TDEM2 – Magnétostatique : champ et circulation

<u>**Donnée pour l'ensemble des exercices**</u> : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ H.m^{-1}$

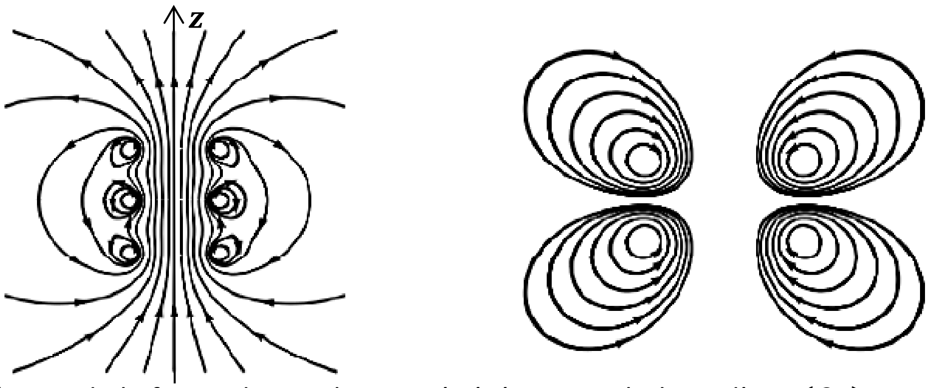
0 Exercices classiques vus en cours :

B.3 : Analyse des invariances et des symétries
D.2.a : Champ $\vec{B}(M)$ créé par un fil rectiligne infini de section non nulle
D.2.b : Champ $\vec{E}(M)$ créé par un solénoïde infini

Capacités exigibles	Ch EM2	Ex 1	Ex 2	Ex 3-5	Ex 6 à 8
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.	•			•	•
Symétries et invariances des distributions de courant. Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.	•	•	•	•	•
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère. Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.	•			•	•
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini. Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.	•		•	•	•
Lignes de champ, tubes de champ. Orienter les lignes de champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.	•	•			

1 ✎ Cartes de champ magnétique

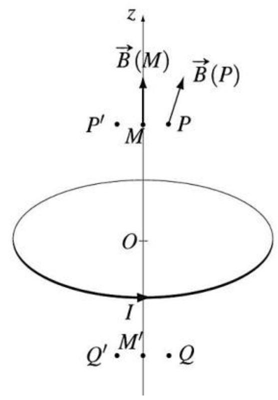
Dans les cartes de champ magnétique suivantes, où le champ est-il le plus intense ? Où sont placées les sources ? Le courant sort-il ou rentre-t-il du plan de la figure ? Où sont les zones de champ uniforme ?



Le champ magnétique de la figure de gauche est généré par une bobine d'axe (Oz). Justifier que le champ magnétique créé en un point M quelconque de l'espace est dans la base cylindrique de la forme :

$$\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{e_r} + B_z(r,z)\vec{e_z}$$

On considère une spire circulaire d'axe (Oz) parcourue par un courant d'intensité I. On donne le champ magnétique en M sur l'axe et en P.



Représenter le champ magnétique en :

1. M', symétrique de M par rapport à la spire
2. P', symétrique de P par rapport à l'axe
3. Q et Q', respectivement symétriques de P et P' par rapport à la spire

2 ✎ Interaction magnétique – Cartes de champ magnétostatique

On considère un fil rectiligne de section négligeable parcouru par un courant d'intensité i.

1) En se plaçant dans l'approximation d'un fil de longueur infinie, déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce fil en un point M quelconque de l'espace et représenter les lignes de champ.
2) On place un 2^{e} fil, parallèle au 1er fil, distant de a du 1er fil et parcouru par un courant d'intensité i'.
   a) Donner l'expression de la force subie par une portion dl du 2^{e} fil.
   b) Pour que l'interaction entre les fils soit attractive, les courants i et i' doivent-ils être dans le même sens ou en sens inverse ?
   c) On fait en sorte que |i'| = |i|, les fils étant distants de a = 1 m, calculer l'intensité i nécessaire pour que l'interaction entre les fils soit égale à 2.10^{-7} N par mètre de fil.

