench* ne se produit pas si  $p_u$  est inférieur à une valeur critique  $p_{max}$  que l'on exprimera.

## Repérage sphérique d'un point $M$

Le point  $M$  de coordonnées cartésiennes  $(x,y,z)$  peut aussi être repéré par ses coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  rappelées sur le schéma ci-après :



## Formulaire en coordonnées sphériques

Gradient :

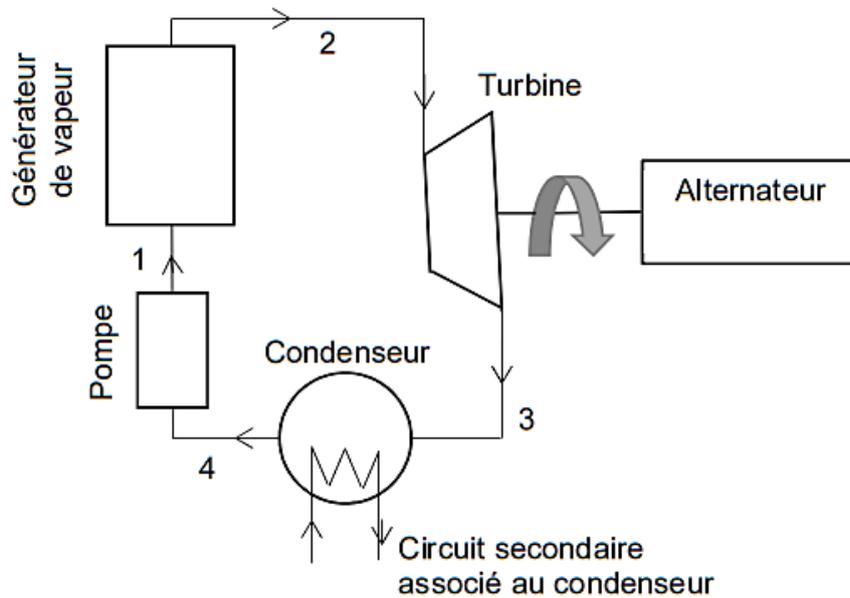
$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{u}_\varphi$$

Laplacien scalaire :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right]$$

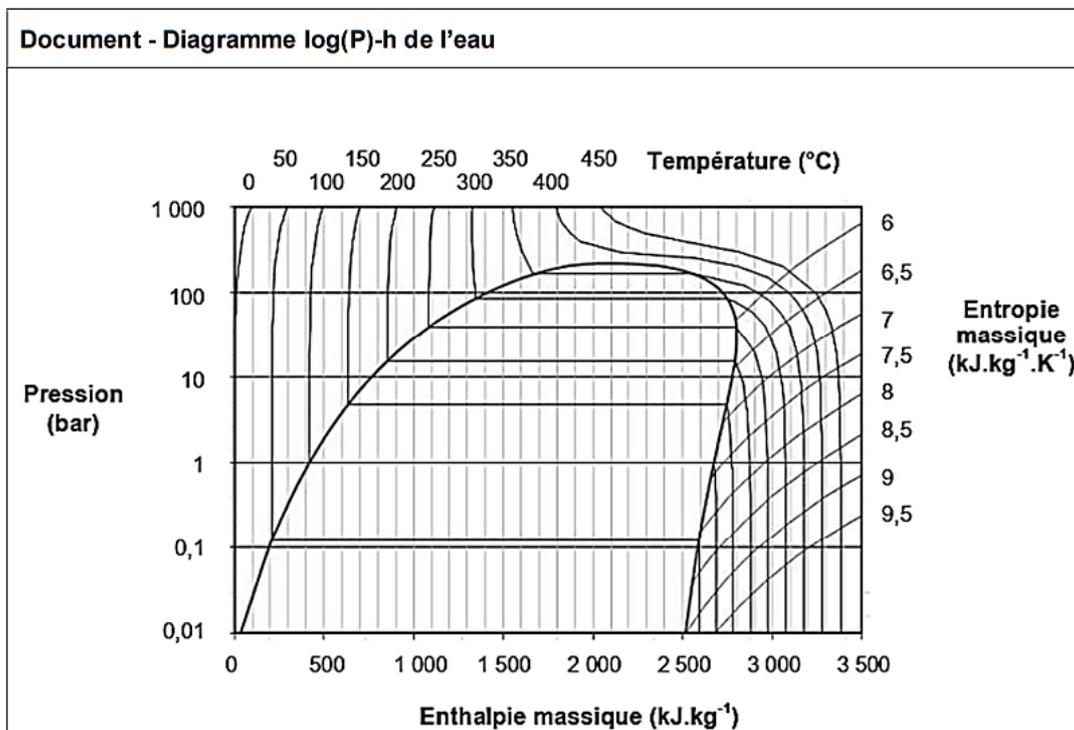
**MP – Ex 2 : Installation motrice avec turbine à gaz**

On étudie ici une installation motrice dont le principe de fonctionnement est décrit sur la **figure 6**.



