

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

### Ex 1 : Chauffage du bassin d'un centre aqualudique

De nombreuses villes disposent de centres aquatiques permettant la pratique d'activités ludiques ou sportives. La construction ou la rénovation de ces centres aquatiques s'accompagne d'exigences de développement durable d'où, par exemple, le recours à des solutions innovantes de chauffage de l'eau des bassins.

Cette partie étudie le principe du procédé Degrés Bleus® de la société Suez. Ce procédé consiste en la récupération d'une partie de l'énergie thermique des eaux usées (véhiculées dans les collecteurs d'égouts), dont la température peut varier approximativement entre 15 et 23 °C selon le mois de l'année. Un échangeur thermique est ainsi directement placé dans les collecteurs, comme illustré figure 1. Ce système a été mis en place pour la première fois au centre aquatique de Levallois-Perret en 2010.

Le schéma de principe de l'installation est représenté figure 2. Il est constitué de trois modules : l'échangeur thermique placé dans les collecteurs d'eaux usées, la pompe à chaleur (PAC) et le ballon tampon d'eau chaude de 700 L.

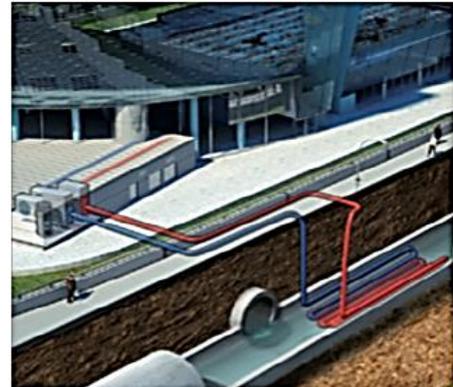


Figure 1

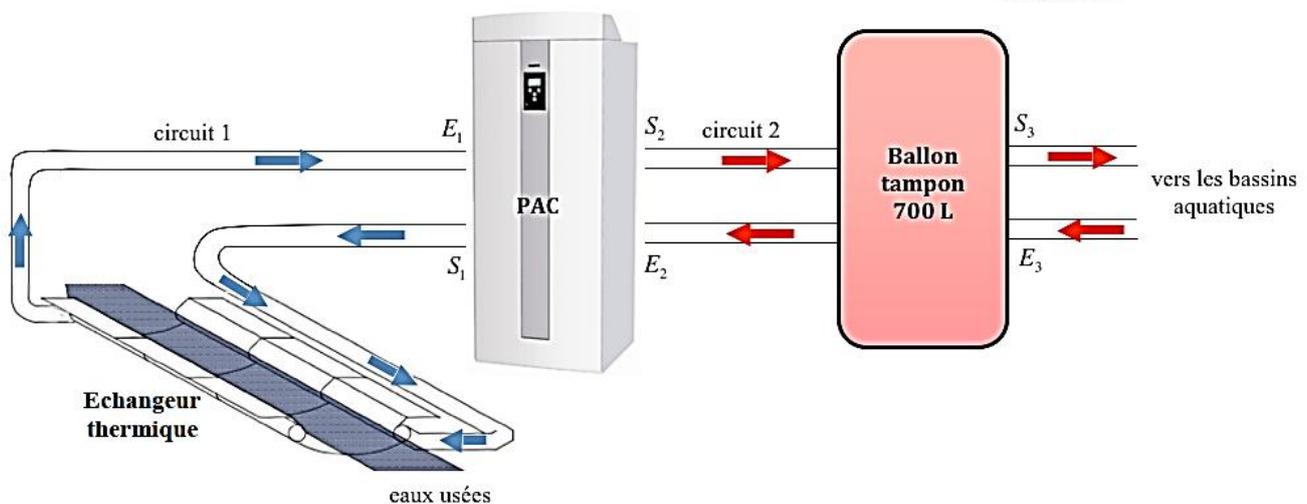


Figure 2

### I.A – Étude d'une pompe à chaleur idéale

Le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur est rappelé figure 3. Le cycle est supposé réversible. Au contact de la source froide de température  $T_f$ , le fluide se vaporise complètement, il est ensuite comprimé par le compresseur et se liquéfie dans le condenseur, au contact de la source chaude de température  $T_c$ . Il est ensuite détendu dans le détendeur.

Par transfert thermique, le fluide reçoit une énergie  $Q_f$  de la part de la source froide et  $Q_c$  de la part de la source chaude. Le fluide reçoit un travail  $W$  de la part du compresseur. Le détendeur est calorifugé et ne présente pas de pièces mobiles.