3 ✎ Cavité cylindrique *(d'après oral CMT)*

On considère un cylindre infini de rayon a d'axe (Oz) parcouru par un vecteur densité de courant volumique $\vec{j}$ uniforme. On creuse une cavité cylindrique de rayon b et d'axe (O'z) où aucun courant ne circule.

➲ Calculer le champ magnétique en tout point de la cavité.

4 ✎ Cylindre parcouru par un courant inhomogène

On considère un câble cylindrique de rayon R et d'axe z parcouru par un courant d'intensité I réparti de façon non uniforme au sein du câble,

$$\vec{j}(r) = J_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e}_z\,.$$

1 - Exprimer J_0 en fonction de I.

2 - Calculer le champ magnétostatique créé par ce câble en tout point de l'espace.

5/2 **3 -** Vérifier que le champ trouvé obéit bien à l'équation de Maxwell-Ampère.

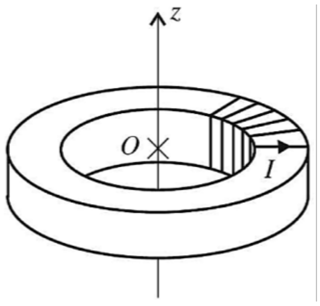
Donnée : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rB_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

5 ✎ Champ magnétique dans un tore

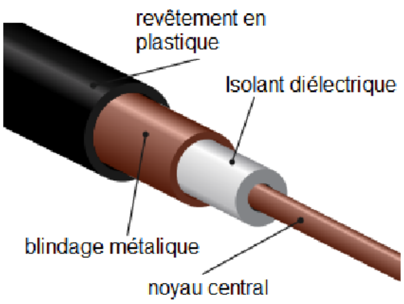
On considère un tore de section carrée de coté a et d'axe (Oz). On réalise une bobine en enroulant un fil sur le tore en N spires très serrées et régulièrement réparties. On fait alors circuler un courant I dans le fil.

1. Etudier les symétries et invariances du problème, en déduire la forme du champ magnétostatique.

2. Calculer le champ magnétique créé en tout point de l'espace par cette bobine.



6 ✎ Champ magnétique créé par un câble coaxial



Les câbles coaxiaux servent à transmettre des signaux basse fréquence. Ils sont utilisés quotidiennement, par exemple dans les installations de télévision domestiques, les émetteurs WiFi, etc. Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs cylindriques de même axe (Oz) : un noyau ou âme, de rayon a, et un blindage, de rayon $b > a$, séparés par un matériau isolant.

L'âme est parcourue par un courant constant I, dirigé selon $+\vec{e}_z$, uniformément réparti en volume. Le blindage, d'épaisseur négligeable, est parcouru par un courant exactement opposé réparti à sa surface. L'isolant étant non magnétique, sa perméabilité est égale à celle du vide μ_0.

1 - Déterminer la densité volumique de courant $\vec{J}$ dans l'âme.

2 - Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace.

7 Couche parcourue par un courant

Entre les deux plans $z = -a$ et $z = +a$ existe un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0 \vec{u}_x$. Calculer le champ magnétique en tout point de l'espace et le représenter graphiquement.

8 Ensemble de deux couches parcourues par un courant *(d'après CCS2 MP 2021)*

On repère un point de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans une base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le plasma est un gaz composé d'ions supposés fixes et d'électrons mobiles. Il est localement neutre dans tout le domaine $-a < x < a$ qu'il occupe et où sa densité électronique n est uniforme et constante.

Le domaine du plasma est délimité par deux lames planes identiques (épaisseur b) qui modélisent le bobinage inducteur haute fréquence. La lame de droite est parcourue par un vecteur densité de courant électrique uniforme $J(t)\vec{e}_y$ et celle de gauche par le vecteur opposé $-J(t)\vec{e}_y$ (figure 10). On néglige les effets de bords selon les directions y et z.

