Chapitre EM1. Electrostatique : champ, potentiel et flux

Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806), officier, ingénieur et physicien français.
Coulomb est surtout reconnu pour avoir formulé précisément des lois du frottement solide (cf partie mécanique) et pour l'invention du pendule de torsion qui lui a permis d'établir l'expression de la force d'interaction entre solides électrisés, presque 100 ans après l'énoncé de la force d'interaction gravitationnelle par Newton.

INTRO :

Ce chapitre a pour objet l'étude d'un champ vectoriel $\vec{E}$ le champ électrostatique et d'un champ scalaire V le potentiel électrostatique. Un champ et un potentiel électrostatiques sont générés par une **distribution de charges fixes**.
Si les charges sont mobiles, on entre dans le cadre de l'électromagnétisme qui sera étudié ultérieurement.

Buts de ce chapitre : Donner les expressions du champ $\vec{E}$ et du potentiel V électrostatiques générés par différentes distributions de charges ; décrire la topographie de $\vec{E}$ et de V ; énoncer et utiliser le principe de Curie (symétries et invariances) et le théorème de Gauss.

Prérequis :
1e année : Bases de l'électrocinétique ; Dynamique du point ; Mouvement de particules chargées dans un champ électrique ; Champ magnétique et Induction électromagnétique.

Plan du chapitre :

A) Charge électrique, interaction et champ électrostatiques 2
1) Charge électrique *(rappels)* 2
2) Cas de deux charges ponctuelles – Analogie électrostatique / gravitation 2
3) Généralisation – Relation champ - force électrostatique – ODG 3
4) Distributions de charges – Expressions du champ électrostatique 4
5) Topographie du champ électrostatique – Lignes de champ, tubes de champ 6
6) Symétries et invariances du champ électrostatique 7
B) Circulation du champ électrique – Potentiel électrostatique 10
1) Définition de la circulation 10
2) Exemple de calcul : cas d'une charge ponctuelle 10
3) Généralisation – Expressions du potentiel électrostatique 11
4) Symétries et invariances du potentiel électrostatique 11
5) Relation locale entre champ et potentiel électrostatiques – Opérateur gradient 12
6) Topographie – Surfaces équipotentielles – Interprétation de l'opérateur gradient 12
7) Energie potentielle électrostatique *(rappels)* 13
C) Flux du champ électrique – Théorème de Gauss 13
1) Définition du flux *(rappels)* 13

2) Enoncé du théorème de Gauss 14
3) Applications du théorème de Gauss 14
4) Tubes de champ – Conservation du flux 17
5) Théorème de Gauss « gravitationnel » : retour sur l'analogie 17
Outils mathématiques : Déplacements, surfaces et volumes élémentaires 18
Capacité numérique – Tracé de lignes de champ et d'équipotentielles 19

A) Charge électrique, interaction et champ électrostatiques

1) Charge électrique *(rappels)*

La matière est composée de particules dont certaines portent une charge électrique q (électrons, protons, ions…).

La charge q est une grandeur **algébrique** dont **l'USI est le Coulomb (C)**.

Propriétés :

- q est une grandeur **extensive** ;
- q est **quantifiée** : $q = k \cdot e$
  avec $k \in \mathbb{Z}$ et e la charge élémentaire : $\boldsymbol{e = 1,6.10^{-19}\ C}$;
- pour un système fermé (i.e. qui n'échange pas de matière avec l'extérieur), la charge du système est **conservée** (i.e. q indépendante du temps).

La charge d'un matériau peut s'effectuer de différentes manières : par contact avec un corps chargé ; par frottement (mise en évidence expérimentale avec une tige de verre ou de plastique frottée avec de la laine) ; par effet piezoélectrique (quartz) : *contrainte mécanique provoquant l'apparition de charges ;* par effet photoélectrique (cf mécanique quantique).

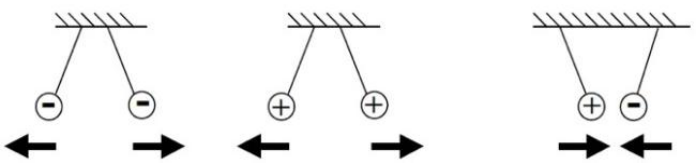
2) Cas de deux charges ponctuelles – Analogie électrostatique / gravitation

LOI DE COULOMB en électrostatique :
Soient deux charges ponctuelles P de charge q_P et M de charge q_M.
La **FORCE D'INTERACTION ELECTROSTATIQUE** entre ces deux charges, aussi appelée **force Coulombienne**, s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{P\to M}} = \frac{q_P.q_M}{4\pi\varepsilon \cdot PM^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{q_P q_M}{4\pi\varepsilon}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = -\overrightarrow{F_{M\to P}}$$

Avec ε la **permittivité diélectrique** du milieu dans lequel se trouvent les charges.
Généralement, le milieu est le vide ou l'air : $\boldsymbol{\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}\ F.m^{-1}}$ tel que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

La nature de l'interaction (attractive / répulsive) dépend du signe du produit des charges $q_P.q_M$:



Analogie interactions électrostatique / gravitationnelle.

Gravitation	Electrostatique
① Expression de la force d'interaction entre systèmes ponctuels :	
$\overrightarrow{F_{g,\ P\to M}} = -\mathcal{G}.m_P.m_M.\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$	$\overrightarrow{F_{é,\ P\to M}} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q_P.q_M.\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$
② Caractéristique des systèmes en interaction :	
Masses m_P, m_M	
③ Constante associée :	
$-\mathcal{G}$	
④ Caractéristiques de l'interaction**:**	
◆ Interaction à distance, de portée infinie ◆ Toujours attractive ◆ Non négligeable lorsqu'au moins un des systèmes est de taille astronomique	◆ Interaction à distance, de portée infinie ◆ Attractive ou répulsive ◆ Non négligeable pour des systèmes (sub-)macroscopiques
⑤ Lien entre force et champ gravitationnels / électrostatiques :	
$\overrightarrow{F_{g,\ P\to M}} = m_M.\vec{A}(M)$	$\overrightarrow{F_{é,\ P\to M}} = q_M.\vec{E}(M)$

Cas particulier (cf mécanique en supposant le référentiel terrestre galiléen) :
On peut écrire la force gravitationnelle exercée par la Terre, supposée ponctuelle, de masse $m_P = 6.10^{24}\ kg$, sur un point M de masse m_M à la surface terrestre i.e. $PM = R_T = 6400\ km$ sous la forme :

$$\overrightarrow{F_{g,\ P\to M}} = m_M\vec{g}$$

*Avec $\vec{g}$ le **champ** de pesanteur = champ gravitationnel crée par la Terre en un point M de la surface terrestre ; $g = \|\vec{g}\| = 9{,}8\ m.s^{-2}$.*

Le **CHAMP ELECTROSTATIQUE** créé au point M par **la charge ponctuelle** q_P située en P s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

NB : **Champ gravitationnel** créé en un point M par une masse ponctuelle m_P située en P :

$$\vec{A}(M) = -\mathcal{G}m_P\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

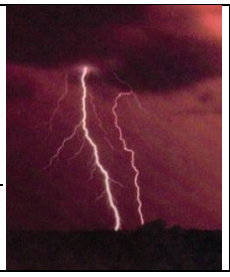
3) Généralisation – Relation champ - force électrostatique – ODG

Soit $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique créé en M par une distribution de charges fixes quelconque.
Une particule de charge q_M située en M subit la force électrique :

$$\overrightarrow{F_é} = q_M\vec{E}(M)$$

USI de $\|\vec{E}\|$: $V.m^{-1}$ (ou $N.C^{-1}$)

◆ **ODG** :

Intensité du champ électrostatique	entraînant le courant électrique dans un appareil électroménager	près d'une boule de polystyrène chargée	causant une décharge dans l'air		dans une membrane cellulaire de neurone / de fibre musculaire
$\|\vec{E}\|$ en $V.m^{-1}$	0,01 à 0,1	10^4 à 10^6	**3.10^6**		10^7

4) Distributions de charges – Expressions du champ électrostatique

PRINCIPE DE SUPERPOSITION :
Le champ électrostatique créé par un ensemble de charges est égal à la somme vectorielle des champs créés par chacune d'entre elles q_j en l'absence de toutes les autres $q_{i\neq j}$.