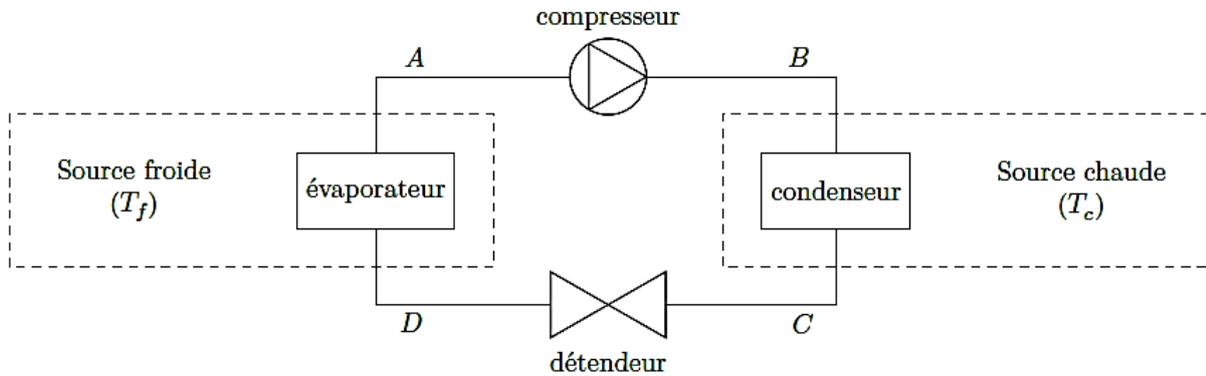


Figure 3

- Q 1. Définir l'efficacité (ou COP pour COefficient de Performance)  $\eta$  de la pompe à chaleur. Préciser le signe des grandeurs algébriques  $Q_f$ ,  $Q_c$  et  $W$ .
- Q 2. Établir l'expression de  $\eta$  en fonction de  $T_f$  et  $T_c$ .
- Q 3. Calculer  $\eta$  pour  $T_f = 13^\circ\text{C}$  et  $T_c = 44^\circ\text{C}$ . Commenter la valeur obtenue.

### I.B – Étude de la pompe à chaleur du centre aquatique

Q 4. Établir le premier principe de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie. On fera intervenir des grandeurs massiques que l'on prendra soin de définir et de positionner sur un schéma illustratif. Les systèmes (ouvert ou fermé) y seront clairement distingués par leurs frontières à deux instants  $t$  et  $t + dt$ . Les travaux des forces de pression d'admission et de refoulement seront clairement explicités.

On néglige dans la suite toute variation d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

La page 12 présente, dans le diagramme des frigoristes, le cycle réversible de la PAC du centre aquatique de Levallois-Perret pour un fonctionnement nominal typique en période froide (janvier-février). Le fluide frigorigène est du tétrafluoroéthane R134a. Les isothermes sont gradués en  $^\circ\text{C}$  ; les isochores sont repérés par  $v =$  en  $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  ; les isentropiques sont marqués avec  $s =$  en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ; les isotitres  $x =$  sont gradués sur l'échelle des abscisses.

La puissance prélevée à la source froide est  $\dot{Q}_f = 60 \text{ kW}$ .

- Q 5. Identifier et justifier la nature des quatre transformations  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 5$ ,  $5 \rightarrow 6$  et  $6 \rightarrow 1$  du cycle.
- Q 6. Quel est l'intérêt de la transformation  $7 \rightarrow 1$  ?
- Q 7. Quel est l'intérêt de la transformation  $4 \rightarrow 5$  ?
- Q 8. Calculer le débit massique  $D_m$  du fluide caloporteur de la pompe à chaleur.
- Q 9. Calculer l'efficacité théorique  $\eta_{th}$  de la pompe à chaleur.
- Q 10. La puissance réellement fournie au compresseur est  $P = 19 \text{ kW}$ . Calculer l'efficacité réelle de la pompe à chaleur et conclure quant au calcul de la question précédente.

## Ex 2 : Oxydation d'un halogénure d'hydrogène

On considère la réaction en phase gazeuse entre l'acide chlorhydrique  $HCl_{(g)}$  et le dioxygène  $O_{2(g)}$  qui donne du dichlore  $Cl_{2(g)}$  et de l'eau.

- 1) Ecrire l'équation bilan de cette réaction avec les nombres stœchiométriques entiers minimaux.
- 2) Déterminer l'enthalpie standard de cette réaction. Commenter.
- 3) Si les conditions opératoires sont réunies pour que l'eau soit produite à l'état liquide, comment l'enthalpie standard de réaction est modifiée ?

