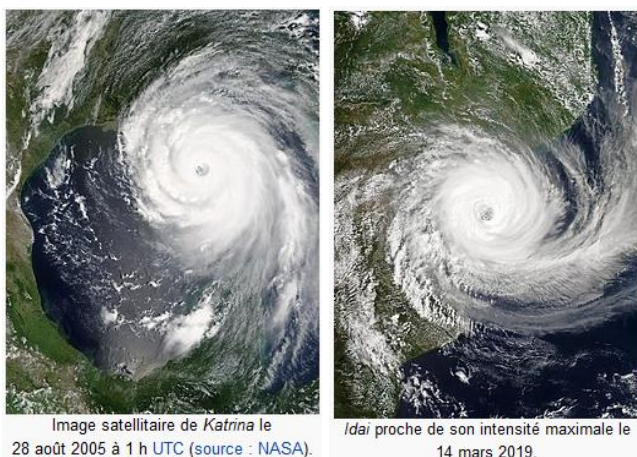


Chapitre M1. Dynamique du point en référentiel non galiléen



Images satellitaires des cyclones Katrina et Idai.
 Katrina a touché le sud-est des Etats-Unis (hémisphère nord) en 2005 et Idai le sud-est du continent Africain (hémisphère sud) en 2019.
 On constate que le sens de rotation des masses d'air est différent : il s'agit d'une manifestation du caractère non galiléen du référentiel terrestre qu'on peut interpréter comme l'effet d'une pseudo-force : la force d'inertie de Coriolis.

INTRO :

Ce chapitre complète la partie « Mécanique » étudiée en 1^{re} année. Contrairement au **temps** qui est **considéré absolu** en mécanique classique, le **mouvement est relatif** i.e. qu'il dépend du référentiel d'étude. En 1^{re} année, les systèmes ont été étudiés dans un référentiel galiléen. Cependant, dans certains cas, il est plus judicieux de travailler dans un **référentiel non galiléen** pour étudier le mouvement.

Buts de ce chapitre : Etablir les lois de composition des vitesses et des accélérations ; Enoncer les lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen ; Décrire les forces d'inertie et citer des manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre.

Prérequis :

1^{re} année : Cinématique et dynamique du point.

Plan du chapitre :

A) Cinématique.....	2
1) Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre – Translation, rotation (<i>rappels</i>).....	2
2) Mouvements absolu et relatif	3
3) Formule de dérivation vectorielle – Formule de Bour.....	4
4) Loi de composition des vitesses	5
5) Loi de composition des accélérations.....	6
B) Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen	8
1) Principe d'invariance galiléenne.....	8
2) LQM / PFD dans un référentiel non galiléen – Forces d'inertie	8
3) Autres lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen, <i>déduites du PFD</i>	10
4) Méthode d'application.....	11
C) Caractère galiléen approché des référentiels usuels.....	12
1) Référentiels usuels (<i>rappels</i>)	12
2) Caractère galiléen approché du référentiel géocentrique	13
3) Caractère galiléen approché du référentiel terrestre.....	13
Annexe 1 – Loi de composition des accélérations dans le cas général	15
Annexe 2 – Exemple pour illustrer la notion de point coïncident.....	16

A) Cinématique

1) Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre – Translation, rotation (rappels)

Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels de repères respectifs $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$.

On appelle \mathcal{R} le référentiel **absolu** et \mathcal{R}' est en mouvement par rapport à \mathcal{R} , il est appelé référentiel **relatif**. Un référentiel est lié à un solide de référence. Le mouvement d'un solide est caractérisé par son vecteur rotation et la vitesse de l'un de ses points.

Le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est donc décrit par :

- $\vec{v}(O')_R$: vitesse de O' , origine de \mathcal{R}' , dans \mathcal{R}
- $\vec{\Omega}_{R'/R}$: vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}

♦ $\vec{v}(O')_R$ caractérise un mouvement de **translation** de \mathcal{R}'/\mathcal{R} :

DEFINITION :