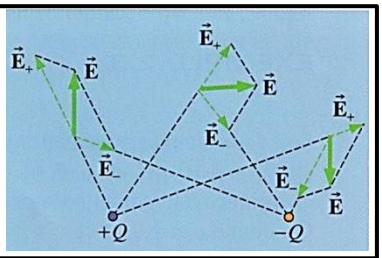
Rq : ce principe découle de la linéarité des équations de Maxwell, cf ChEM4.

NB : Ce principe est utilisé pour obtenir les expressions du champ données ci-après et pour calculer un champ en **décomposant** une distribution de charges en des distributions plus simples, cf TD.

a) Distribution discrète de charges : champ créé par N charges ponctuelles

Soit N (> 1) charges ponctuelles q_i placées aux points P_i.
D'après le **principe de superposition**, le champ électrostatique créé en un point M par l'ensemble de ces N charges ponctuelles s'écrit :

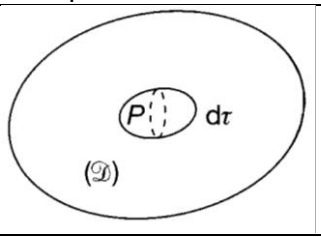
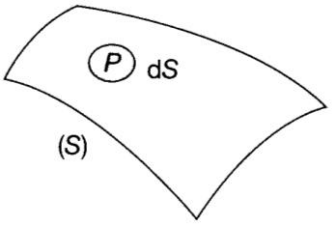
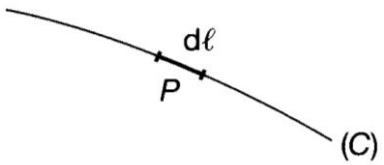
$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E_i}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}}{P_iM^3}$$



b) Distribution continue de charges – Densité locale de charges

On considère un système chargé, « centré » sur un point P, de « taille » a et le champ qu'il crée en un point M. On peut assimiler ce système à une charge ponctuelle si $a \ll PM$.
Sinon, on considère que la **charge est continûment répartie** et on « découpe » le système en éléments infinitésimaux, à **l'échelle mésoscopique**, assimilables à des charges ponctuelles.

◆ **Trois types de distributions continues de charges : volumique, surfacique et linéique**

	Volumique	Surfacique	Linéique
Schéma			
Densité locale de charges	Soit un volume élémentaire $d^3\tau$ centré en P, $d^3q(P)$ est la charge qu'il contient. **DENSITE VOLUMIQUE DE CHARGES** en P : $\boldsymbol{\rho(P) = \frac{d^3q(P)}{d^3\tau}}$ **USI : C.m^{-3}**	Soit une surface élémentaire d^2S centrée en P, $d^2q(P)$ est la charge qu'il contient. **DENSITE SURFACIQUE DE CHARGES** en P : $\boldsymbol{\sigma(P) = \frac{d^2q(P)}{d^2S}}$ **USI : C.m^{-2}**	Soit une ligne élémentaire $d\ell$ centrée en P, $dq(P)$ est la charge qu'il contient. **DENSITE LINEIQUE DE CHARGES** en P : $\boldsymbol{\lambda(P) = \frac{dq(P)}{d\ell}}$ **USI : C.m^{-1}**
Charge totale	$\boldsymbol{Q_{tot} = \iiint_{P\in(\mathfrak{D})} \rho(P) d^3\tau}$	$\boldsymbol{Q_{tot} = \iint_{P\in(S)} \sigma(P) d^2S}$	$\boldsymbol{Q_{tot} = \int_{P\in(C)} \lambda(P) d\ell}$
	Cas de distributions homogènes*		
	$\boldsymbol{Q_{tot} = \rho . \mathcal{V}_{\mathfrak{D}}}$	$\boldsymbol{Q_{tot} = \sigma . S}$	$\boldsymbol{Q_{tot} = \lambda . \ell}$

Rq sur les notations : $\boldsymbol{d^3\tau}$ (resp^t $\boldsymbol{d^3q(P)}$) est un élément de volume (resp^t une charge) triplement infinitésimal(e). Cf Outils mathématiques p.18 : expressions de $d^3\tau$.
Cette notation peut-être sous-entendue : $\rho(P) = \frac{dq(P)}{d\tau}$, $\sigma(P) = \frac{dq(P)}{dS}$.

* Vocabulaire : La **distribution** de charges est **HOMOGENE** ssi la densité locale de charges est uniforme i.e. indépendante de P.

◆ **Quel modèle de distribution choisir pour une situation donnée ?**

La distribution volumique de charges correspond à la réalité physique des matériaux quelconques. Le champ électrostatique est défini et continu en tout point de l'espace.

En revanche, les distributions surfacique et linéique sont des modélisations.

- La distribution surfacique correspond à la modélisation de la distribution de charges des milieux conducteurs, en particulier les métaux. En effet, l'expérience montre que les charges sont concentrées dans une très faible épaisseur h sous leur surface. Lorsque h est très faible devant les autres dimensions, on modélise la distribution comme une distribution surfacique de charges.

$$dq(P) = \rho(P)d\tau = \rho(P)hdS = \sigma(P)dS$$
avec $\sigma(P) = \lim_{h\to 0} \rho(P)h$

- La distribution linéique est adaptée à la description d'un conducteur filiforme dont la section s a de petites dimensions par rapport à sa longueur.

$$dq(P) = \rho(P)d\tau = \rho(P)sd\ell = \lambda(P)d\ell$$
avec $\lambda(P) = \lim_{s\to 0} \rho(P)s$

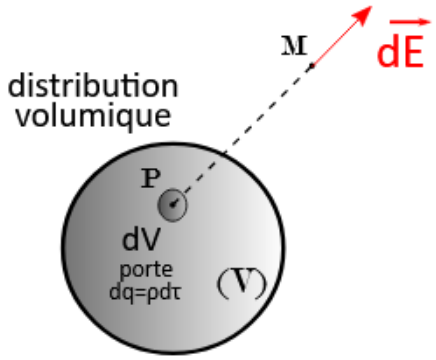
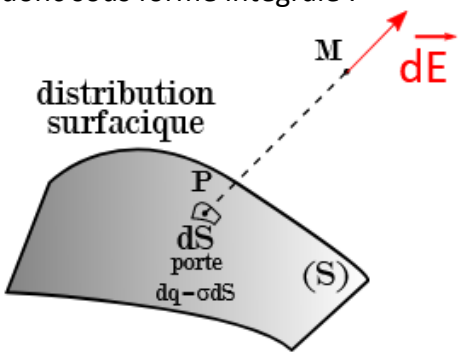
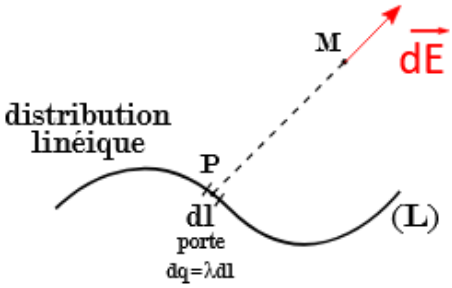
L'inconvénient de ces modélisations est d'introduire des discontinuités du champ électrostatique au niveau des distributions de charges, *cf relations de passage dans ChEM7*.