**Données :**

Espèces	$H_2O_{(g)}$	$HCl_{(g)}$
$\Delta_f H^\circ (kJ \cdot mol^{-1})$	-241,81	-92,31

$$\Delta_{vap} H^\circ(eau, 100^\circ C) = 44 kJ \cdot mol^{-1}$$

---

## Ex 3 : Le manchot empereur

Au cours de leur évolution, de nombreux systèmes biologiques dans la nature ont développé d'incroyables spécificités pour s'adapter à leur environnement. Ce sujet aborde les facultés d'isolation thermique du manchot empereur avec quelques généralités sur les transferts thermiques en sous-partie II.1, avant le calcul du métabolisme d'un manchot en sous-partie II.2.

### Données

- Opérateur gradient d'un champ scalaire  $U$  :

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \text{ en coordonnées cartésiennes}$$

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \text{ en coordonnées cylindriques}$$

$$- \vec{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \text{ en coordonnées sphériques}$$

- Opérateur laplacien vectoriel d'un champ vectoriel  $\vec{a} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z$  en coordonnées

$$\text{cartésiennes : } \Delta \vec{a} = (\Delta a_x) \vec{u}_x + (\Delta a_y) \vec{u}_y + (\Delta a_z) \vec{u}_z \text{ où } \Delta a_{i=x,y,z} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_i}{\partial z^2}$$

- Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- Constante de Boltzmann :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- Constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
- Intensité de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- Masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Source : Gilbert C. *et al.*, Energy saving processes in huddling emperor penguins : from experiments to theory, *Journal of Experimental Biology*, vol. 211, 2008, p. 1-8.

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de  $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$  lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les  $-200\text{ }^{\circ}\text{C}$  lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

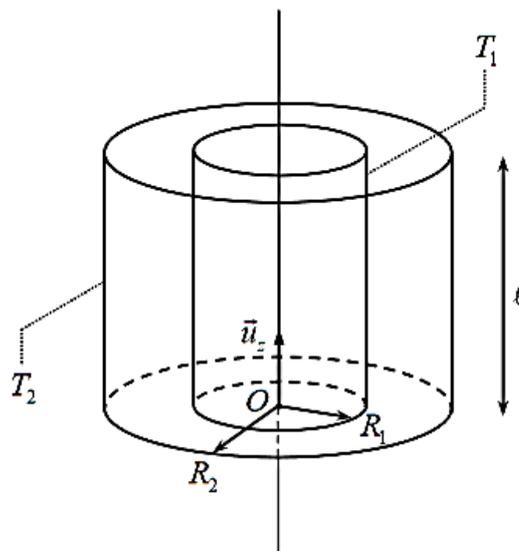
Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de rayon  $R = 10\text{ cm}$ , de longueur  $\ell = 1,2\text{ m}$ , recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur  $e_g = 2,0\text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_g = 0,20\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur  $e_a = 1,0\text{ cm}$  d'air de conductivité thermique  $\lambda_a = 0,026\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur  $e_p = 2,0\text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_p = 0,035\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance  $\mathcal{P}_m$  permettant de maintenir sa température interne  $T_i$  constante.

## II.1 - Généralités

On considère deux cylindres de même axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2 < T_1$  (**figure 4**).



**Figure 4** - Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique  $\lambda$ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point  $M$  du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère  $(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , la température  $y$  est donc fonction uniquement de la distance  $\rho$  à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  :  $T(M) = T(\rho)$ .

**Q10.** Le vecteur associé au flux thermique  $\Phi_{th}$  est le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$ .

Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

**Q11.** Justifier que  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$ . Justifier physiquement le signe moins.

**Q12.** Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants  $t$  et  $t+dt$ , pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$ , de rayons  $\rho$  et  $\rho+d\rho$  ( $R_1 < \rho < R_2$ ). En déduire que l'expression du champ de température  $T(\rho)$  en tout point  $M$  du milieu est :  $T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1 / R_2)} \ln(\rho / R_1) + T_1$ .

**Q13.** Définir la résistance thermique  $R_{th}$  du milieu. Montrer qu'elle s'écrit :  $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

## II.2 - Détermination du métabolisme d'un manchot

**Q14.** Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon  $R$  du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

**Q15.** En régime stationnaire, justifier que le flux thermique  $\Phi_{th}$  dégagé par un manchot est égal à la puissance  $\mathcal{P}_m$  due à son métabolisme.

**Q16.** Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot ? Justifier. À partir du résultat de **Q13**, donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,1}$  équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de  $R_{th,1}$ .

**Q17.** Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température  $T_p$  et l'air extérieur à la température  $T_e$  sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif :  $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$  où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire  $S$  modélisant le manchot, exprimer en fonction de  $h$  et  $S$  la résistance thermique  $R_{th,cc}$  associée à ce transfert.

