

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition**.

Ex 1 : Le manchot empereur

Au cours de leur évolution, de nombreux systèmes biologiques dans la nature ont développé d'incroyables spécificités pour s'adapter à leur environnement. Ce sujet aborde les facultés d'isolation thermique du manchot empereur avec quelques généralités sur les transferts thermiques en sous-partie II.1, avant le calcul du métabolisme d'un manchot en sous-partie II.2.

Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire U :

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \text{ en coordonnées cylindriques}$$

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \text{ en coordonnées sphériques}$$

- Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$ en coordonnées

$$\text{cartésiennes : } \Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{u}_x + (\Delta a_y) \vec{u}_y + (\Delta a_z) \vec{u}_z \text{ où } \Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$$

- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Source : Gilbert C. *et al.*, Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory, *Journal of Experimental Biology*, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$ lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe (O, \vec{u}_z) , de rayon $R = 10\text{ cm}$, de longueur $\ell = 1,2\text{ m}$, recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur $e_g = 2,0\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_g = 0,20\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur $e_a = 1,0\text{ cm}$ d'air de conductivité thermique $\lambda_a = 0,026\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur $e_p = 2,0\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,035\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance \mathcal{P}_m permettant de maintenir sa température interne T_i constante.

II.1 - Généralités

On considère deux cylindres de même axe (O, \vec{u}_z) , de longueur ℓ et de rayons R_1 et R_2 , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives T_1 et $T_2 < T_1$ (**figure 4**).

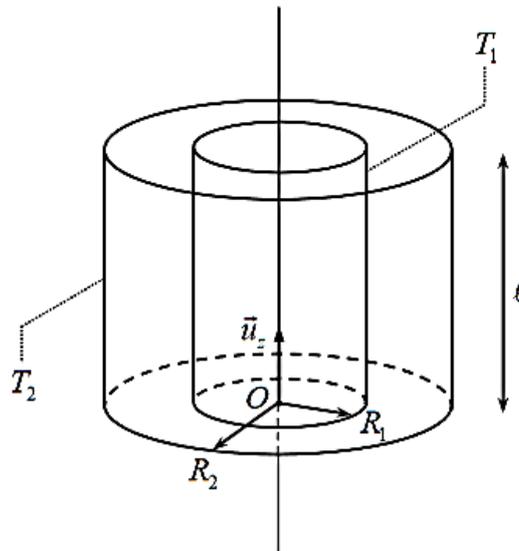


Figure 4 - Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique λ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point M du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, la température y est donc fonction uniquement de la distance ρ à l'axe (O, \vec{u}_z) : $T(M) = T(\rho)$.

Q10. Le vecteur associé au flux thermique Φ_{th} est le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} .

Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

Q11. Justifier que $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$. Justifier physiquement le signe moins.

Q12. Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants t et $t + dt$, pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe (O, \vec{u}_z) , de longueur ℓ , de rayons ρ et $\rho + d\rho$ ($R_1 < \rho < R_2$). En déduire que l'expression du champ de température $T(\rho)$ en tout point M du milieu est : $T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1 / R_2)} \ln(\rho / R_1) + T_1$.

Q13. Définir la résistance thermique R_{th} du milieu. Montrer qu'elle s'écrit : $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

II.2 - Détermination du métabolisme d'un manchot

Q14. Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon R du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

Q15. En régime stationnaire, justifier que le flux thermique Φ_{th} dégagé par un manchot est égal à la puissance \mathcal{P}_m due à son métabolisme.

Q16. Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de **Q13**, donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,1}$ équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de $R_{th,1}$.

Q17. Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température T_p et l'air extérieur à la température T_e sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif : $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$ où h est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire S modélisant le manchot, exprimer en fonction de h et S la résistance thermique $R_{th,cc}$ associée à ce transfert.

Q18.

a) On considère que le manchot et l'atmosphère émettent un rayonnement de corps noirs de températures respectives T_p et T_e et on suppose que le manchot absorbe tout le rayonnement émis par l'atmosphère.

Lorsque $\frac{|T_p - T_e|}{T_e} \ll 1$, montrer que le flux radiatif surfacique perdu par le manchot peut s'écrire : $\varphi_r \approx 4\sigma T_e^3 \cdot (T_p - T_e)$ avec σ la constante de Stefan.

b) Exprimer, en fonction de σ , T_e et S , la résistance thermique R_r associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

Q19. Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique $R_{th,2}$ équivalente à cette association en fonction de σ , T_e , h et S . Calculer la valeur de $R_{th,2}$ lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ\text{C}$ en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit : $h = 5,7 + 3,5\cdot V$ où V est exprimé en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et h en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Q20. Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale $R_{th,tot}$ du manchot en fonction de $R_{th,1}$ et $R_{th,2}$. En déduire la valeur de la puissance \mathcal{P}_m due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne $T_i = 37,7^\circ\text{C}$ dans un environnement à la température $T_e = -17^\circ\text{C}$ et en présence d'un vent de vitesse $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vérifier que la puissance \mathcal{P}_m est de l'ordre de 50 W.

