# – Interro n°03 – Sujet A –

**– 27 septembre 2024 –**

## Exercice 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\ \mathrm{d}t$.

Justifier que $I_n$ est bien définie.

## Solution (Exercice 1)

Cf. exercice de la banque CCINP.

## Exercice 2

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.
2. Calculer pour tout $n \geqslant 3$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} r^k$ pour $r \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
3. Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^k$.
4. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}x^2 + x + 1$ en déterminant l'intervalle où la définir.

## Solution (Exercice 2)

1. Au voisinage de $+\infty$,
$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
On note $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

   La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est décroissante et tend vers 0. La série $\sum v_n$ est donc convergente par CSSA.

   De plus, $w_n = u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison, la série $\sum w_n$ diverge aussi et $u_n = v_n + w_n$ est alors le tg d'une série divergente.
2. Pour $r = 1$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} r^k = n - 2$ et pour $r \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} r^k = r^3 \frac{1 - r^{n-2}}{1-r}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

   Comme pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} 2^k = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} 2^{r+1} = 2n3^{n-1}$$

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}x^2 + x + 1$ est continue sur $]\,1\,;+\infty\,[$ et $]\,-\infty\,;1\,[$ et y admet des primitives.

   On note $I$ l'un des deux intervalles. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} + x + 1 = 2(x+1) + \dfrac{1}{x-1}$.
   car $x^2 = x^2 - 1 + 1 = (x-1)(x+1) + 1$.
   On considère $F$ une primitive de $f$ sur $I$, alors pour tout $x \in I$, $F(x) = x^2 + 2x + \ln|x-1|$.

# – Interro n°03 – Sujet B –

**– 27 septembre 2024 –**

## Exercice 1

Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n \mathrm{e}^{-t}}$ est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

### Solution (Exercice 1)

Cf. exercice de la banque CCINP.

## Exercice 2

1. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Calculer pour tout $n \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^k$.
3. Calculer pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} r^k$ pour $r \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.
4. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}x^2 - x + 1$ en déterminant l'intervalle où la définir.

### Solution (Exercice 2)

1. Au voisinage de $+\infty$,
$$\ln\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
On note $u_n = \ln\left(1-\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, $v_n = -\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = u_n - v_n$.

   La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0. La série $\sum v_n$ est donc convergente par CSSA.

   De plus, $w_n = u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Comme la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, par comparaison, la série $\sum w_n$ diverge aussi et $u_n = v_n + w_n$ est alors le tg d'une série divergente.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = (3+1)^n = 4^n$.

   Comme pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} 3^k = n \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} 3^{r+1} = 3n4^{n-1}$$
3. Pour $r=1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} r^k = n-1$ et pour $r \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} r^k = r^2 \frac{1-r^{n-1}}{1-r}$.

4. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}x^2 - x + 1$ est continue sur $]-1\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;-1[$ et y admet des primitives.

   On note $I$ l'un des deux intervalles. Pour tout $x \in I$, on a $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} - x + 1 = \dfrac{1}{x+1}$. car $x^2 = x^2 - 1 + 1 = (x-1)(x+1) + 1$.

   On considère $F$ une primitive de $f$ sur $I$, alors pour tout $x \in I$, $F(x) = \ln|x+1|$.