**Q18.** En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives  $T_p$  et  $T_e$  très proches, on admet que le flux radiatif surfacique  $\phi_r$  émis par le manchot, s'écrit :  $\phi_r \cong 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$  où  $\sigma$  est la constante de Stefan.

Exprimer, en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$  et  $S$ , la résistance thermique  $R_r$  associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

**Q19.** Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs ? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,2}$  équivalente à cette association en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$ ,  $h$  et  $S$ . Calculer la valeur de  $R_{th,2}$  lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit :  $h = 5,7 + 3,5\cdot V$  où  $V$  est exprimé en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $h$  en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

**Q20.** Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale  $R_{th,tot}$  du manchot en fonction de  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$ . En déduire la valeur de la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne  $T_i = 37,7^\circ\text{C}$  dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  et en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Vérifier que la puissance  $\mathcal{P}_m$  est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de  $-17^\circ\text{C}$  et un vent moyen de  $5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Le tableau suivant rassemble leurs observations (**tableau 1**).

	Isolé	Petits groupes	Grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

**Tableau 1** - Puissance due au métabolisme dans trois groupes de manchots différents

**Q21.** À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

## Ex 4 : Coefficient de partage et type de volcanisme

---

### Données :

Fonctions :

- `range(n)` renvoie la séquence des  $n$  premiers entiers (de 0 à  $n-1$ ) ;
- `np.sqrt(x)` renvoie  $\sqrt{x}$ .

Opérations sur les listes :

- `len(L)` donne le nombre d'éléments de la liste  $L$  ;
- `L.append(e)` ajoute l'élément  $e$  à la fin de la liste  $L$  ;
- `L[i]` renvoie le  $i$ -ième élément de la liste  $L$  ;
- `sum(L)` renvoie la somme des éléments de la liste  $L$ .

Opérations sur les tableaux numpy (`np.array`) :

- `len(A)` : taille du tableau  $A$  dans sa première dimension (nombre d'éléments pour un vecteur, nombre de lignes pour une matrice) ;
  - `np.random.normal(a, u_a, N)` renvoie un tableau unidimensionnel de taille  $N$  contenant  $N$  valeurs aléatoires suivant une loi normale de valeur moyenne  $a$  et d'écart-type  $u_a$  ;
  - `np.polyfit(L1, L2, 1)` renvoie un tuple contenant la pente et l'ordonnée à l'origine issues d'une modélisation affine des éléments de  $L2$  en fonction de ceux de  $L1$ .
- 

Les magmas sont issus de la fusion partielle des roches du manteau, qui conduit à la formation d'un premier magma appelé magma primaire. Celui-ci cristallise par un refroidissement lent dans la chambre magmatique alimentant un volcan (figure 8). Lors de la cristallisation, les éléments chimiques se répartissent entre la phase solide en formation et la phase liquide, selon leur compatibilité avec les réseaux cristallins des solides formés. Ainsi, les minéraux cristallisent graduellement en quittant le liquide magmatique résiduel et modifient localement sa composition chimique : on parle de différenciation du magma par cristallisation fractionnée.

### V.A – Loi de Rayleigh

On propose de caractériser ce processus de cristallisation par le modèle suivant : on étudie l'évolution de la masse de liquide lors de l'étape de cristallisation ayant lieu entre  $t$  et  $t + dt$  (figure 9). On notera  $m_L(t)$  la masse de liquide restant à l'instant  $t$ . Par ailleurs, on note  $m_L^i(t)$  et  $m_L^i(t + dt)$  les masses respectives d'élément  $i$  dans la phase liquide à  $t$  et à  $t + dt$  et  $m_S^i(t + dt)$  la masse d'élément  $i$  dans la masse  $dm_S$  de magma solide qui cristallise entre  $t$  et  $t + dt$ .

On note  $w_L^i$  et  $w_S^i$  les fractions massiques respectives de l'élément dans les phases liquide et solide, exprimées ici en parties par million (ppm) avec  $1 \text{ ppm} = 10^{-6} = 1 \text{ mg} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

