

TDEM2 – Magnétostatique : champ et circulation

Donnée pour l'ensemble des exercices : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

0 Exercices classiques vus en cours :

B.3 : Analyse des invariances et des symétries

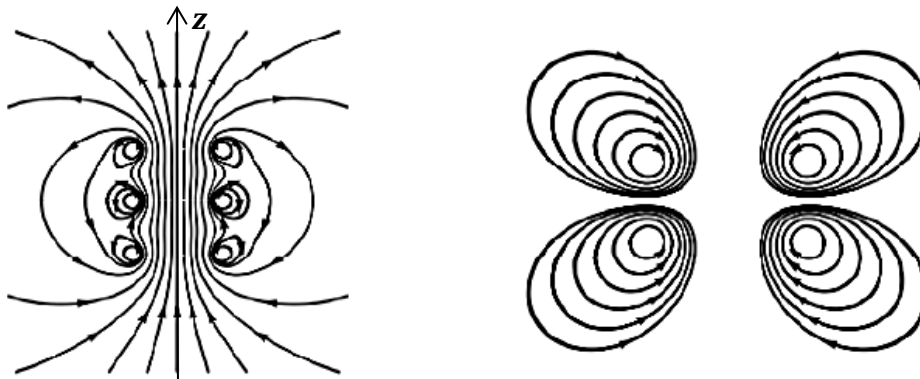
D.2.a : Champ $\vec{B}(M)$ créé par un fil rectiligne infini de section non nulle

D.2.b : Champ $\vec{E}(M)$ créé par un solénoïde infini

Capacités exigibles	Ch EM2	Ex 1	Ex 2	Ex 3-4	Ex 5 à 8
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.	•			•	•
Symétries et invariances des distributions de courant. Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.	•		•	•	•
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère. Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.	•			•	•
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.	•		•	•	•
Lignes de champ, tubes de champ. Orienter les lignes de champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.	•	•	•		

1 Cartes de champ magnétique

Dans les cartes de champ magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant sort-il ou rentre-t-il du plan de la figure ? Où sont les zones de champ uniforme ?



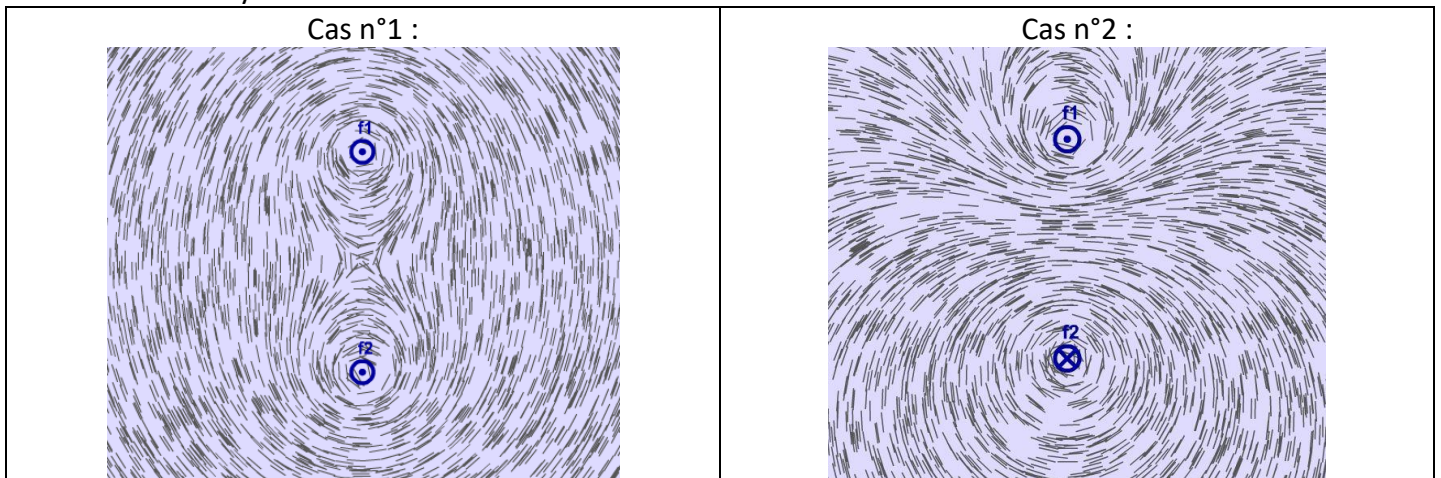
Le champ magnétique de la figure de gauche est généré par une bobine d'axe (Oz) . Justifier que le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace est dans la base cylindrique de la forme :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$$

2 Interaction magnétique – Cartes de champ magnétostatique

On considère un fil rectiligne de section négligeable parcouru par un courant d'intensité i .