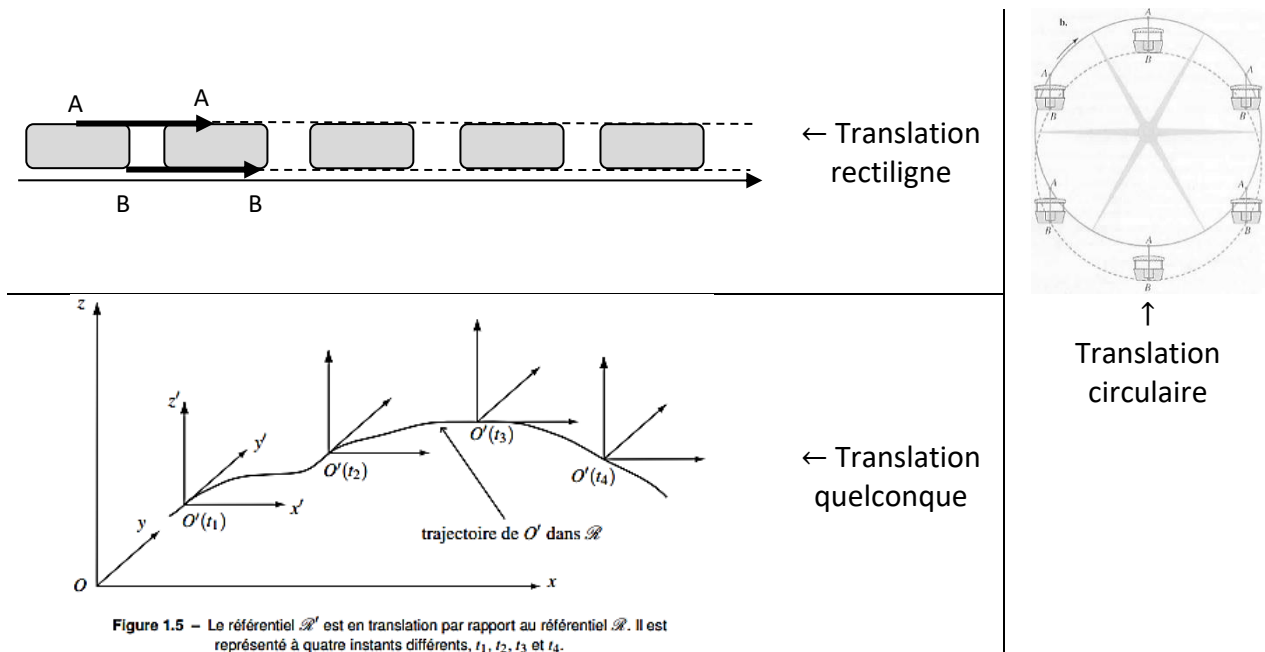
\mathcal{R}' est en **TRANSLATION** par rapport à \mathcal{R} lorsque les directions du repère lié à \mathcal{R}' restent fixes par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Sans perte de généralité, on peut ainsi choisir les axes de \mathcal{R}' parallèles à ceux de \mathcal{R} .

Conséquence : Tous les points fixes dans \mathcal{R}' ont le même mouvement dans \mathcal{R} .

\mathcal{R}' est en **translation** par rapport à $\mathcal{R} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$

Ex :



♦ $\vec{\Omega}_{R'/R}$ caractérise un mouvement de **rotation** de R'/R :

On se limite aux rotations autour d'un axe fixe dans R .

DEFINITION :

R' est en **ROTATION AUTOUR D'UN AXE Δ FIXE** par rapport au référentiel R , s'il existe une unique droite Δ immobile par rapport à R' et par rapport à R .

Conséquence :

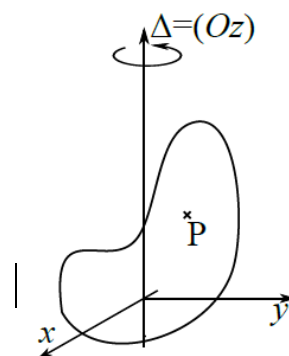
Tous les points fixes dans R' sont animés dans R d'un mouvement circulaire d'axe Δ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ égale à la vitesse angulaire de rotation de R' autour de Δ .

En coordonnées cylindriques d'axe $(Oz) = \Delta$, le vecteur vitesse de P est :

$$\vec{v}(P)_{/R} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

Avec $r = HP$, H étant le projeté orthogonal de P sur Δ .

Le vecteur rotation de R' par rapport à R est : $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$



← Chaque élément du manège est en rotation autour de l'axe central vertical fixe par rapport au référentiel terrestre.

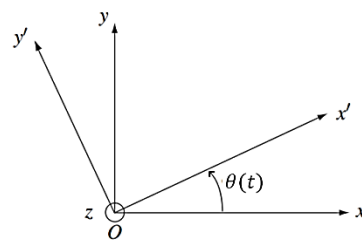


Figure 1.6 – Le référentiel $R'(O, x', y', z)$ est en rotation autour de l'axe fixe (Oz) .

2) Mouvements absolu et relatif

Soient R et R' deux référentiels que l'on munit de leurs repères respectifs $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$.

Le **mouvement de M dans R** est nommé mouvement **absolu**. On introduit :

le vecteur position	la vitesse absolue	l' accélération absolue
\vec{OM}	$\vec{v}_a = \vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/R}$	$\vec{a}_a = \vec{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right)_{/R}$

Le **mouvement de M dans R'** est nommé mouvement **relatif**. On introduit :

le vecteur position	la vitesse relative	l' accélération relative
$\vec{O'M}$	$\vec{v}_r = \vec{v}(M)_{/R'} = \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{/R'}$	$\vec{a}_r = \vec{a}(M)_{/R'} = \left(\frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2} \right)_{/R'}$

Translation
de R' par rapport à R .

Rotation uniforme
de R' par rapport à R .



← Illustrations de changements de référentiel dans les cas translation et rotation uniforme d'un référentiel par rapport à l'autre. Les lignes visualisées sur les photos correspondent à la trajectoire d'un point fixe dans un référentiel, vu depuis l'autre référentiel.

Autre exemple : cf fig.1.8. de l'annexe 2.