Ex 2 : Cycle de Beau de Rochas

Le bloc moteur correspond à un ensemble de 4 cylindres munis de 4 pistons.

Le mouvement de chaque piston se décompose selon les 4 étapes ou " temps-moteur " (**figure 3**), de durée totale τ , chaque " temps-moteur " ayant pour durée $\tau/4$:

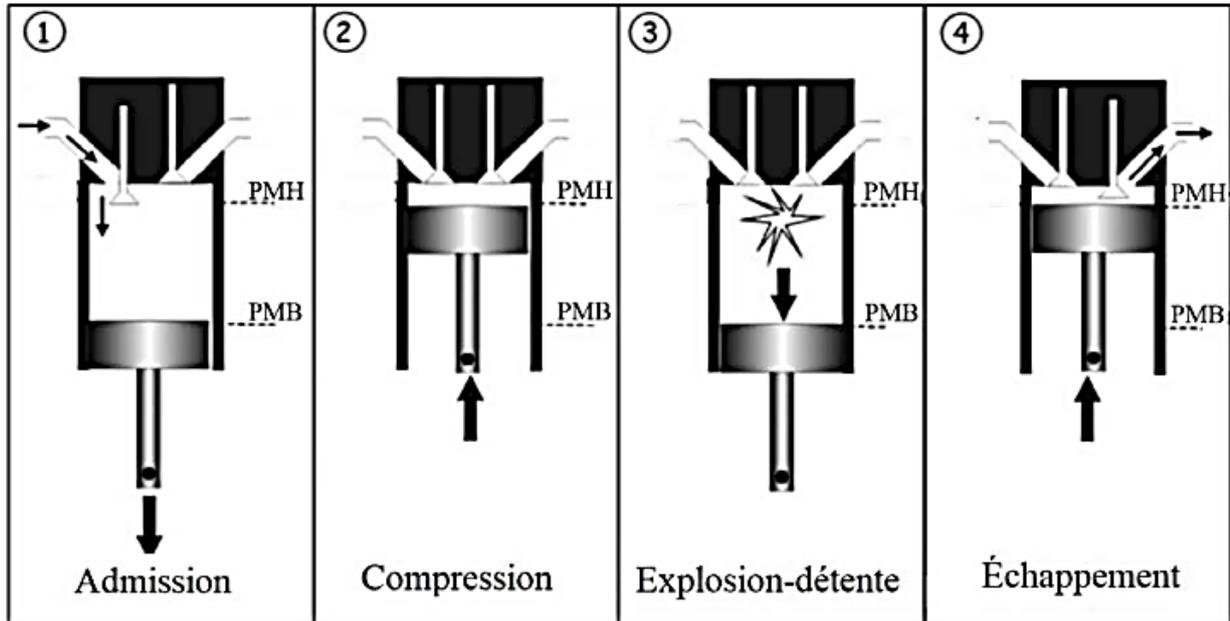


Figure 3 - Les quatre " temps-moteur "

- * **Admission AB** : la soupape d'admission s'ouvre, le piston descend en aspirant un mélange air-carburant. Le débit massique aspiré est constant au cours de cette étape.
- * **Compression BC** : la soupape d'admission se ferme, le piston remonte en comprimant le mélange air-carburant introduit dans le cylindre à l'étape précédente. Cette compression est supposée adiabatique réversible.
- * **Explosion-détente CDE** : une étincelle produit l'inflammation du mélange air-carburant. Le gaz ainsi chauffé de manière isochore (CD), finit par repousser le piston vers le bas (DE). Cette détente est supposée adiabatique réversible.
- * **Échappement EBA** : la soupape d'échappement s'ouvre, la pression chute de manière isochore (EB), puis le piston remonte en évacuant les gaz brûlés (BA).

Le piston évolue entre deux positions extrémales : le point mort haut (PMH) et le point mort bas (PMB), le volume du cylindre valant alors V_{\min} quand le piston se trouve au PMH et V_{\max} quand il est au PMB. $C_1 = V_{\max} - V_{\min}$ définit la cylindrée unitaire et $C = 4 C_1$ la cylindrée du moteur.

Les quatre pistons sont montés sur un vilebrequin, ou arbre à cames, transformant le mouvement de va-et-vient des pistons en mouvement de rotation (**figure 4**). La fréquence de rotation du vilebrequin est notée f_{vilb} .



Figure 4 - Quatre pistons montés sur vilebrequin

Le mélange air-carburant (G) est assimilé à un gaz parfait de composition chimique inchangée malgré la combustion. Sa masse molaire M , ses capacités thermiques massiques à pression et à volume constants c_p et c_v , et son coefficient de Laplace $\gamma = c_p/c_v$ sont supposés indépendants des conditions de température et de pression.