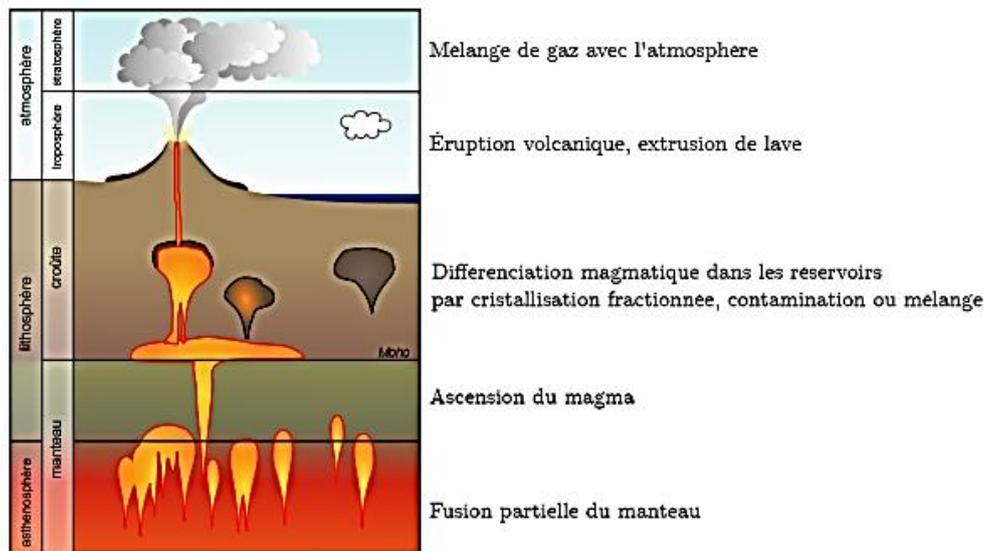


Figure 8 Magnétisme et volcanisme. D'après Wikipédia.

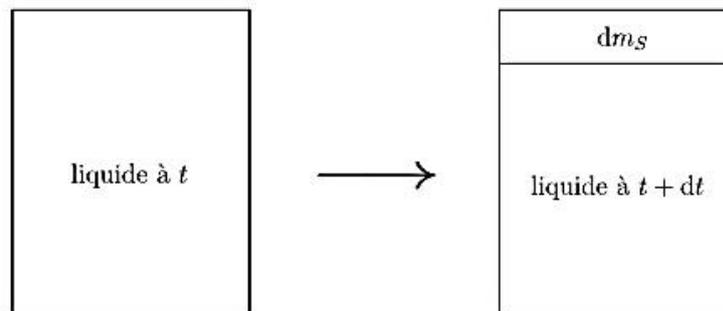


Figure 9 Processus de cristallisation entre  $t$  et  $t + dt$ .

Q 34. Exprimer  $m_L^i(t)$ ,  $m_L^i(t + dt)$  et  $m_S^i(t + dt)$  en fonction de  $w_L^i(t)$ ,  $w_L^i(t + dt)$ ,  $w_S^i(t + dt)$ ,  $m_L(t)$ ,  $m_L(t + dt)$  et  $dm_S$ .

On utilise la notion de coefficient de partage solide-liquide de l'élément  $i$ , noté  $D_i$ , pour caractériser ce transfert de l'élément  $i$  de la phase liquide vers la phase solide. Ce coefficient est d'autant plus grand que l'élément a une grande compatibilité avec le réseau cristallin de la phase solide. Il est défini par  $D_i = \frac{w_S^i(t + dt)}{w_L^i(t)}$ . On le suppose constant sur chaque étape de différenciation considérée.

On note  $m_{L,0}$  la masse initiale de liquide magmatique avant différenciation et  $f = \frac{m_L}{m_{L,0}}$  le degré de différenciation. La fraction massique initiale de l'élément  $i$  dans la phase liquide est notée  $w_{L,0}^i$ .

Q 35. En traduisant la conservation de la matière totale, puis la conservation de l'élément  $i$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , établir une relation entre  $D_i$ ,  $\frac{dm_L}{m_L}$  et  $\frac{dw_L^i}{w_L^i}$ . En déduire la loi dite de Rayleigh :

$$w_L^i(t) = \beta f^{D_i - 1}$$

où on exprimera  $\beta$  en fonction des données du problème.

### V.B – Validation de l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée

Dans la suite de cette partie, on veut valider l'hypothèse que le magma actif dans la formation des volcans de la Chaîne des Puys, près de Clermont-Ferrand, suit effectivement un processus de cristallisation fractionnée.

Le volcanisme lié à la Chaîne des Puys a débuté il y a environ 100 000 ans et a présenté quatre périodes majeures : entre  $-100\,000$  et  $-90\,000$  ans ; entre  $-75\,000$  et  $-70\,000$  ans ; entre  $-45\,000$  et  $-30\,000$  ans et entre  $-13\,500$  et  $-9\,000$  ans. On dispose d'un ensemble d'échantillons de roches volcaniques éjectées lors de ces

périodes d'activité, chacune étant donc relative à un stade plus ou moins avancé de différenciation du magma au moment de l'éruption. Le Rubidium (Rb) et le Thorium (Th) sont présents à l'état de traces dans les liquides et les roches magmatiques. Ils se caractérisent par une forte affinité pour le liquide magmatique dans lequel ils forment des structures très stables et, au contraire, sont incompatibles avec la plupart des mailles cristallines. Leurs coefficients globaux de partage dépendent peu de la nature des phases minérales du solide qui cristallise. Il est d'autre part possible de doser la teneur en Rb et Th dans des échantillons de roches. Les résultats sont présentés dans le tableau 1.