◆ **Expressions du champ**

Le champ élémentaire créé au point M par la charge infinitésimale $dq(P)$ centrée en P s'écrit :

$$\overrightarrow{dE}(M) = \frac{dq(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

D'après le **principe de superposition**, le champ électrostatique créé en un point M par l'ensemble de la distribution de charges s'écrit donc sous forme intégrale :

		
$\vec{E}(M) = \iiint_{P\in(V)} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d^3\tau$	$\vec{E}(M) = \iint_{P\in(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d^2S$	$\vec{E}(M) = \int_{P\in(C)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\ell$

Rq : on pose parfois $\overrightarrow{PM} = r\vec{u}_{P\to M}$ avec $r = \left\|\overrightarrow{PM}\right\|$ et $\vec{u}_{P\to M}$ vecteur unitaire dirigée de P vers M.

Rq : On simplifie le calcul de ces intégrales par une étude des symétries et invariances, cf § A.6.

5) Topographie du champ électrostatique – Lignes de champ, tubes de champ

◆ **Définitions** *(rappels)*

LIGNE DE CHAMP d'un champ vectoriel $\vec{A}$, passant par un point M : courbe orientée, passant par M et telle qu'en tout point de cette courbe, $\vec{A}$ est **tangent** à la courbe.
Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ.
TUBE DE CHAMP : ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé.

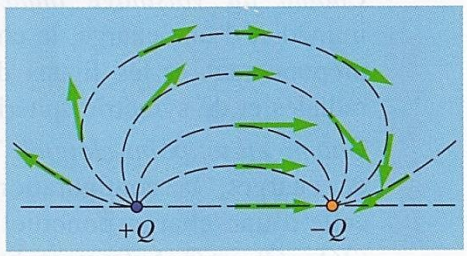
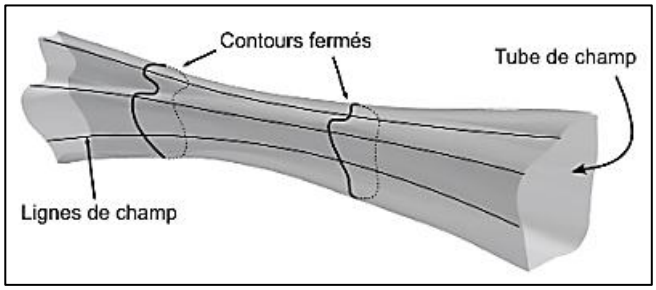


Figure 2.11 ▲
La direction du champ électrique en un point est tangente à la ligne de champ.



◆ **Propriétés des lignes de champ** (= l.d.c) **électrostatique**

Les l.d.c. électrostatique **divergent** en partant de charges **positives** et **convergent** vers des charges **négatives**, cf Fig. 1 et 2 p.7.

Dans une **région vide de charges**, le champ électrostatique est **plus intense** dans la région où les **l.d.c. se rapprochent**, cf Fig. 5 p.7 (preuve au § C.4).

Deux lignes de champ **ne peuvent se couper** en un point M que si :
une charge est placée en M
ou le champ est nul en M : $\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) = \vec{\boldsymbol{0}}$

La **carte des l.d.c.** électrostatiques reflète les **symétries** et les **invariances** de la **distribution de charges**, cf § A.6.

◆ **Cartes de champ électrostatique**

→ Visualisation grâce à Python :
Cf capacité numérique p.19-20.

→ Exemples de cartes de lignes de champ électrostatique :

Champs électrostatiques créés par une charge ponctuelle positive (Fig. 1) et négative (Fig. 2) :

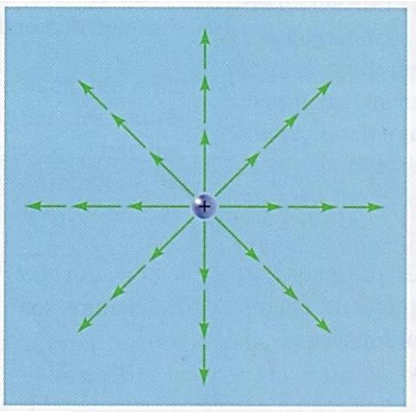


Fig. 1 ▲

On peut représenter le champ électrique d'une charge ponctuelle par des flèches dessinées à l'échelle. Chaque flèche représente le module et l'orientation du champ en un seul point, celui où elle *débute*.

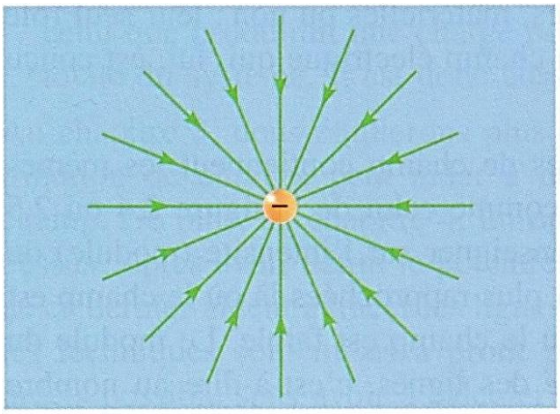


Fig. 2 ▲

Le champ électrique d'une charge peut être représenté par des *lignes de champ* continues. Ces lignes « partent » d'une charge positive et « se dirigent » vers une charge négative.

Champs électrostatiques créés par deux charges identiques (Fig. 3) et opposées (Fig. 4) :

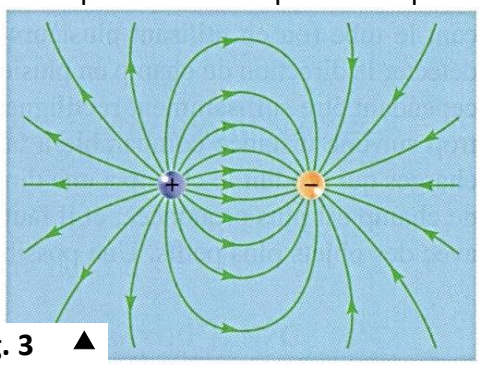


Fig. 3 ▲

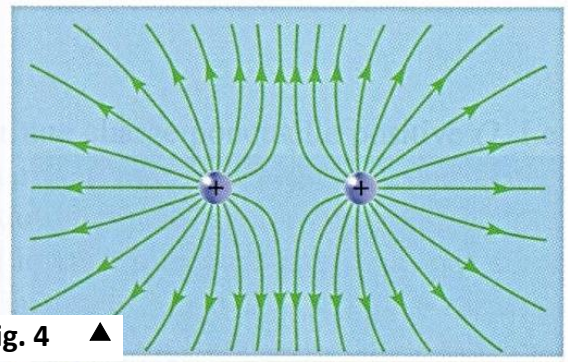
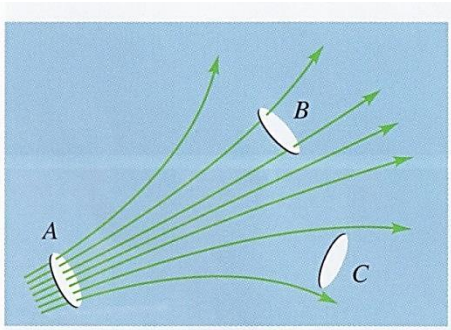


Fig. 4 ▲

Variation de l'intensité du champ électrostatique :



◀ **Fig. 5**

Le module du vecteur champ est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent une surface unitaire perpendiculaire au champ. Il serait inexact de dire que le champ est nul en C : si davantage de lignes étaient représentées sur le dessin, on verrait des lignes passer par C. Seule la densité *relative* des lignes (celle en A comparativement à celle en B, par exemple) nous intéresse.