La constante molaire des gaz parfaits vaut $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

La figure 5 donne le cycle de Beau de Rochas en diagramme (P,V) décrit par une quantité donnée de (G) admise dans l'un des quatre cylindres :

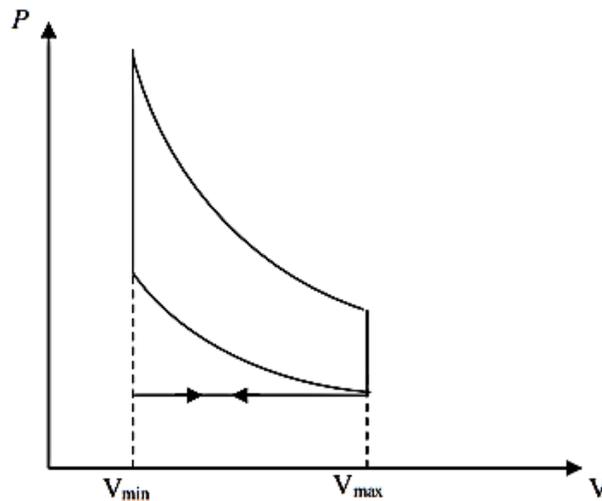


Figure 5 - Le cycle de Beau de Rochas en diagramme (P,V)

- Q14. Recopier la figure 5. La compléter en indiquant le sens de parcours du cycle et les points A, B, C, D et E.
- Q15. Exprimer les rapports T_C/T_B et T_D/T_E en fonction du rapport volumétrique $a = V_{\max}/V_{\min}$.
- Q16. Rappeler la définition du rendement thermodynamique η associé à ce cycle. Exprimer η en fonction des températures T_B , T_C , T_D et T_E , puis en fonction de a et de γ .
Application numérique : calculer η pour $a = 8$ et $\gamma = 1,3$.
- Q17. Quel est le nombre de tours effectués par le vilebrequin au bout des 4 " temps-moteur " ? En déduire τ en fonction de f_{vilb} . Calculer τ pour $f_{\text{vilb}} = 2\,400 \text{ tr/min}$.

Ex 3 : Bobine réelle

On dispose d'une bobine B que l'on assimilera à l'association série d'une inductance L et d'une résistance r . (L et r sont des constantes positives, indépendantes de la fréquence)

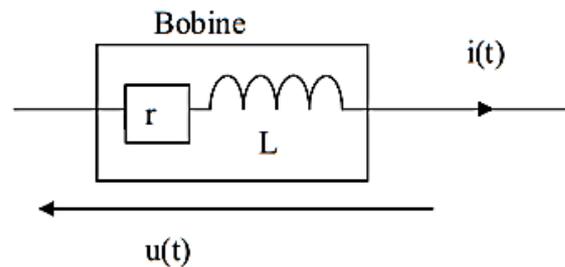


Figure 1

Détermination de r

- 1) La bobine est parcourue par un courant $i(t)$. Exprimer la tension $u(t)$ à ses bornes en fonction de r , L , $i(t)$ et de sa dérivée par rapport au temps.
- 2) On réalise le circuit suivant, en plaçant, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40 \Omega$. L'alimentation est un générateur de tension continue, constante, de force électromotrice $E_0 = 1,0 \text{ V}$ et de résistance interne $r_0 = 2,0 \Omega$.

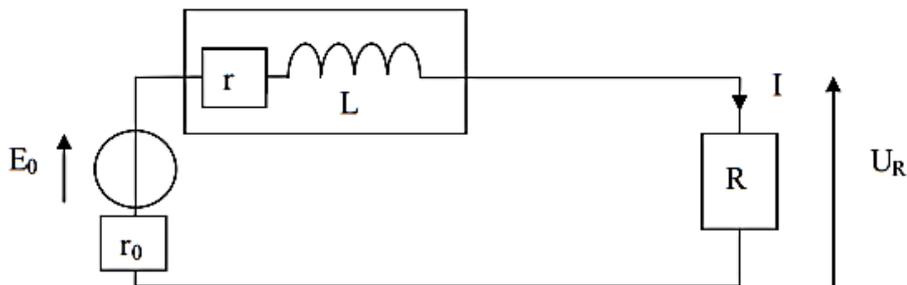


Figure 2

On mesure, en régime permanent, la tension U_R aux bornes de R .
Exprimer r en fonction des données de cette question. Calculer r avec $U_R = 0,56 \text{ V}$.

Détermination de r et L à partir d'un oscillogramme.

On place, en série avec la bobine, un résistor de résistance $R = 40 \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$.

Le GBF (générateur basses fréquences) est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale de fréquence $f = 250 \text{ Hz}$ (la pulsation sera notée ω) et de valeur crête à crête de 10 V .

Deux tensions sont visualisées sur un oscilloscope numérique.