$w(\text{Rb})$ en ppm	5,21	6,52	6,81	8,51	12,8	13,5	15,8	17,9	21,3	22,1
$w(\text{Th})$ en ppm	37,5	46,7	47,8	57,1	90,6	90,9	110	130	152	157

**Tableau 1** Extrait des données relatives à l'évolution de la fraction massique en Rb en fonction de celle en Th en parties par million (ppm) dans différents produits volcaniques de la Chaîne des Puys. D'après Villemant B., 1985. *La différenciation des séries volcaniques : géochimie des éléments tracés dans les séries du Massif Central et d'Italie centrale*. Thèse de doctorat. Université Paris VI.

On suppose que le résultat de mesure est bien décrit par une variable aléatoire de densité normale avec une incertitude-type sur les fractions massiques de la forme  $u(w) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} w$  où  $\Delta = 5\%$ .

Les produits volcaniques éjectés lors d'une éruption sont représentatifs de la composition du liquide magmatique dont ils sont issus à un moment donné dans l'histoire de la différenciation de ce liquide.

**Q 36.** Montrer que, pour deux éléments  $i$  et  $j$  dont les coefficients de partage vérifient  $D_i \ll 1$  et  $D_j \ll 1$ , le rapport  $w_L^i/w_L^j$  est constant.

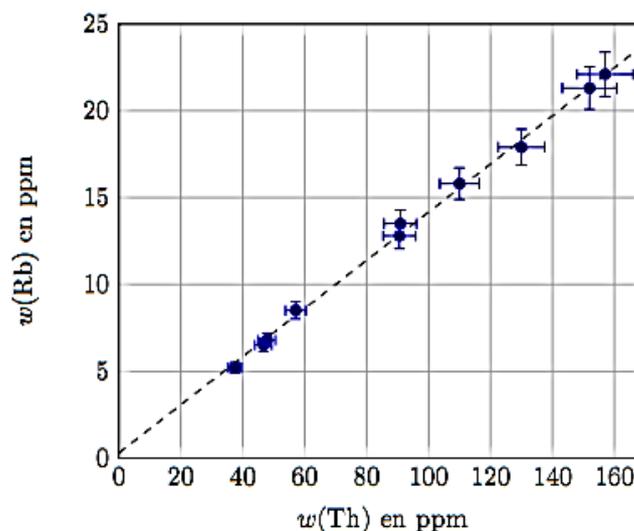
On se propose d'utiliser une procédure Monte-Carlo pour valider l'hypothèse d'un processus de cristallisation fractionnée. Le code en langage Python correspondant est fourni en annexe 1 ; des informations complémentaires sont précisées dans les données du début de l'exercice.

**Q 37.** Décrire en quelques lignes le principe d'une simulation Monte-Carlo en faisant le lien avec les variables  $A$ ,  $X$ ,  $a$  et  $u_a$  du code proposé en annexe 1. On commentera en particulier précisément le rôle des lignes 25, 36 et 38.

On obtient après une exécution du code Python de l'annexe 1 dans l'interpréteur l'affichage suivant :

```
La pente a est 0.1386273960033664 d'incertitude-type 0.0049036710758989
L'ordonnée à l'origine b est 0.2983346169365785 ppm d'incertitude-type
0.3494478625397468 ppm
```

On obtient également le graphique de la figure 10 où l'incertitude élargie à 95 % de confiance est donnée par  $U = 2u$ ,  $u$  étant l'incertitude-type.



**Figure 10** Tracé de  $w(\text{Rb})$  en fonction de  $w(\text{Th})$  avec des barres d'incertitudes élargies à 95 % de confiance.

**Q 38.** Expliquer en quoi ce résultat permet de conclure sur la validation de l'hypothèse de processus de cristallisation fractionnée.