**Figure 6 - Installation motrice**

Elle fonctionne en régime permanent suivant un cycle de Hirn. Le fluide utilisé est de l'eau. La pompe alimente le générateur de vapeur en liquide haute pression (point 1), on a  $P_1 = 10$  bars. Le liquide est porté à ébullition, puis totalement vaporisé, et enfin surchauffé de façon isobare par le brûleur au bio-méthane (point 2). La vapeur surchauffée se détend ensuite dans la turbine accouplée à un alternateur électrique (point 3). Au point 3, on a  $P_3 = 1$  bar, la vapeur est sous forme de vapeur saturante de titre massique en vapeur  $x_v = 1$ . La vapeur humide basse pression est totalement condensée, puis le liquide (point 4) est réintroduit dans la pompe. Un circuit secondaire, associé au condenseur et relié à une tour de refroidissement ou autre, permet d'extraire l'énergie issue du condenseur par transfert thermique.



Hypothèses :

- l'évolution dans la turbine est adiabatique et réversible ;
- l'évolution dans la pompe est supposée isenthalpique ;
- dans les bilans énergétiques, les variations d'énergie cinétique et potentielle du fluide seront négligées par rapport aux termes enthalpiques ;
- on néglige les pertes mécaniques de la turbine et le rendement de l'alternateur est considéré égal à 100 % ;
- l'état du fluide reste inchangé dans les canalisations de liaison entre les différents éléments.

**Q29.** Reproduire sommairement sur votre copie l'allure du diagramme  $\log(P)$ - $h$  de l'eau fourni en fin de sujet, en veillant à retranscrire au mieux la courbe de saturation et y superposer l'allure du cycle étudié. Reproduire et compléter le **tableau 1** sur votre copie.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
T (°C)	$\approx 100$			100
P (bar)	10	10	1	1
h (kJ·kg <sup>-1</sup> )				
État	Liquide	Vapeur sèche	Vapeur saturante ( $x_v = 1$ )	Liquide saturé ( $x_v = 0$ )

**Tableau 1** - Grandeurs thermodynamiques de l'eau dans le cycle de la **figure 6**

**Q30.** Exprimer en fonction des enthalpies massiques aux points 1, 2, 3 et 4 :

- le travail utile massique de la turbine ( $w_{IT}$ ). Ce travail est parfois dénommé travail indiqué massique ;
- le transfert thermique massique ( $q_{GV}$ ) fourni par le générateur de vapeur ;
- le transfert thermique massique ( $q_{Cond}$ ) récupéré par le circuit secondaire associé au condenseur.

Évaluer numériquement  $w_{IT}$ ,  $q_{GV}$  et  $q_{Cond}$ .

Exprimer le rendement de l'installation en fonction des différentes enthalpies massiques.

**Q31.** Évaluer le débit massique en eau du circuit primaire, noté  $D_{m1}$ , pour une production d'électricité d'une puissance  $P_{elec} \approx 250$  kW.

## MPI – Ex 2 : Refroidissement d'un astéroïde

On considère un astéroïde sphérique de rayon  $R$ , de masse volumique homogène  $\rho$  et de capacité thermique massique  $c$ . On note  $T(t)$  sa température et  $T(0) = T_0$  sa température initiale. Cet astéroïde est perdu dans l'infinité de l'univers.

1) Justifier que les seuls échanges énergétiques possibles avec l'extérieur se font par rayonnement.

La température de l'univers est considérée suffisamment faible pour être prise nulle. On suppose que l'astéroïde rayonne comme un corps noir.

2) Sa température initiale est  $T_0 = 20$  K. Dans quel domaine électromagnétique émet-il maximale ?

3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $T$  est

$$\rho c \frac{R}{3} \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4$$

4) En déduire que la solution est

$$T(t) = \frac{T_0}{(1 + 3\alpha T_0^3 t)^{1/3}} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{3\sigma}{\rho c R}$$



### Données :

◆ En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{\theta, \varphi} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{r, \varphi} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{r, \theta} \cdot \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin(\theta) a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

◆ Loi de Wien pour un corps noir à la température  $T$  :

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$$

◆ Loi de Stefan pour un corps noir à la température  $T$  :

$$\varphi^e = \sigma \cdot T^4 \quad \text{avec } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$