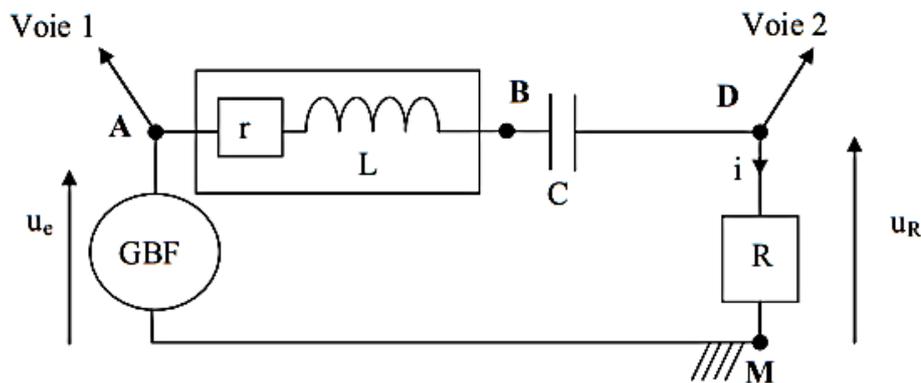


Figure 3

On obtient un oscillogramme équivalent au graphe suivant

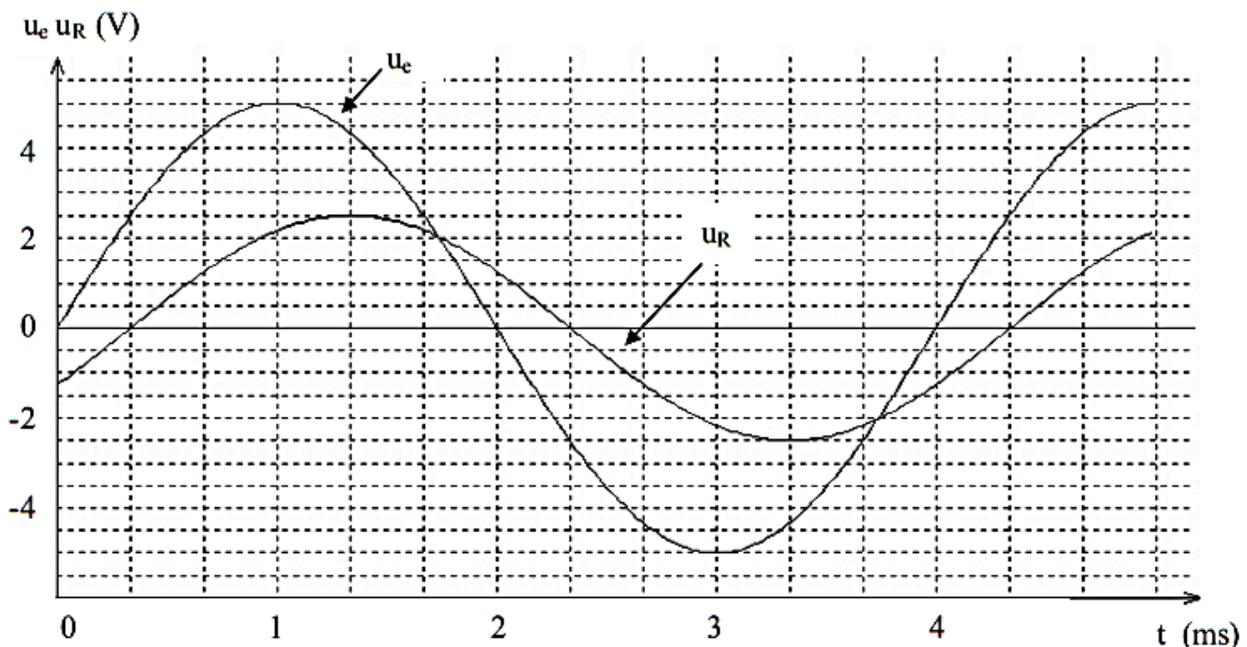


Figure 4

- 3) Déterminer l'amplitude U_e de la tension u_e et l'amplitude U_R de la tension u_R .
- 4) Déterminer l'amplitude I du courant i .
- 5) Rappeler l'expression générale de l'impédance Z d'un dipôle quelconque (module de l'impédance complexe). Calculer alors l'impédance Z_{AM} du dipôle AM .
- 6) Des deux tensions, $u_R(t)$ et $u_e(t)$, laquelle, et pourquoi d'après l'oscillogramme, est en avance sur l'autre ?
- 7) Déterminer précisément, à partir de l'oscillogramme, le déphasage $\varphi_{u_e/i}$ entre u_e et i , (c'est-à-dire entre u_e et u_R).

- 8) Ecrire l'expression générale de l'impédance complexe \underline{Z}_{AM} en fonction de r, R, L, C, ω .
- 9) Ecrire l'expression de l'impédance complexe \underline{Z}_{AM} en fonction de son module Z_{AM} et du déphasage $\varphi_{u_e/i}$.
- 10) Exprimer r en fonction de R, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.
- 11) Exprimer L en fonction de C, ω, Z_{AM} et $\varphi_{u_e/i}$. Calculer sa valeur.

On introduit dans cette partie le facteur de puissance.