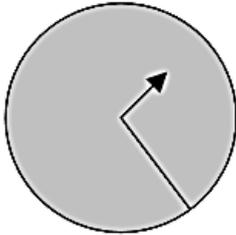
## Annexe 1 – Code Monte Carlo

```
1 # Importation des bibliothèques
2 import numpy as np # Commandes de calculs numériques
3 import numpy.random as rd # Commandes de générateurs aléatoires
4 import matplotlib.pyplot as plt # Commandes de tracés
5
6 # Liste des valeurs des fractions massiques w en Rb en ppm
7 Rb = [5.21, 6.52, 6.81, 8.51, 12.8, 13.5, 15.8, 17.9, 21.3, 22.1]
8 # Liste des valeurs des fractions massiques w en Th en ppm
9 Th = [37.5, 46.7, 47.8, 57.1, 90.6, 90.9, 110, 130, 152, 157]
10
11 # Régression linéaire
12 # Calcul de la pente et de l'ordonnée à l'origine
13 # de la droite  $w(\text{Rb}) = a \cdot w(\text{Th}) + b$ 
14 a, b = np.polyfit(Th, Rb, 1)
15
16 # Incertitude-types sur les fractions massiques en Rb et Th
17 u_Rb = [0.05*y/np.sqrt(3) for y in Rb]
18 u_Th = [0.05*x/np.sqrt(3) for x in Th]
19 NbreTirages = 10000
20 A, B = [], []
21 A_carre, B_carre = [], []
22 for j in range(NbreTirages):
23     X = []
24     for i in range(len(Th)):
25         x = rd.normal(Th[i], u_Th[i], 1)[0]
26         X.append(x)
27     Y = []
28     for k in range(len(Rb)):
29         y = rd.normal(Rb[k], u_Rb[k], 1)[0]
30         Y.append(y)
31     a, b = np.polyfit(X, Y, 1)
32     A.append(a)
33     A_carre.append(a**2)
34     B.append(b)
35     B_carre.append(b**2)
36 am = sum(A)/NbreTirages
37 bm = sum(B)/NbreTirages
38 u_a = np.sqrt(sum(A_carre)/NbreTirages-am**2)
39 u_b = np.sqrt(sum(B_carre)/NbreTirages-bm**2)
40
41 # Affichage des résultats de la modélisation
42 print("La pente a est", am, "d'incertitude-type", u_a)
43 print("L'ordonnée à l'origine b est", bm, "ppm d'incertitude-type", u_b, "ppm")
44
45 # Tracé des données avec incertitudes élargies et du modèle affine
46 plt.errorbar(Th, Rb, xerr=2*np.array(u_Th), yerr=2*np.array(u_Rb), capsize=3, fmt="o")
47 plt.plot([0, 170], [bm, am*170+bm], 'k--')
48 plt.axis([0, 170, 0, 25]) # Limites du tracé
49 plt.xlabel("w(Th) en ppm") # Légende des abscisses
50 plt.ylabel("w(Rb) en ppm") # Légende des ordonnées
51 plt.grid() # Grille
52 plt.show() # Affichage
```

## Ex 5 : Un modèle globuleux pour l'hydrogène atomique (1902)

Sir Joseph-John Thomson (1856-1940), Nobel 1906

Proton sphérique  
uniformément chargé



L'anglais J.J.Thomson proposa de représenter le noyau comme une sphère finie de centre O, de rayon R, chargée avec une densité uniforme de charge volumique  $\rho$ . La charge totale de la sphère est celle du noyau :  $+e$ .

Soit un point M de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  et les vecteurs unitaires des coordonnées sphériques  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  ;  $\vec{OM} = r \cdot \vec{u}_r$

### I-1 Calcul du champ électrique au point M

I-1-a Exprimer la densité volumique de charge  $\rho$  du noyau en fonction de  $e$  et  $R$ .

I-1-b Donner la direction de  $\vec{E}$  au point M en la justifiant.

I-1-c De quelles variables spatiales  $\vec{E}$  au point M dépend-il ? Justifier.

I-1-d Déterminer  $\vec{E}$  en fonction de  $\rho$ ,  $\epsilon_0$  et  $\vec{OM}$  pour un point M à l'intérieur de la sphère.

### I-2 Étude du mouvement d'oscillation de l'électron

Dans ce modèle, l'électron n'est soumis qu'à la force d'attraction du noyau dans le repère galiléen lié à ce dernier. L'électron de masse  $m_e$  est au point M et reste à l'intérieur du noyau ( $r < R$ ).

I-2-a Démontrer que  $\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \vec{OM} = \vec{0}$ .

Exprimer la fréquence  $f_0$  de cet oscillateur harmonique en fonction uniquement de  $e$ ,  $R$ ,  $\epsilon_0$  et  $m_e$ .

I-2-b La plus petite fréquence observée à l'époque dans le spectre de l'hydrogène atomique était  $f_{\min} = 460 \text{ THz} = 460 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ . En déduire une valeur numérique  $R_{\max}$  majorant  $R$ . C'est l'ordre de grandeur du rayon du noyau.

### I-3 Critique du modèle

Quelle est l'estimation actuelle du rayon du noyau d'hydrogène ?

Ce modèle a été rapidement abandonné au profit du modèle planétaire de Bohr suite aux expériences de Rutherford en 1912-1913.