On admet dans toute la suite que les fréquences de travail sont suffisamment faibles pour se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique. Ainsi, on détermine le champ magnétique en considérant que les courants sont stationnaires.

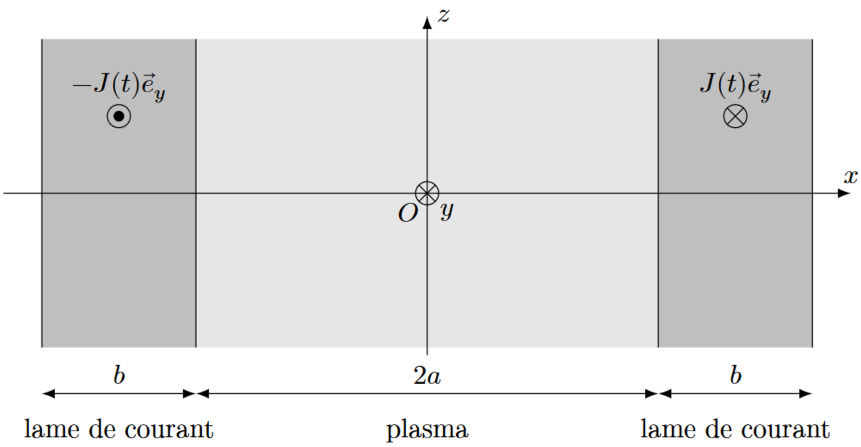


Figure 10

III.B.1) Champ magnétique produit par les lames

Q 29. Déterminer, en explicitant soigneusement l'argumentation, le champ magnétique produit dans tout l'espace uniquement par la lame de gauche (on ne tiendra donc pas compte de l'autre lame et du plasma).

Q 30. En déduire le champ magnétique produit dans tout l'espace par l'ensemble des deux lames, sans tenir compte du plasma. Représenter en fonction de x, pour une valeur donnée de $J(t)$ non nulle, le profil de ce champ magnétique.

9 Effet d'un champ magnétique sur le mouvement d'une particule chargée *(d'après CCINP PSI 2012 et oral CMT)*

B.1 On considère un champ magnétique uniforme de norme B_0 et dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ d'un système d'axes cartésiens. Une particule de masse m, de charge $q > 0$ est émise à l'origine du repère avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{e_x}$ suivant l'axe (Ox).
En négligeant toutes les forces autres que la force de Lorentz, écrire le système d'équations différentielles vérifiées par les composantes (v_x, v_y, v_z) du vecteur vitesse. Montrer que le mouvement est plan. A quoi est homogène la quantité $\frac{qB_0}{m}$? On justifiera à partir des équations déterminées dans cette question. Pour la suite, on posera $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$.

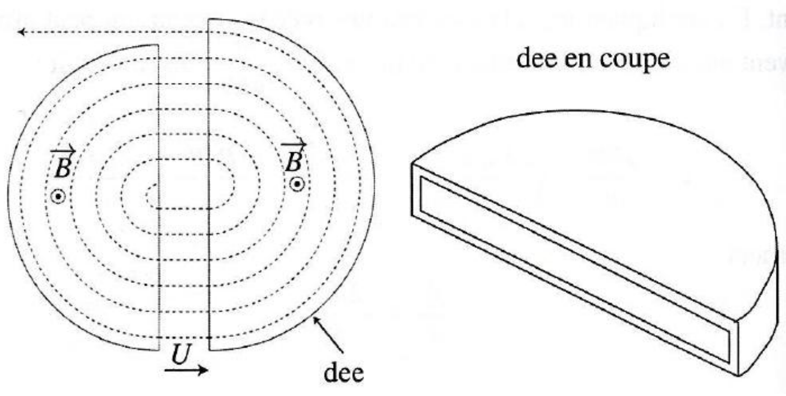
B.2 Pour résoudre le système précédent, on pose $\underline{V} = v_x + j\,v_y$ où $j^2 = -1$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{V}$. La résoudre en tenant compte des conditions initiales.