- 1) En se plaçant dans l'approximation d'un fil de longueur infinie, déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce fil en un point M quelconque de l'espace et représenter les lignes de champ.
- 2) On place un 2^e fil, parallèle au 1^{er} fil, distant de a du 1^{er} fil et parcouru par un courant d'intensité i' .
 - a) Donner l'expression de la force subie par une portion dl du 2^e fil.
 - b) Pour que l'interaction entre les fils soit attractive, les courants i et i' doivent-ils être dans le même sens ou en sens inverse ?
 - c) On fait en sorte que $|i'| = |i|$, les fils étant distants de $a = 1$ m, calculer l'intensité i nécessaire pour que l'interaction entre les fils soit égale à $2 \cdot 10^{-7}$ N par mètre de fil.
- 3) On s'intéresse maintenant au champ magnétique créé par l'ensemble des deux fils.
Dans le cas n°1, $i' = i$ et dans le cas n°2, $i' = -i$. Vérifier que chaque carte de champ est compatible avec les symétries de la distribution de courants.



3 Cavité cylindrique (d'après oral CMT)

On considère un cylindre infini de rayon a d'axe (Oz) parcouru par un vecteur densité de courant volumique \vec{j} uniforme. On creuse une cavité cylindrique de rayon b et d'axe ($O'z$) où aucun courant ne circule.

- Calculer le champ magnétique en tout point de la cavité.

4 Cylindre parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{e}_z.$$

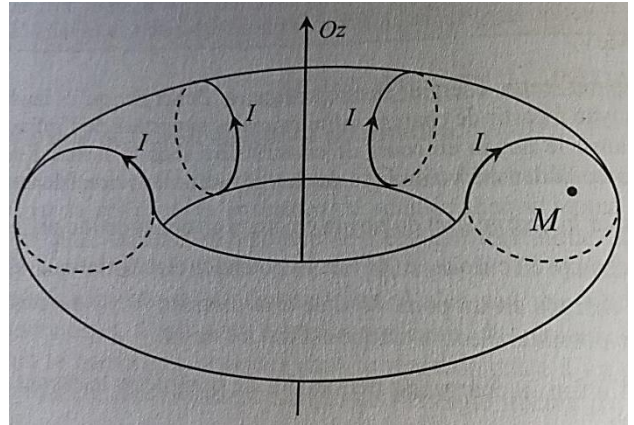
- 1 - Exprimer J_0 en fonction de I .
- 2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.
- 5/2 3 - Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

Donnée : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r B_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$

5 Champ magnétique dans un tokamak

Définition extraite de Wikipédia : Un tokamak est une chambre torique de confinement magnétique destinée à contrôler un plasma pour étudier la possibilité de la production d'énergie par fusion nucléaire.

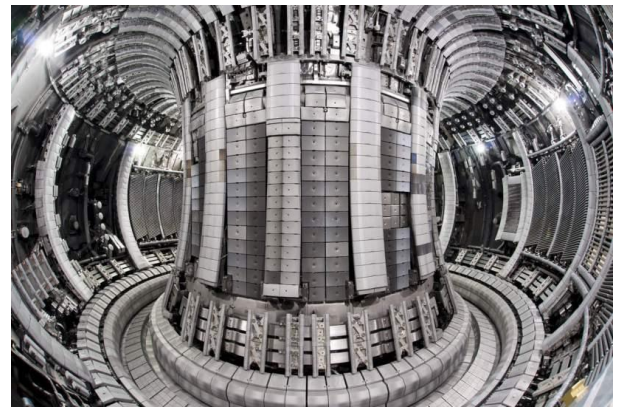
Le champ magnétique principal est créé par une série de bobines supraconductrices constituant un solénoïde en forme de tore. On note N le nombre total de spires, chacune d'elles étant parcourue par le courant I , comme indiqué sur le schéma ci-contre. On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution continue de courant.



1) Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du tokamak. Est-il uniforme ? Que vaut le champ magnétique à l'extérieur ?

Le tokamak JET peut produire au centre du tore, là où est confiné le plasma, un champ magnétique de 4 T. Le rayon intérieur du tokamak vaut 0,9 m et le rayon extérieur 3 m.