Soit un dipôle quelconque orienté en convention récepteur, on note $u(t)$ la tension à ses bornes et $i(t)$ le courant qui le traverse.

On note φ le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé :

$$u(t) = U \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi)$$

- 12) Montrer que la puissance moyenne reçue par le dipôle s'écrit : $\langle P \rangle = \frac{UI}{2} \cos(\varphi)$.

On rappelle que la puissance moyenne est définie par : $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \cdot dt$
avec T la période du signal.

Le facteur $\cos(\varphi)$ qui intervient dans l'expression de la puissance moyenne est appelé **facteur de puissance**.

On reprend le montage de la figure 3 avec $f = 250 \text{ Hz}$.

- 13) On place alors, en parallèle sur AD une boîte de condensateurs à décades (figure 6) et l'on fait varier cette capacité C' jusqu'à ce que, en observant l'oscilloscope, u_R et u_e soient en phase.

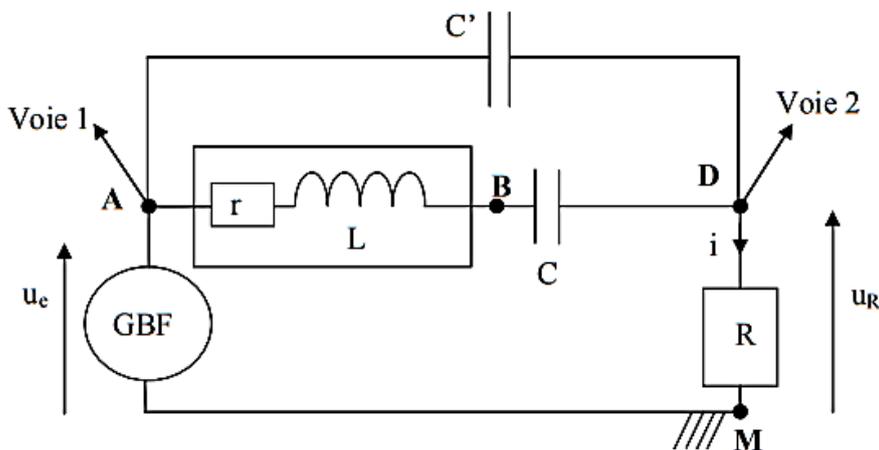


Figure 6

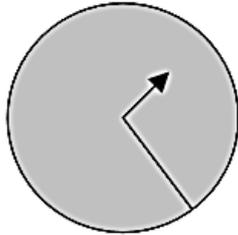
Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AM ?

- 14) Quelle est alors la valeur du facteur de puissance du circuit AD ?
- 15) Quelle particularité présente alors l'admittance complexe \underline{Y}_{AD} du circuit AD ?
- 16) Exprimer \underline{Y}_{AD} en fonction de r, L, C, C' et de la pulsation ω .
- 17) Déterminer C' en fonction de r, L, C, ω . Faire l'application numérique avec les valeurs de r et L calculées précédemment.

Ex 4 : Un modèle globuleux pour l'hydrogène atomique (1902)

Sir Joseph-John Thomson (1856-1940), Nobel 1906

Proton sphérique
uniformément chargé



L'anglais J.J.Thomson proposa de représenter le noyau comme une sphère finie de centre O, de rayon R, chargée avec une densité uniforme de charge volumique ρ . La charge totale de la sphère est celle du noyau : $+e$.

Soit un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et les vecteurs unitaires des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$; $\vec{OM} = r \cdot \vec{u}_r$

I-1 Calcul du champ électrique au point M

I-1-a Exprimer la densité volumique de charge ρ du noyau en fonction de e et R .

I-1-b Donner la direction de \vec{E} au point M en la justifiant.

I-1-c De quelles variables spatiales \vec{E} au point M dépend-il ? Justifier.

I-1-d Déterminer \vec{E} en fonction de ρ , ϵ_0 et \vec{OM} pour un point M à l'intérieur de la sphère.

I-2 Étude du mouvement d'oscillation de l'électron

Dans ce modèle, l'électron n'est soumis qu'à la force d'attraction du noyau dans le repère galiléen lié à ce dernier. L'électron de masse m_e est au point M et reste à l'intérieur du noyau ($r < R$).

I-2-a Démontrer que $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{OM} = \vec{0}$.

Exprimer la fréquence f_0 de cet oscillateur harmonique en fonction uniquement de e , R , ϵ_0 et m_e .

I-2-b La plus petite fréquence observée à l'époque dans le spectre de l'hydrogène atomique était $f_{\min} = 460 \text{ THz} = 460 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$. En déduire une valeur numérique R_{\max} majorant R . C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau.

I-3 Critique du modèle

Quelle est l'estimation actuelle du rayon du noyau d'hydrogène ?

Ce modèle a été rapidement abandonné au profit du modèle planétaire de Bohr suite aux expériences de Rutherford en 1912-1913.

