– Interro n°02 – Sujet A –

– 20 septembre 2024 –

Exercice 1

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

Exercice 2

1. Donner un équivalent de $u_n = \mathrm{e}^{1/n^2} - 1$
2. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$
3. (a) Déterminer l'ensemble où la fonction suivante et dérivable et calculer sa dérivée : $f : x \mapsto \dfrac{2x^3+1}{x^3+3x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

   (b) Déterminer une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

– Interro n°02 – Sujet B –

– 20 septembre 2024 –

Exercice 1

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

Exercice 2

1. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$
2. Donner un équivalent de $u_n = \cos(1/n) - 1$.
3. (a) Déterminer l'ensemble où la fonction suivante et dérivable et calculer sa dérivée : $f : x \mapsto \dfrac{3x^3+2}{x^3+4x}$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
   (b) Déterminer une primitive de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$.