6) Symétries et invariances du champ électrostatique

a) Motivation de l'étude – Principe de Curie

Afin de simplifier le calcul du champ $\vec{E}(M)$ créé par une distribution de charges (D_q), il est **nécessaire d'analyser les symétries et les invariances de la distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique** d'après le principe ci-après :

PRINCIPE DE CURIE :
Les symétries des conséquences sont au moins celles des causes qui leur ont donné naissance.

Cas de l'électrostatique :

Cause = distribution de charges Conséquence = champ électrostatique

L'analyse des **symétries et invariances** d'une **distribution de charges** (D_q) permet d'en déduire les propriétés de **symétrie et d'invariance** du **champ électrostatique** $\vec{E}(M)$ créé par (D_q).

b) Symétries

Soit (D_q) une distribution de charges, ρ la densité volumique de charges associée et $\vec{E}$ le champ créé.
Soit (π) un plan, on considère :

P et P' deux points de la distribution de charges, symétriques par rapport au plan (π).

M et M' deux points de l'espace, symétriques par rapport au même plan (π).

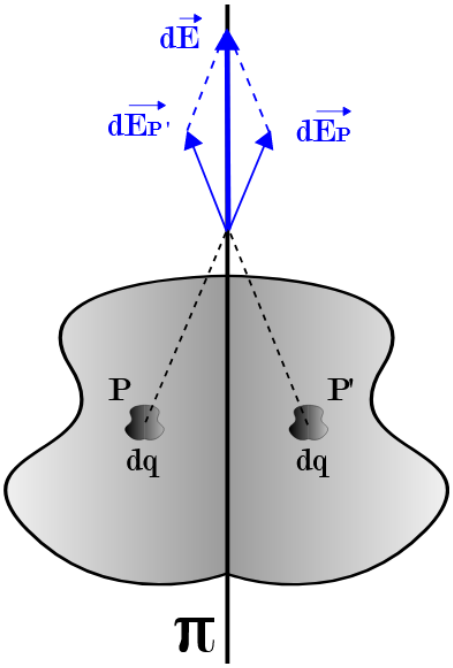
Les **symétries** de (D_q) permettent : ① de restreindre l'étude à une partie de l'espace et/ou ② de déterminer la **direction du champ** $\vec{E}(M)$, cf figures ci-après.

- (π) est un **plan de SYMETRIE** de (D_q) si $\rho(P) = \rho(P')$.
  - $\Longrightarrow$ ① $\vec{E}(M')$ est le **symétrique** de $\vec{E}(M)$.
  - $\Longrightarrow$ ② **Pour M appartenant au plan (π) de symétrie, $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan**.

- (π^*) est un **plan d'ANTISYMETRIE** de (D_q) si $\rho(P) = -\rho(P')$.
  - $\Longrightarrow$ ① $\vec{E}(M')$ est **l'opposé du symétrique** de $\vec{E}(M)$.
  - $\Longrightarrow$ ② **Pour M appartenant au plan (π^*) d'antisymétrie, $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan**.

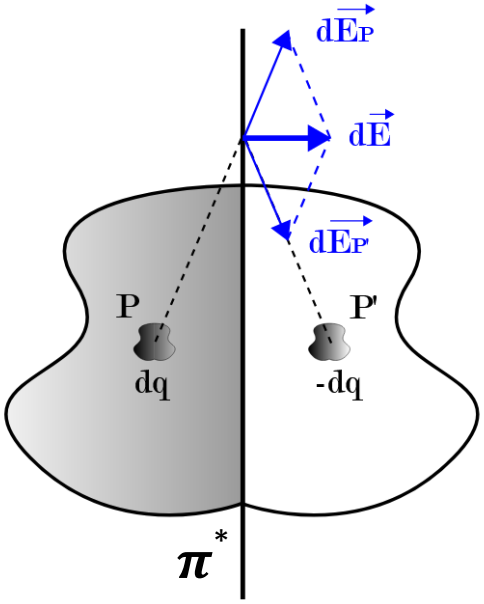
Champ élémentaire $d\vec{E}$ créé en M par les charges $dq(P)$ et $dq(P')$
avec **M appartenant au plan (π) ou (π^*)**
et **P' symétrique de P par rapport au plan (π) ou (π^*)**.

Plan (π) = plan de symétrie de la distribution (D_q)



$d\vec{E}(M)$ **contenu** dans le (π)

Plan (π^*) = plan d'antisymétrie de la distribution (D_q)



$d\vec{E}(M)$ est **orthogonal** au plan (π^*).

c) Invariances

Soit (D_q) une distribution de charges et $\vec{E}(M)$ le champ qu'elle crée en un point M de l'espace.
Les **invariances** de (D_q) conduisent à la **diminution du nombre de variables**.

◆ (D_q) est **invariante par TRANSLATION selon un axe** (Δ), prenons (Δ) = (Oz)

⟹ En coordonnées **cartésiennes** ou **cylindriques d'axe (Δ)**, **les composantes de $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée z**.

Rq : L'invariance par translation selon (Δ) suppose que (D_q) est illimitée selon (Δ) → système modèle.

◆ (D_q) est **invariante par ROTATION autour d'un axe** (Δ), prenons (Δ) = (Oz)

⟹ En coordonnées **cylindriques d'axe (Δ)**, **les composantes de $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de la coordonnée θ**.

◆ (D_q) est **invariante par ROTATION autour d'un point** O

⟹ En coordonnées **sphériques de centre O**, **les composantes de $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas des coordonnées θ et φ.**

On parle de **distribution à symétrie sphérique**.

➲ Exercice classique : Vérifier la compatibilité des l.d.c électrostatique avec les symétries et/ou les invariances des distributions de charges des Fig. 3 et 4 p.7.

d) Exemple de réduction du nombre de composantes et de dépendances spatiales

On cherche $\vec{E}(M)$ créé en un point M par une distribution de charges (D_q).

*Supposons que les **coordonnées** cartésiennes sont adaptées au problème. On cherche donc :*

$$\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

*L'étude des **symétries** de (D_q) peut **réduire le nombre de composantes de $\vec{E}$**.*

Ex : $(M, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan d'antisymétrie de (D) → $\vec{E}(M) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E(x,y,z)\overrightarrow{u_x}$

*L'étude des **invariances** de (D_q) peut **réduire le nombre de variables spatiales dont dépendent les composantes de $\vec{E}$**.*

Ex : (D_q) est invariante par translation selon (Ox) et (Oy) → $\vec{E}(M) = E(z)\overrightarrow{u_x}$

*Elle peut aussi **restreindre l'étude à une partie de l'espace**, cf § C.3.c.*

💣 *Il faut bien identifier le point M où il est demandé de calculer le champ électrostatique !*

B) Circulation du champ électrique – Potentiel électrostatique

1) Définition de la circulation

Soit (D_q) une distribution de charges qui crée un champ électrostatique $\vec{E}$.

La **CIRCULATION** de $\vec{E}$ entre A et B, deux points de l'espace, suivant une courbe (Γ) entre ces deux points est :

$$\mathcal{C}_{A\overrightarrow{(\Gamma)}B} = \int_{(\Gamma)} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

où $\overrightarrow{dl}$ désigne le vecteur déplacement élémentaire le long de la courbe (Γ).

Rq : Le travail d'une force $\vec{F}$ entre les points A et B sur une trajectoire (Γ) correspond à la circulation de $\vec{F}$ entre A et B suivant la trajectoire (Γ) :

$$W_{A\overrightarrow{(\Gamma)}B} = \int_{(\Gamma)} \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

2) Exemple de calcul : cas d'une charge ponctuelle

On suppose ici que le champ $\vec{E}$ est créé par une charge ponctuelle q placée en O.
On utilise donc les coordonnées sphériques de centre O.