## Données

### Constantes :

Permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Célérité de la lumière :	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Planck :	$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Nombre d'Avogadro :	$N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Electron Volt :	$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Constante des gaz parfaits :	$R = 8,32 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Accélération de pesanteur :	$g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$
Constante de Rydberg pour l'isotope $^1\text{H}$ :	$R_H = 109\,740 \text{ cm}^{-1}$

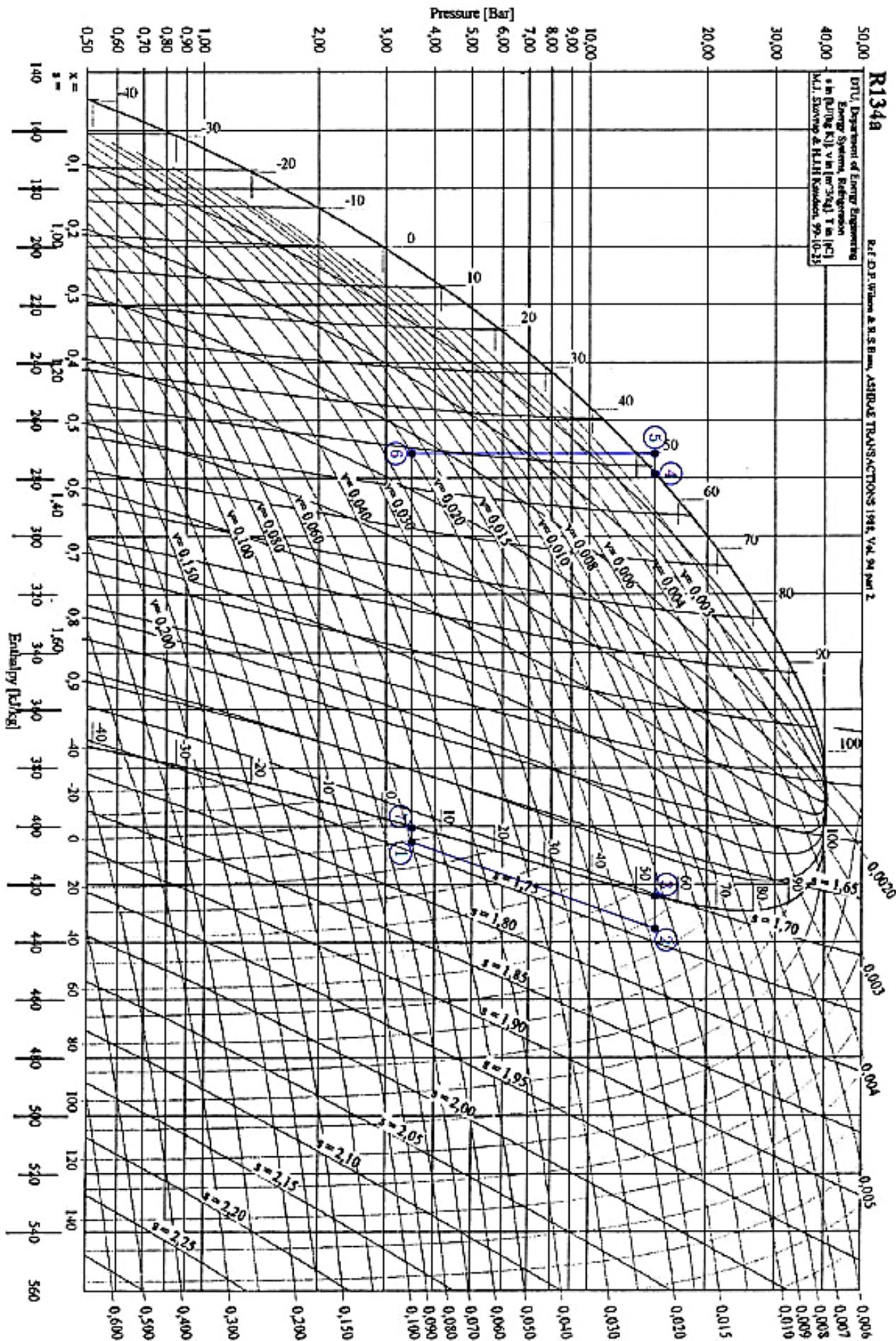
Masses atomiques

On note  $m_H$  et  $m_D$  les masses respectives des noyaux de  $^1\text{H}$  et  $^2\text{H}$  (deutérium)

$m_H = 1,00782 \text{ u}$  ;  $m_D = 2,0141 \text{ u}$  ; avec u unité de masse atomique

Pour l'électron,  $m_e = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ u} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Diagramme des frigorigères (Ex 1) :



-- FIN DE L'ENONCE --