B.3 On pose maintenant $\underline{R} = x(t) + j\,y(t)$ où $(x(t), y(t))$ sont les coordonnées de la particule dans le plan $z = 0$. Quelle est la relation entre $\underline{V}$ et $\underline{R}$? En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire de la particule. On mettra cette équation sous la forme suivante :
$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = \rho_L^2$ où l'on précisera l'expression des constantes x_C, y_C et ρ_L.

B.4 Pour communiquer une vitesse à une particule chargée, on l'accélère grâce à un champ électrique. Supposons qu'une particule de charge q soit accélérée entre le point A et le point B pour lesquels la différence de potentiel électrique vaut $U_{BA} = V_B - V_A$. Exprimer le gain d'énergie cinétique de la particule en négligeant toute interaction autre que la force électrique.

B.5 Application : cyclotron

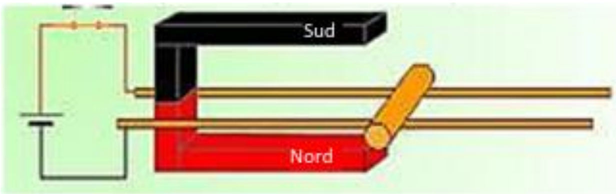
Le cyclotron de l'université de Michigan est constitué de demi-cylindres creux horizontaux, les "dees", de rayons R_D = 2,1 m, au sein desquels règne un champ magnétique vertical $\vec{B}$ d'intensité B = 0,10 T. A l'intérieur des dees règne un vide poussé. Entre ces deux dees, une tension alternative de haute fréquence crée un champ $\vec{E}$ horizontal.



1) Analyser qualitativement la situation.
2) Déterminer la fréquence cyclotron.
3) Déterminer la vitesse maximale pour des protons.
4) Déterminer la différence de potentiel qu'il faudrait pour atteindre une telle vitesse à l'aide d'un seul champ électrique.

Donnée :
Masse du proton : m_p = 1,7.10^{-27} kg

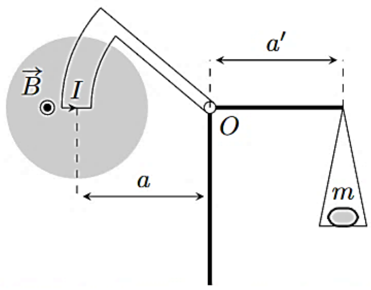
10 ✏ Rails de Laplace (moteur)

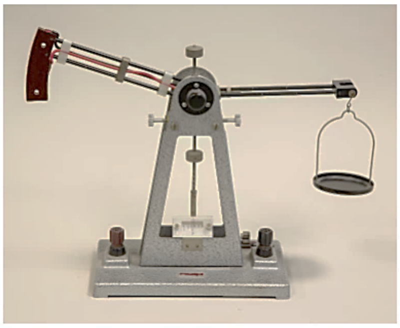


On place une tige conductrice, de masse m, sur deux rails conducteurs, distants de a, et horizontaux dans l'entrefer d'un aimant en U, cf figure ci-dessous. On fait circuler un courant continu I dans les rails et la tige. On observe alors un déplacement de la tige le long des rails.

1) Que peut-on dire du champ magnétique $\vec{B}$ créé par l'aimant en U ? Préciser son sens compte-tenu des pôles de l'aimant.
2) Préciser le sens de déplacement de la tige dans la situation considérée.
3) Comment peut-on modifier ce sens ? *Vous donnerez deux possibilités.*
4) Déterminer, en fonction des données du problème, l'expression de la vitesse de la tige lorsqu'elle s'est déplacée d'une distance d = 5 cm. Proposer une application numérique.

11 Balance de Cotton *(d'après CCMP PSI 2016)*





La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XXe siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O. La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O, reliés par une portion horizontale de longueur L. Le partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O. À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m, la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1 - Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

2 - À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.

3 - En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B, à exprimer en fonction de a, a' , ℓ, I et de l'intensité de la pesanteur g.

4 - La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0{,}05\,\mathrm{g}$, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25\,\mathrm{cm}$, $L = 5\,\mathrm{cm}$ et $I = 5\,\mathrm{A}$. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.