➲ Démonstration : Donner l'expression de $\vec{E}$ puis montrer que $\mathcal{C}_{A\overrightarrow{(\Gamma)}B}$ entre A et B, deux points quelconques de l'espace, suivant une courbe (Γ) quelconque entre ces deux points s'écrit :

$$\mathcal{C}_{A\overrightarrow{(\Gamma)}B} = \int_A^B -d\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

DEFINITION :
La circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ entre A *et* B ne dépend pas de la courbe (Γ) suivie mais seulement de A et de B.
On dit que le **champ électrostatique $\vec{E}$** est à **CIRCULATION CONSERVATIVE**.

Rq : On peut donner une nouvelle définition d'une force conservative : force dont le travail entre 2 points ne dépend pas du chemin suivi ⟺ force à circulation conservative.

On introduit le **potentiel électrostatique** créé en M par la charge q placée en O :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

USI : Volt (V)
On a alors :

$$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV \qquad et \qquad \mathcal{C}_{A\to B} = \big(V(A) - V(B)\big) = -\Delta V = u_{AB}$$

La circulation de $\vec{E}$ entre A et B correspond à la **différence de potentiel** (= la tension) u_{AB} entre les points A et B.

Rq :

- *$V(M)$ est, a priori, défini à une constante près. Le choix usuel est de supposer V nul lorsque le point M est infiniment loin de la charge : $lim_{r\to\infty} V(M) = 0$.*
- *Si la courbe(Γ) est fermée (i.e. $A = B$) alors $\mathcal{C}_{(\Gamma)} = 0$.*

3) Généralisation – Expressions du potentiel électrostatique

Grâce au principe de superposition, les propriétés de la circulation obtenues pour une unique charge ponctuelle se généralisent dans le cas où $\vec{E}$ est créé par une distribution discrète de N charges ou par une distribution de charges continue.

- Quelle que soit la distribution de charges (D_q),
  Le **champ électrostatique $\vec{E}$** est à **CIRCULATION CONSERVATIVE** ;
  Si la courbe(Γ) est fermée (i.e. $A = B$) alors $\mathcal{C}_{(\Gamma)} = 0$.
- Avec $V(M)$ le **potentiel électrostatique** créé en M par (D) :

$$\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -dV \qquad et \qquad \mathcal{C}_{A\xrightarrow[(\Gamma)]{}B} = \big(V(A) - V(B)\big) = -\Delta V = u_{AB}$$

Relation différentielle *Relation intégrale*

a) Potentiel créé par une distribution discrète de charges

◆ Potentiel créé en M par une charge q_P placée en P :	$\boldsymbol{V(M) = \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0 PM}}$
◆ Potentiel créé en M par N charges ponctuelles q_i placées aux points P_i :	$\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{P_iM}}$

b) Potentiel créé par une distribution continue de charges

Le potentiel électrostatique créé en un point M par une distribution continue de charges s'écrit :

Distribution volumique	Distribution surfacique	Distribution linéique
$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\epsilon(\mathcal{D})}\frac{\rho(P)d\tau}{PM}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{P\epsilon(\Sigma)}\frac{\sigma(P)dS}{PM}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\epsilon(\mathcal{L})}\frac{\lambda(P)dl}{PM}$

4) Symétries et invariances du potentiel électrostatique

Soit (D_q) une distribution de charges, ρ la densité volumique de charges associée et $V(M)$ le potentiel électrostatique qu'elle crée en un point M de l'espace.

D'après le **principe de Curie** :

Soit (π) un plan, on considère :
P et P' deux points de la distribution de charges, symétriques par rapport au plan (π).
M et M' deux points de l'espace, symétriques par rapport au même plan (π).

- (π) est un **plan de symétrie** de (D_q) si $\boldsymbol{\rho(P) = \rho(P')} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{V(M) = V(M')}$
- (π^*) est un **plan d'antisymétrie** de (D_q) si $\boldsymbol{\rho(P) = -\rho(P')} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{V(M) = -V(M')}$

- Les **invariances** de (D_q) conduisent à la **réduction du nombre de variables spatiales dont dépend le potentiel électrostatique $\boldsymbol{V}$**.

5) Relation locale entre champ et potentiel électrostatiques – Opérateur gradient

Rappel : Soit f une fonction scalaire quelconque des variables spatiales, on a :

$$\boldsymbol{df = \overrightarrow{grad} f . \vec{dl}}$$

On a alors les relations locales entre champ et potentiel électrostatiques :

$$\boldsymbol{\vec{E} . \vec{dl} = -dV \qquad et \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad} V}$$

On retrouve ainsi :

$$\mathcal{C}_{A \to B} = \int_A^B \vec{E} . \vec{dl} = \int_A^B -\overrightarrow{grad} V . \vec{dl} = \int_A^B -dV = V_A - V_B = -\Delta V$$

6) Topographie – Surfaces équipotentielles – Interprétation de l'opérateur gradient

Surface EQUIPOTENTIELLE : ensemble des points M tels que $\boldsymbol{V(M) = constante}$.
Dans le plan de la figure, on représente les sections des surfaces équipotentielles par le plan de la figure : il s'agit de **courbes équipotentielles** ou **EQUIPOTENTIELLES**.

→ Visualisation grâce à Python :
Cf capacité numérique p.19-20.

➲ Exercice classique : analyse topographique

Figure 4.2 (b) : Potentiel créé par une **charge ponctuelle** q
i) Montrer que les surfaces **équipotentielles** sont des **sphères centrées sur la charge**.
ii) Que peut-on dire de la direction et du sens des l.d.c par rapport aux équipotentielles ?

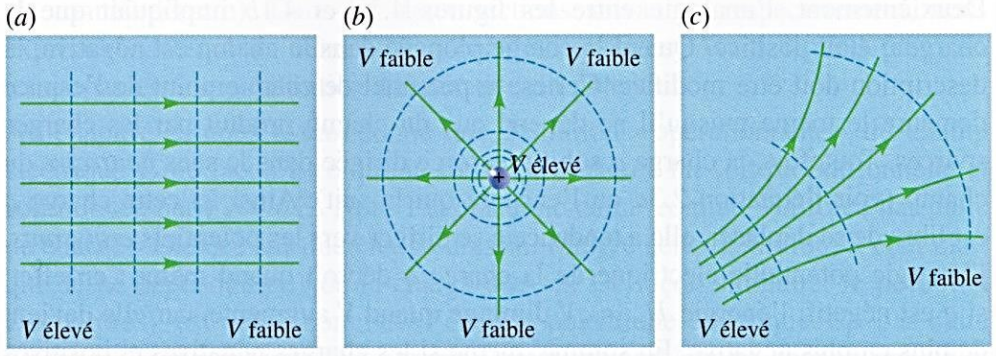


Figure 4.2 ►
Les surfaces équipotentielles relient les points qui ont le même potentiel, c'est-à-dire la même « altitude le long d'une ligne de champ ». Elles sont toujours *perpendiculaires au champ.* (*a*) Dans un champ uniforme, ces équipotentielles sont des plans. (*b*) Dans un champ radial, elles ont la forme de sphères. (*c*) Dans un plan de forme quelconque, elles ont des formes quelconques.

Interprétation de la relation locale entre $\vec{E}$ et V :

$$\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V}$$

Les lignes de champ électrostatique sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.

Les équipotentielles sont en tout point normales aux lignes de champ électrostatique.

7) Energie potentielle électrostatique *(rappels)*

Soit une charge ponctuelle q et $\vec{E}$ le champ électrostatique créé par (D_q) une distribution de charges *extérieure* (i.e. que q ne fait pas partie de (D_q)). Soit V le potentiel électrostatique associé à $\vec{E}$.

La charge subit la force électrostatique : $\overrightarrow{F_{é}} = q.\vec{E}$.