Données

Constantes :

Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Célérité de la lumière :	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Electron Volt :	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,32 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Accélération de pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
Constante de Rydberg pour l'isotope ^1H :	$R_H = 109\,740 \text{ cm}^{-1}$

Masses atomiques

On note m_H et m_D les masses respectives des noyaux de ^1H et ^2H (deutérium)

$m_H = 1,00782 \text{ u}$; $m_D = 2,0141 \text{ u}$; avec u unité de masse atomique

Pour l'électron, $m_e = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ u} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Ex 5 : Coefficient de partage et type de volcanisme

Données :

Fonctions :

- `range(n)` renvoie la séquence des n premiers entiers (de 0 à $n-1$) ;
- `np.sqrt(x)` renvoie \sqrt{x} .

Opérations sur les listes :

- `len(L)` donne le nombre d'éléments de la liste L ;
- `L.append(e)` ajoute l'élément e à la fin de la liste L ;
- `L[i]` renvoie le i -ième élément de la liste L ;
- `sum(L)` renvoie la somme des éléments de la liste L .

Opérations sur les tableaux numpy (`np.array`) :

- `len(A)` : taille du tableau A dans sa première dimension (nombre d'éléments pour un vecteur, nombre de lignes pour une matrice) ;
 - `np.random.normal(a, u_a, N)` renvoie un tableau unidimensionnel de taille N contenant N valeurs aléatoires suivant une loi normale de valeur moyenne a et d'écart-type u_a ;
 - `np.polyfit(L1, L2, 1)` renvoie un tuple contenant la pente et l'ordonnée à l'origine issues d'une modélisation affine des éléments de $L2$ en fonction de ceux de $L1$.
-

Les magmas sont issus de la fusion partielle des roches du manteau, qui conduit à la formation d'un premier magma appelé magma primaire. Celui-ci cristallise par un refroidissement lent dans la chambre magmatique alimentant un volcan (figure 8). Lors de la cristallisation, les éléments chimiques se répartissent entre la phase solide en formation et la phase liquide, selon leur compatibilité avec les réseaux cristallins des solides formés. Ainsi, les minéraux cristallisent graduellement en quittant le liquide magmatique résiduel et modifient localement sa composition chimique : on parle de différenciation du magma par cristallisation fractionnée.

V.A – Loi de Rayleigh

On propose de caractériser ce processus de cristallisation par le modèle suivant : on étudie l'évolution de la masse de liquide lors de l'étape de cristallisation ayant lieu entre t et $t + dt$ (figure 9). On notera $m_L(t)$ la masse de liquide restant à l'instant t . Par ailleurs, on note $m_L^i(t)$ et $m_L^i(t + dt)$ les masses respectives d'élément i dans la phase liquide à t et à $t + dt$ et $m_S^i(t + dt)$ la masse d'élément i dans la masse dm_S de magma solide qui cristallise entre t et $t + dt$.

On note w_L^i et w_S^i les fractions massiques respectives de l'élément dans les phases liquide et solide, exprimées ici en parties par million (ppm) avec $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = 1 \text{ mg} \cdot \text{kg}^{-1}$.

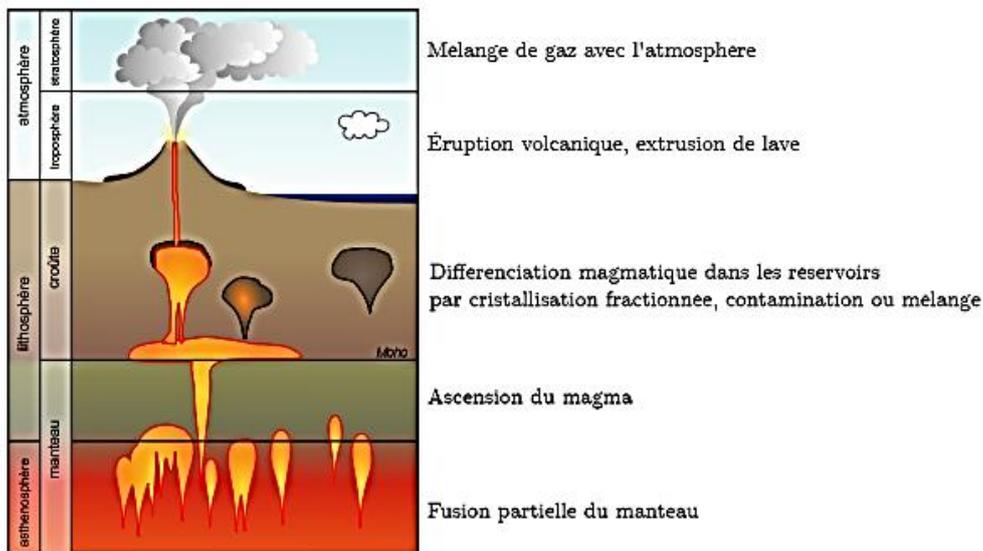


Figure 8 Magnétisme et volcanisme. D'après Wikipédia.