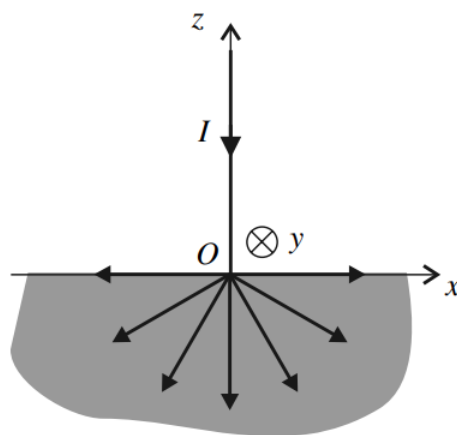
2) Calculer le courant total NI qui doit circuler dans les bobines.



Tokamak JET (Joint European Torus) situé à Culham au Royaume Uni \Rightarrow

6 Champ magnétique créé par un éclair

La distribution de courants ci-dessous modélise le courant d'un éclair tombant verticalement sur le sol.



Un courant d'intensité I descend l'axe (Oz) et se répand de manière isotrope dans le demi-espace $z < 0$. Déterminer la densité volumique de courant en un point du demi-espace $z < 0$ situé à distance r de O . Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

7 Couche parcourue par un courant

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement.

8 Ensemble de deux couches parcourues par un courant (d'après CCS2 MP 2021)

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante.

Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 10). On néglige les effets de bords selon les directions y et z .

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique. Ainsi, on détermine le champ magnétique en considérant que les courants sont stationnaires.

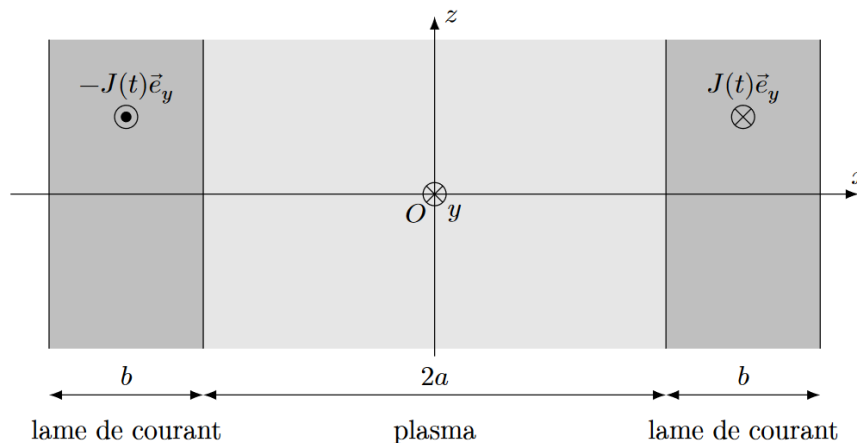


Figure 10

III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

Q 29. Déterminer, en explicitant soigneusement l'argumentation, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma).

Q 30. En déduire le champ magnétique produit dans tout l'espace par l'ensemble des deux lames, sans tenir compte du plasma. Représenter en fonction de x , pour une valeur donnée de $J(t)$ non nulle, le profil de ce champ magnétique.

Révisions MPSI :
Particule chargée dans un champ \vec{E} ou \vec{B} uniforme et permanent
& Action d'un champ magnétique sur un conducteur

9 ✍ **Séparation des isotopes par spectrométrie de masse (d'après CCS TSI 2012)**

Données numériques (à 298 K)

charge élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
masse du neutron	$m_n = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
masses molaires atomiques (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	H : 1 ; C : 12 ; O : 16
constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en ^{235}U de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employé pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons.

Un Calutron est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties (cf **figure 1**) :

- la chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium ^{235}U et ^{238}U de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions U^+ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1 , la vitesse des ions est quasi nulle ;
- la chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2 ;
- la chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme \vec{B} de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions est disposé entre M et N . Une fente centrée sur O_2 de largeur L dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur F est placée entre M et N et a pour largeur L' dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