Cette force est conservative, elle dérive de l'énergie potentielle :

$$\boldsymbol{E_p = q.V}$$

➲ Démonstration à connaître : Etablir le résultat ci-dessus.

Rq :

- *Si q se déplace de A à B, quel que soit le chemin suivi, on a :*
$$W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = q.\int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = q.\mathcal{C}_{A\to B} = -q.\Delta V = -q\big(V(B)-V(A)\big) = q.u_{AB}$$
- *On peut exprimer $\overrightarrow{F_{é}}$ en fonction de E_p :*
$$\overrightarrow{F_{é}} = q.\vec{E} = -q.\overrightarrow{grad}V = -\overrightarrow{grad}(qV) = -\overrightarrow{grad}\big(E_p\big)$$
Cette relation entre force et énergie potentielle se généralise à toutes les forces conservatives.

Cas particulier :
Supposons que $\vec{E}$ et V sont créés par une charge ponctuelle q' placée en M', on a : $V(M) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0.M'M}$
On retrouve ainsi l'énergie potentielle d'interaction entre 2 charges ponctuelles :

$$\boldsymbol{E_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0.MM'}}$$

C) Flux du champ électrique – Théorème de Gauss

D'après le § A.4, la détermination du champ électrostatique passe par le calcul d'intégrales multiples, a priori délicat.
Pour une **distribution présentant un haut degré de symétrie**, cf exemples au § C.3, il est possible de **déterminer le champ $\vec{E}$ à l'aide du théorème de Gauss**, cf énoncé au § C.2 et méthode au § C.3.

1) Définition du flux *(rappels)*

Soit $\vec{E}$ un champ électrostatique créé par une distribution de charges (D_q) et soit (S) une surface.

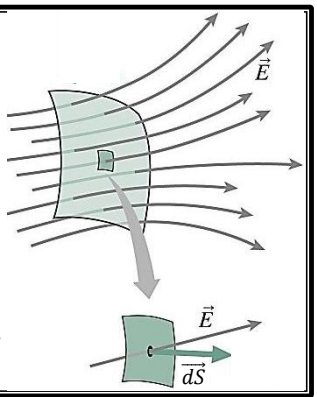
Le **FLUX** de $\vec{E}$ à travers (S) est :

$$\boldsymbol{\Phi_S = \iint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS}}$$

où $\overrightarrow{dS}$ désigne le vecteur surface élémentaire en un point M de (S) :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{dS} = dS.\vec{n}}$$

Avec dS l'aire de la **surface élémentaire** centrée sur M
et $\vec{n}$ le vecteur **unitaire normal** à la surface en M
Pour une surface $(\boldsymbol{S})$ **fermée**, $\vec{n}$ est dirigé **vers l'extérieur de** $(\boldsymbol{S})$.



Rq : Signification du flux : « quantité de champ électrostatique qui passe à travers la surface S ».
En latin, fluxus signifie écoulement, cf § C.4.

2) Enoncé du théorème de Gauss

Soit $\vec{E}$ un champ électrostatique créé par une distribution de charges (D_q) et soit (S) une surface **fermée** i.e. qui délimite un certain volume.

THEOREME DE GAUSS :

$$\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Avec ε_0 la permittivité diélectrique du vide : $\boldsymbol{\varepsilon_0 = 8,9.10^{-12}\ F.m^{-1}}$

et $\boldsymbol{Q_{int}}$ **la charge contenue à l'intérieur de la surface** $(\boldsymbol{S})$.

➲ Analyse dimensionnelle : Vérifier l'homogénéité de cette relation.

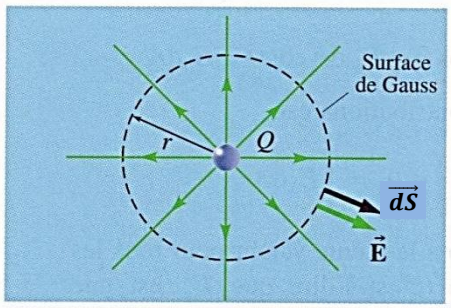
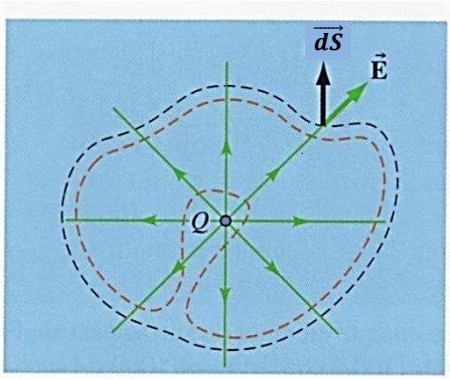


Figure 3.7 ▲
Surface de Gauss sphérique entourant une charge ponctuelle.



◀ **Fig. 3.8**
Surface de Gauss de forme quelconque (en noir) entourant une charge ponctuelle. Le flux traversant cette surface est le même que pour une surface sphérique entourant la charge. On remarque que si la surface de Gauss n'entoure pas la charge (en rouge), le flux total est nul, car toutes les lignes de champ qui entrent dans la surface en ressortent.

Rq :

- *Le flux dépend seulement des charges **intérieures** à (S) alors que le champ $\vec{E}$ est créé par la **totalité** de la distribution de charges.*
- *Le théorème de Gauss sera prouvé dans le chapitre « Equations de Maxwell ».*

3) Applications du théorème de Gauss

Méthode

① **Schéma**(s) du problème.
② Analyse des (anti)-**symétries** de la distribution de charges (D_q).
($\Longrightarrow$ Restriction de l'étude à une partie de l'espace.)
$\Longrightarrow$ Détermination de la **direction** de $\vec{E}$ → *la représenter sur le schéma*.
③ Analyse des **invariances** (translation / rotation) de la distribution de charges (D_q).
$\Longrightarrow$ Détermination des **variables** spatiales dont la (ou les) composante(s) de $\vec{E}$ dépendent.
④ Choix de la « **surface de Gauss** » (S) → à représenter sur le **schéma**.
Critères : Surface **fermée** (elle peut être constituée de plusieurs surfaces) ;
Surface **passant par** $\boldsymbol{M}$ point où l'on veut déterminer $\vec{E}$;
Surface telle que $\vec{E}(M)$ est soit **normal**, soit **colinéaire** à $\vec{n}$ et auquel cas $\vec{E}(M)$ est le plus souvent uniforme sur la surface.
⑤ Calculer le **flux** $\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS}$
⑥ Calculer la **charge intérieure** Q_{int} via la densité locale de charges, cf § A.4.
⑦ Appliquer le **théorème de Gauss** : $\Phi_S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Exemples classiques d'application du théorème de Gauss : A SAVOIR REFAIRE

➲ a) Cas de la **sphère** uniformément chargée en volume.

On considère une sphère $(\mathcal{S})$, uniformément chargée en volume, de centre O et de rayon R. La densité volumique de charges est notée ρ.
i) Exprimer la charge Q de la boule en fonction de ρ et R.
ii) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace. Commenter l'expression de $\vec{E}(M)$ en M situé à l'extérieur de la sphère $(\mathcal{S})$.
iii) Représenter graphiquement la composante radiale du champ $\vec{E}(M)$ en fonction de OM pour $\rho > 0$.

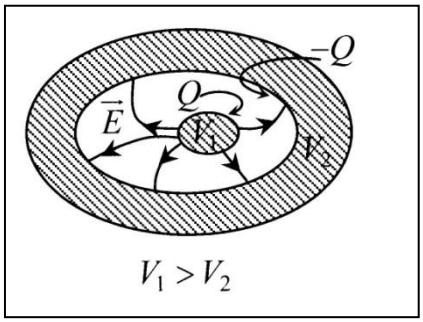
➲ b) Cas du **cylindre** "infini" uniformément chargé en volume.

Un cylindre $(\mathcal{C})$ de rayon R et de longueur infinie est uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charges ρ.
Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace.