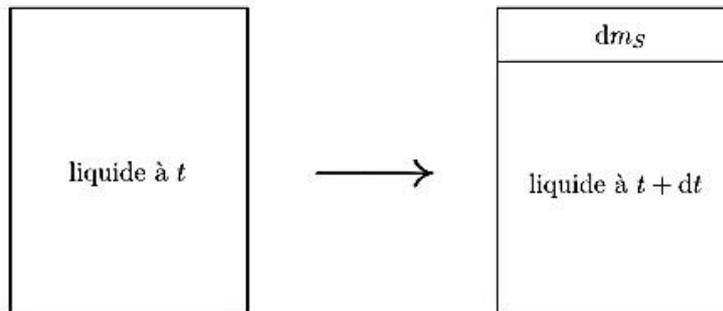


Figure 9 Processus de cristallisation entre t et $t + dt$.

Q 34. Exprimer $m_L^i(t)$, $m_L^i(t + dt)$ et $m_S^i(t + dt)$ en fonction de $w_L^i(t)$, $w_L^i(t + dt)$, $w_S^i(t + dt)$, $m_L(t)$, $m_L(t + dt)$ et dm_S .

On utilise la notion de coefficient de partage solide-liquide de l'élément i , noté D_i , pour caractériser ce transfert de l'élément i de la phase liquide vers la phase solide. Ce coefficient est d'autant plus grand que l'élément a une grande compatibilité avec le réseau cristallin de la phase solide. Il est défini par $D_i = \frac{w_S^i(t + dt)}{w_L^i(t)}$. On le suppose constant sur chaque étape de différenciation considérée.

On note $m_{L,0}$ la masse initiale de liquide magmatique avant différenciation et $f = \frac{m_L}{m_{L,0}}$ le degré de différenciation. La fraction massique initiale de l'élément i dans la phase liquide est notée $w_{L,0}^i$.

Q 35. En traduisant la conservation de la matière totale, puis la conservation de l'élément i entre les instants t et $t + dt$, établir une relation entre D_i , $\frac{dm_L}{m_L}$ et $\frac{dw_L^i}{w_L^i}$. En déduire la loi dite de Rayleigh :

$$w_L^i(t) = \beta f^{D_i - 1}$$

où on exprimera β en fonction des données du problème.

V.B – Validation de l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée

Dans la suite de cette partie, on veut valider l'hypothèse que le magma actif dans la formation des volcans de la Chaîne des Puys, près de Clermont-Ferrand, suit effectivement un processus de cristallisation fractionnée.

Le volcanisme lié à la Chaîne des Puys a débuté il y a environ 100 000 ans et a présenté quatre périodes majeures : entre $-100\,000$ et $-90\,000$ ans ; entre $-75\,000$ et $-70\,000$ ans ; entre $-45\,000$ et $-30\,000$ ans et entre $-13\,500$ et $-9\,000$ ans. On dispose d'un ensemble d'échantillons de roches volcaniques éjectées lors de ces

périodes d'activité, chacune étant donc relative à un stade plus ou moins avancé de différenciation du magma au moment de l'éruption. Le Rubidium (Rb) et le Thorium (Th) sont présents à l'état de traces dans les liquides et les roches magmatiques. Ils se caractérisent par une forte affinité pour le liquide magmatique dans lequel ils forment des structures très stables et, au contraire, sont incompatibles avec la plupart des mailles cristallines. Leurs coefficients globaux de partage dépendent peu de la nature des phases minérales du solide qui cristallise. Il est d'autre part possible de doser la teneur en Rb et Th dans des échantillons de roches. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

$w(\text{Rb})$ en ppm	5,21	6,52	6,81	8,51	12,8	13,5	15,8	17,9	21,3	22,1
$w(\text{Th})$ en ppm	37,5	46,7	47,8	57,1	90,6	90,9	110	130	152	157

Tableau 1 Extrait des données relatives à l'évolution de la fraction massique en Rb en fonction de celle en Th en parties par million (ppm) dans différents produits volcaniques de la Chaîne des Puys. D'après Villemant B., 1985. *La différenciation des séries volcaniques : géochimie des éléments tracés dans les séries du Massif Central et d'Italie centrale*. Thèse de doctorat. Université Paris VI.

On suppose que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire de densité normale avec une incertitude-type sur les fractions massiques de la forme $u(w) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} w$ où $\Delta = 5\%$.

Les produits volcaniques éjectés lors d'une éruption sont représentatifs de la composition du liquide magmatique dont ils sont issus à un moment donné dans l'histoire de la différenciation de ce liquide.

Q 36. Montrer que, pour deux éléments i et j dont les coefficients de partage vérifient $D_i \ll 1$ et $D_j \ll 1$, le rapport w_L^i/w_L^j est constant.

On se propose d'utiliser une procédure Monte-Carlo pour valider l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée. Le code en langage Python correspondant est fourni en annexe 1 ; des informations complémentaires sont précisées dans les données du début de l'exercice.