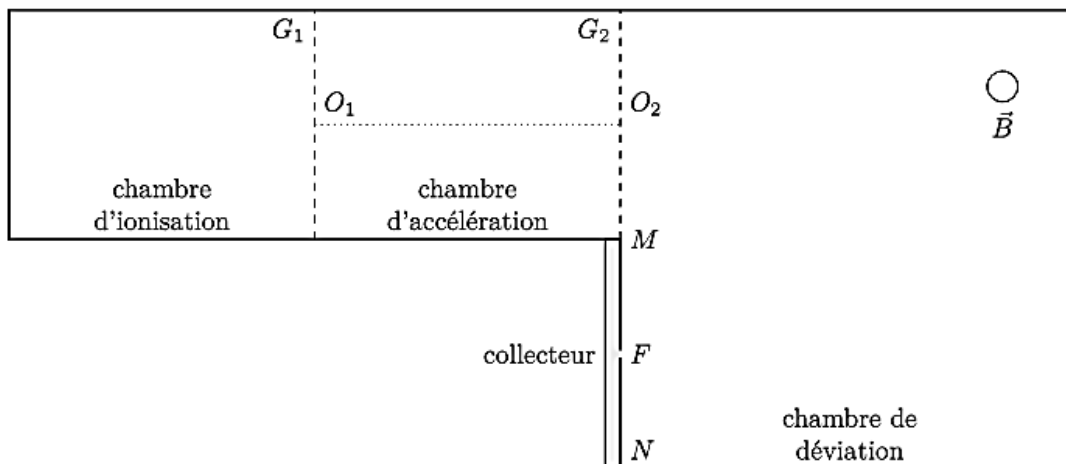


Figure 1

II.A – Accélération des ions

II.A.1) Quel doit être le signe de la différence de potentiel $V_{G1} - V_{G2}$ pour que les ions soient accélérés entre O_1 et O_2 ?

II.A.2) Établir les expressions des vitesses u_1 et u_2 respectivement des ions $^{235}\text{U}^+$ et $^{238}\text{U}^+$ lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1 , m_2 , e et $U = V_{G1} - V_{G2}$.

II.A.3) L'énergie cinétique acquise par les ions en O_2 est de 15,0 keV ; en déduire la valeur de la tension U appliquée entre les deux grilles. Déterminer numériquement les vitesses u_1 et u_2 en respectant les chiffres significatifs.

II.B – Déviation des ions

II.B.1) Quel doit être le sens du champ magnétique \vec{B} régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?

II.B.2) Déterminer la nature de la trajectoire d'un faisceau homocinétique d'ions ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ dans la zone où règne le champ magnétique, exprimer leur rayon de courbure R_1 en fonction de m_1 , e , U et $B = \|\vec{B}\|$. Faire de même pour un faisceau homocinétique d'ions ${}^{238}_{92}\text{U}^+$; on notera R_2 leur rayon de courbure.

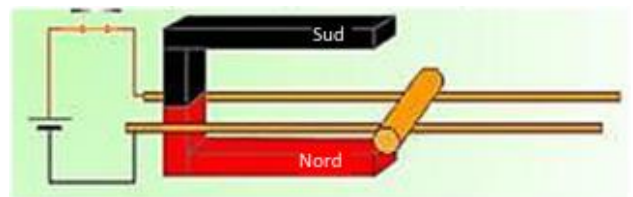
II.B.3) Le collecteur du Calutron consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en F de largeur L' , placée en M et N qui permet de recueillir les isotopes 235. Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le calutron sachant que F est placé à $D = 940$ mm de O_2 .

II.B.4) Le faisceau d'ions émis en O_2 est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de $L' = 4,0$ mm dans la plan de la figure. Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?

II.B.5) L'intensité du faisceau utilisé dans un Calutron est de 100 mA. La source est alimenté en uranium contenant 0,7% de ${}^{235}_{92}\text{U}^+$ et 99,3% de ${}^{238}_{92}\text{U}^+$. Quelle quantité de l'isotope 235 le Calutron peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

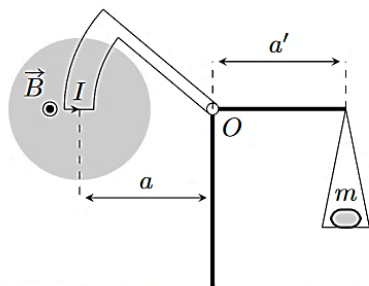
10 Rails de Laplace (moteur)

On place une tige conductrice, de masse m , sur deux rails conducteurs, distants de a , et horizontaux dans l'entrefer d'un aimant en U, cf figure ci-dessous. On fait circuler un courant continu I dans les rails et la tige. On observe alors un déplacement de la tige le long des rails.



- 1) Que peut-on dire du champ magnétique \vec{B} créé par l'aimant en U ? Préciser son sens compte-tenu des pôles de l'aimant.
- 2) Préciser le sens de déplacement de la tige dans la situation considérée.
- 3) Comment peut-on modifier ce sens ? *Vous donnerez deux possibilités.*
- 4) Déterminer, en fonction des données du problème, l'expression de la vitesse de la tige lorsqu'elle s'est déplacée d'une distance $d = 5$ cm. Proposer une application numérique.

11 Balance de Cotton (d'après CCMP PSI 2016)



La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XX^e siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O . La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O , reliés par une portion horizontale de longueur L . Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O . À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m , la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

- 1 - Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
- 2 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.
- 3 - En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B , à exprimer en fonction de a , a' , l , I et de l'intensité de la pesanteur g .

4 - La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0,05$ g, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25$ cm, $L = 5$ cm et $I = 5$ A. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.