➲ c) Cas du **plan** "infini" uniformément chargé en surface.

Soit $(\mathcal{P})$ un plan uniformément chargé en surface avec une densité surfacique de charges σ.
Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M quelconque de l'espace. Commenter.

➲ d) Etude du **condensateur plan** comme la superposition de 2 distribution surfaciques, de charges opposées – Détermination de la capacité du condensateur.

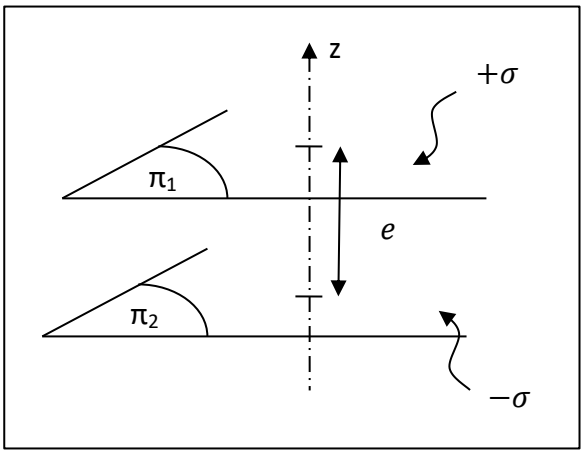


Un condensateur est un système de deux conducteurs séparés par un milieu isolant caractérisé par sa permittivité diélectrique relative ε_r.
Les conducteurs sont chargés en surface :

- l'armature interne porte la charge $+Q$ et est au potentiel V_1 ;
- l'armature externe porte la charge $-Q$ et est au potentiel V_2.

On note $U = V_1 - V_2$ la tension aux bornes du condensateur et on introduit C la capacité du condensateur.

Modèle du condensateur plan :



Lorsque le rayon de courbure des armatures interne et externe du condensateur est grand devant la distance e entre les armatures, on peut adopter le modèle suivant :

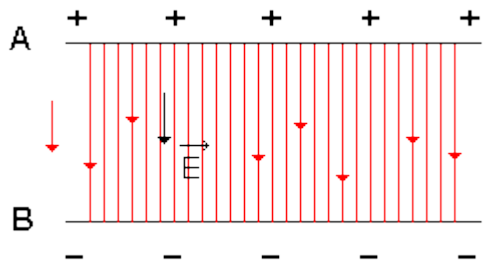
Le condensateur plan est constitué de 2 surfaces planes parallèles distantes de e, de surface S suffisamment grande pour négliger les effets de bords : on considère donc 2 plans infinis (π_1) au potentiel V_1 et (π_2) au potentiel V_2 .
Les charges $\pm Q$ portées par les armatures sont uniformément réparties et on introduit les densités surfaciques $\pm\sigma$.

On suppose dans toute la suite que l'isolant séparant les armatures est le vide (ou l'air).
i) Avec le résultat de l'exercice c, déterminer le champ électrostatique créé par le condensateur plan en tout point de l'espace.
ii) Déterminer la tension U aux bornes des armatures en fonction de e, Q, S et ε_0.

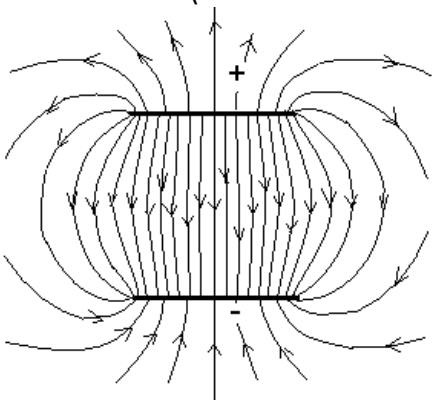
2 démarches possibles : ♦ déterminer le potentiel électrique V pour $z \in]0, e[$ puis en déduire la différence de potentiel U aux bornes des armatures ou ♦ exprimer la tension U avec la circulation du champ $\vec{E}(M)$ le long d'une courbe entre A et B, points situés sur chaque armature.

iii) Rappeler la relation entre la tension U, la charge Q et la capacité C d'un condensateur. En déduire l'expression de la capacité C d'un condensateur plan.

Modèle condensateur plan

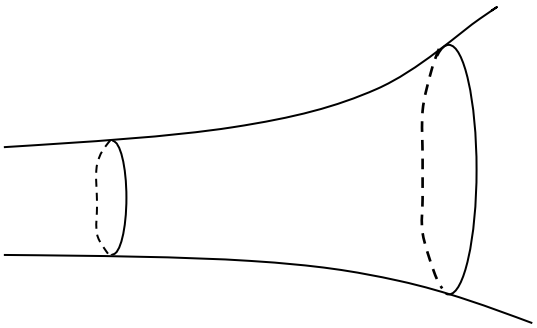


Condensateur réel (armatures non infinies)



Visualisation expérimentale des lignes de champ :
https://www.youtube.com/watch?v=xF3SkaF0-fw

4) Tubes de champ – Conservation du flux



Soit (S) une surface fermée constituée de :

- S_1 et S_2 deux sections quelconques d'un **tube de champ** ;

- S_L la surface latérale du tube comprise entre S_1 et S_2.

On considère le cas où (S) ne contient aucune charge.

➲ Démonstration : En appliquant le théorème de Gauss, montrer que **le flux se conserve à travers toute section d'un tube de champ vide de charge**.

Rq : Le flux s'apparente à la notion de débit pour un fluide en écoulement. On en déduit le résultat indiqué au § A.5.

5) Théorème de Gauss « gravitationnel » : retour sur l'analogie

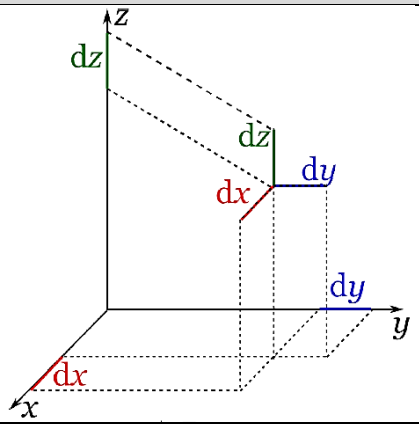
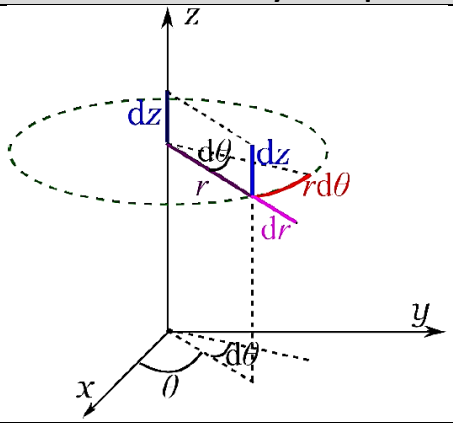
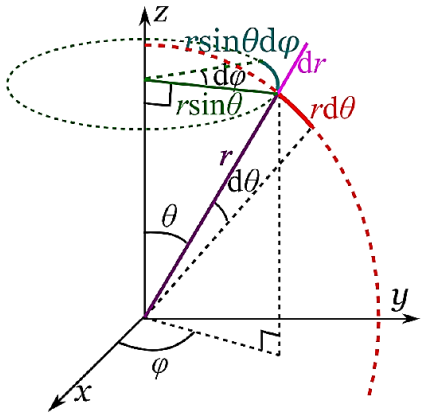
Electrostatique	Gravitation
① Expression de la force d'interaction entre systèmes ponctuels:	
$\overrightarrow{F_{é,\ O\to M}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.q_O.q_M.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$	$\overrightarrow{F_{g,\ O\to M}} = -\mathcal{G}.m_O.m_M.\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
② Constante associée :	
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	
③ Lien entre force et champ électrostatiques / gravitationnels :	
$\overrightarrow{F_{é,\to M}} = q_M.\vec{E}(M)$	$\overrightarrow{F_{g,\to M}} = m_M.\vec{A}(M)$
④ « Source » du champ électrostatique / gravitationnel :	
Distribution de charges	
⑤ Théorème de Gauss :	
$\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$	$\Phi_S = \oiint_{M\in(S)} \vec{A}(M)\cdot\overrightarrow{dS} =$

➲ Exercice classique : Compléter le tableau ci-dessus pour obtenir le théorème de Gauss de la gravitation.