Q 37. Décrire en quelques lignes le principe d'une simulation Monte-Carlo en faisant le lien avec les variables A , X , a et u_a du code proposé en annexe 1. On commentera en particulier précisément le rôle des lignes 25, 36 et 38.

On obtient après une exécution du code Python de l'annexe 1 dans l'interpréteur l'affichage suivant :

```
La pente a est 0.1386273960033664 d'incertitude-type 0.0049036710758989
L'ordonnée à l'origine b est 0.2983346169365785 ppm d'incertitude-type
0.3494478625397468 ppm
```

On obtient également le graphique de la figure 10 où l'incertitude élargie à 95 % de confiance est donnée par $U = 2u$, u étant l'incertitude-type.

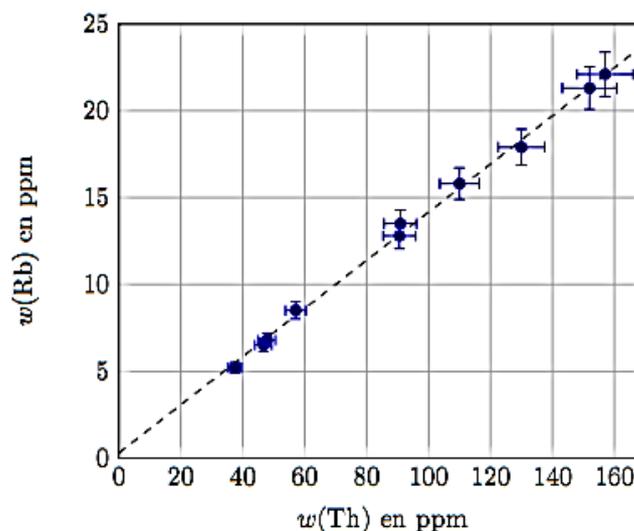


Figure 10 Tracé de $w(\text{Rb})$ en fonction de $w(\text{Th})$ avec des barres d'incertitudes élargies à 95 % de confiance.

Q 38. Expliquer en quoi ce résultat permet de conclure sur la validation de l'hypothèse de processus de cristallisation fractionnée.

Annexe 1 – Code Monte Carlo

```
1  # Importation des bibliothèques
2  import numpy as np # Commandes de calculs numériques
3  import numpy.random as rd # Commandes de générateurs aléatoires
4  import matplotlib.pyplot as plt # Commandes de tracés
5
6  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Rb en ppm
7  Rb = [5.21, 6.52, 6.81, 8.51, 12.8, 13.5, 15.8, 17.9, 21.3, 22.1]
8  # Liste des valeurs des fractions massiques w en Th en ppm
9  Th = [37.5, 46.7, 47.8, 57.1, 90.6, 90.9, 110, 130, 152, 157]
10
11 # Régression linéaire
12 # Calcul de la pente et de l'ordonnée à l'origine
13 # de la droite  $w(\text{Rb}) = a \cdot w(\text{Th}) + b$ 
14 a, b = np.polyfit(Th, Rb, 1)
15
16 # Incertitude-types sur les fractions massiques en Rb et Th
17 u_Rb = [0.05*y/np.sqrt(3) for y in Rb]
18 u_Th = [0.05*x/np.sqrt(3) for x in Th]
19 NbreTirages = 10000
20 A, B = [], []
21 A_carre, B_carre = [], []
22 for j in range(NbreTirages):
23     X = []
24     for i in range(len(Th)):
25         x = rd.normal(Th[i], u_Th[i], 1)[0]
26         X.append(x)
27     Y = []
28     for k in range(len(Rb)):
29         y = rd.normal(Rb[k], u_Rb[k], 1)[0]
30         Y.append(y)
31     a, b = np.polyfit(X, Y, 1)
32     A.append(a)
33     A_carre.append(a**2)
34     B.append(b)
35     B_carre.append(b**2)
36 am = sum(A)/NbreTirages
37 bm = sum(B)/NbreTirages
38 u_a = np.sqrt(sum(A_carre)/NbreTirages-am**2)
39 u_b = np.sqrt(sum(B_carre)/NbreTirages-bm**2)
40
41 # Affichage des résultats de la modélisation
42 print("La pente a est", am, "d'incertitude-type", u_a)
43 print("L'ordonnée à l'origine b est", bm, "ppm d'incertitude-type", u_b, "ppm")
44
45 # Tracé des données avec incertitudes élargies et du modèle affine
46 plt.errorbar(Th, Rb, xerr=2*np.array(u_Th), yerr=2*np.array(u_Rb), capsize=3, fmt="o")
47 plt.plot([0, 170], [bm, am*170+bm], 'k--')
48 plt.axis([0, 170, 0, 25]) # Limites du tracé
49 plt.xlabel("w(Th) en ppm") # Légende des abscisses
50 plt.ylabel("w(Rb) en ppm") # Légende des ordonnées
51 plt.grid() # Grille
52 plt.show() # Affichage
```

-- FIN DE L'ENONCE --