On en déduit que les calculs de champs effectués au § C.3 s'appliquent au cas de la gravitation.
On a notamment calculé le champ électrostatique créé par une sphère uniformément chargée en volume. On obtient donc des résultats analogues pour le champ gravitationnel créé par une planète dont la distribution de masses est à symétrie sphérique :
En particulier **pour $r > R$ (i.e. à l'extérieur de la planète), le champ est identique à celui créé par une source ponctuelle de masse M_{tot} située au centre de la planète**, cf TD.
C'est pour cela qu'en mécanique, il est légitime **d'assimiler les astres à des masses ponctuelles**.

Outils mathématiques : Déplacements, surfaces et volumes élémentaires

(Rappels 1e année)

en coordonnées cartésiennes	en coordonnées cylindriques	en coordonnées sphériques
		
$d^3\tau = dx \cdot dy \cdot dz$	$d^3\tau = dr \cdot rd\theta \cdot dz$	$d^3\tau = dr \cdot rd\theta \cdot rsin(\theta)d\varphi$

Capacité numérique – Tracé de lignes de champ et d'équipotentielles

♦ Structure du code :

① On importe les bibliothèques numpy et matplotlib.pyplot

② On renseigne les paramètres physiques : charge élémentaire, permittivité diélectrique et $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

③ On réalise un **maillage de l'espace** : on indique la taille de la région étudiée, on choisit le nombre de points de discrétisation et on fait appel à la fonction meshgrid de la bibliothèque numpy :

meshgrid(x,y) réalise le quadrillage 2D maillant l'espace en partant de deux listes x et y

④ On définit la distribution discrète de charges source du champ électrostatique : abscisse, ordonnée et valeur de la charge

⑤ On exprime les composantes du champ électrostatique en tout point M du maillage :

$$E_x(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}.\overrightarrow{u_x}}{P_iM^3} \quad ; \quad E_y(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_iM}.\overrightarrow{u_y}}{P_iM^3}$$

On représente les **lignes de champ** avec la fonction streamplot de la bibliothèque matplotlib.pyplot :

streamplot(X,Y,Ex,Ey) trace les lignes du champ (Ex,Ey) sur la région 2D quadrillée

⑥ On exprime le potentiel électrostatique en tout point M du maillage :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{P_iM}$$

On représente les équipotentielles sur la région 2D quadrillée avec la fonction contour de la bibliothèque matplotlib.pyplot :

contour(X,Y,V) trace les équipotentielles V(X,Y) = cste sur la région 2D quadrillée

♦ Résultats :

Figure (a) ldc créé par une unique charge positive

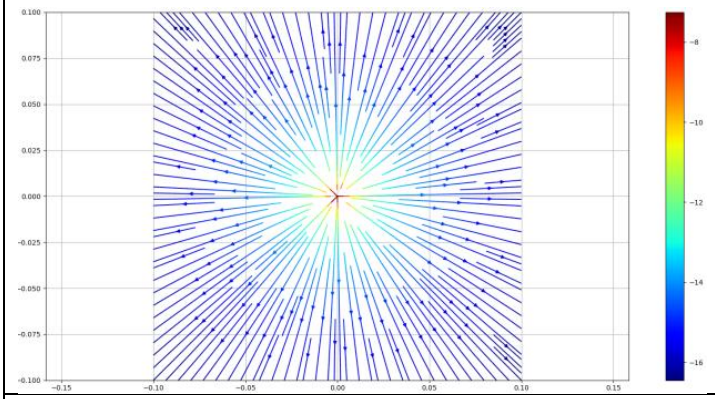


Figure (b) ldc et équipotentielles créées par un dipôle électrostatique

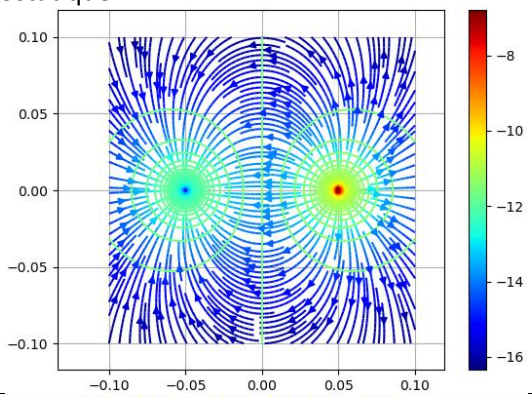
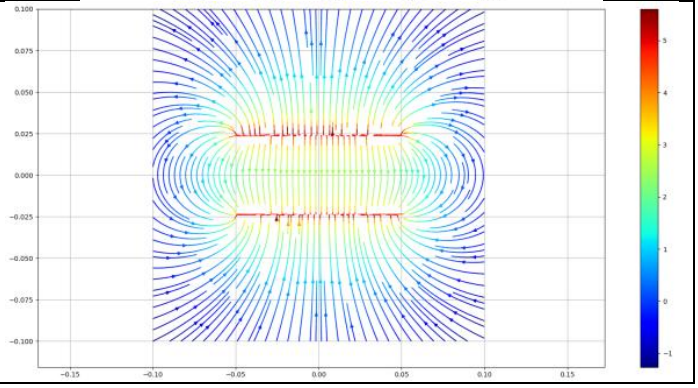


Figure (c) ldc créés par un condensateur plan



♦ Implémentation sous Python pour une unique charge ponctuelle :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## Paramètres du problème en USI
e=1.6e-19 # charge élémentaire
eps0=8.85e-12 # permittivité diélectrique du vide
k=1/(4*np.pi*eps0)

## Maillage de l'espace
n = 100 # Nombre de points de discrétisation selon chaque direction
# 1/2 longueur selon chaque direction en USI
Lx = 0.1
Ly = 0.1
# Listes des xi et des yj
xlist = np.linspace(-Lx,Lx,n)
ylist = np.linspace(-Ly,Ly,n)
# Matrice correspondant au maillage de l'espace 2D
X, Y = np.meshgrid(xlist,ylist)

## Caractéristiques de la charge ponctuelle P source du champ : position selon chaque
direction, valeur de la charge
xP = 0
yP = 0
qP = e

## Expression du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle P
inv_r=1.0/((X-xP)**2+(Y-yP)**2)**(0.5)  # 1/PM avec P le point où se trouve la charge et M
le point où on calcule E et V
Ex=k*qP*(X-xP)*inv_r**3   # composante suivant (Ox) du champ E(M)
Ey=k*qP*(Y-yP)*inv_r**3   # composante suivant (Oy) du champ E(M)
Norme=(Ex**2+Ey**2)**0.5   # norme de champ E(M)

## Expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle P
V=k*qP*inv_r

## Représentations graphiques
plt.streamplot(X,Y, Ex, Ey, color=np.log(Norme), density=2, cmap='jet') # trace les lignes
de champ E(M)
plt.colorbar() # echelle de correspondance couleur-valeur de ln(norme)
plt.contour(X,Y,V,50,cmap='jet') # trace les équipotentielles
plt.axis('equal') # repère normé
plt.grid()
plt.show()
```

♦ Implémentation sous Python pour une distribution discrète de charges :

Cf Cahier de Prépa.