Vidéos pour une rotation : <https://cahier-de-prepa.fr/mp-lafayette/docs?rep=115> vidéos n°1 et n°2

3) Formule de dérivation vectorielle – Formule de Bour

a) Position du problème

Soit \vec{A} un vecteur quelconque qui dépend du temps. On peut le décomposer dans la base de R ou dans celle de R' :

$$\begin{aligned}\vec{A} &= x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \\ \vec{A} &= x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z'\end{aligned}$$

♦ On a la dérivée temporelle de \vec{A} dans R :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d}{dt}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)\right)_{/R} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$$

Puisque $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des vecteurs constants dans R .

♦ De même, on a la dérivée temporelle de \vec{A} dans R' :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R'} = \left(\frac{d}{dt}(x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z')\right)_{/R'} = \dot{x}'\vec{u}_x' + \dot{y}'\vec{u}_y' + \dot{z}'\vec{u}_z'$$

Puisque $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ sont des vecteurs constants dans R' .

b) Lien entre les dérivées : formule de Bour

La formule de Bour donne le lien entre $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R}$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R'}$:

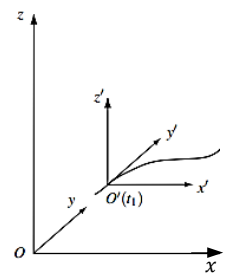
$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}} \quad (*)$$

NB : On vérifie la validité de cette relation dans les cas particuliers où :

♦ R' en **translation** par rapport à R :

Dans ce cas, $(\vec{u}_x', \vec{u}_y', \vec{u}_z')$ sont constants dans R donc $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{/R'}$.

Et ceci concorde avec la formule (*) puisque, dans le cas d'une translation, $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$.

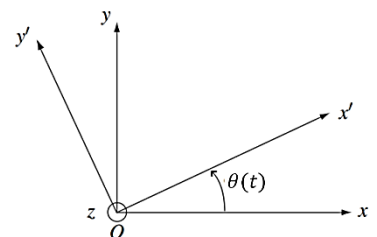


♦ R' en **rotation autour d'un axe fixe Δ** par rapport à R :

$$\vec{A} = x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z'$$

avec $\vec{u}_x' = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$ et $\vec{u}_y' = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$

$$\text{et } \vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$



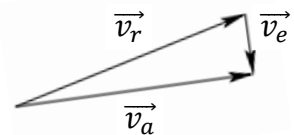
4) Loi de composition des vitesses

a) Cas général

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)_{/R} &= \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M})}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}(O')_{/R} + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{/R'} + \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\Leftrightarrow \vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{v}_e \Leftrightarrow \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e\end{aligned}$$

avec $\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{/R} + \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ la vitesse d'entraînement

Rq : Représentation de la loi de composition des vitesses par le « triangle des vitesses ».



b) Cas particulier où \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{/R}$$

➔ Exercice classique : On considère un enfant qui marche dans un train. Sa vitesse vue depuis le sol correspond à sa vitesse dans le train additionnée à la vitesse du train par rapport au sol :

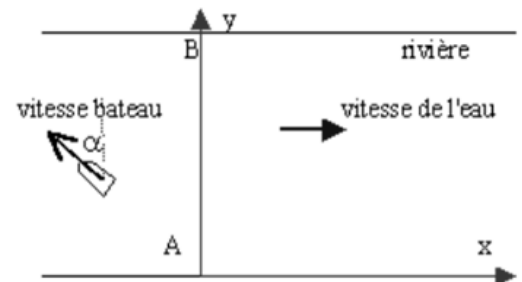
$$\underbrace{\vec{v}(\text{enfant})_{/sol}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{v}(\text{enfant})_{/train}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\vec{v}(\text{train})_{/sol}}_{\vec{v}_e}$$

Que vaut $\vec{v}(\text{enfant})_{/train}$ lorsque l'enfant est vu immobile depuis le quai ?

Autre exemple de composition des vitesses dans le cas translation :

Un bateau traverse une rivière.

On note v_{eau} la vitesse du courant et v_b la norme du vecteur vitesse du bateau par rapport à la rivière.



c) Cas particulier où \mathcal{R}' est en rotation autour d'un axe fixe Δ par rapport à \mathcal{R}

On choisit $(Oz) = \Delta$

$$\vec{v}_e = \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{OM}$$

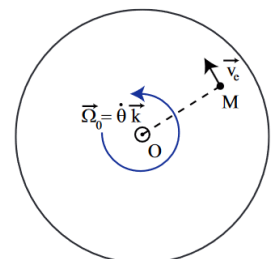
➔ Exercice classique : Dans le cas où \mathcal{R}' est en rotation autour de $\Delta = (Oz)$ par rapport à \mathcal{R} , vérifier qu'on peut écrire $\vec{v}_e = \vec{v}(O')_{/R} + \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$ sous la forme $\vec{v}_e = \overrightarrow{\Omega_{R'/R}} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Ex :

On considère un enfant qui marche dans un manège. Sa vitesse vue depuis le sol correspond à sa vitesse dans le manège additionnée à la vitesse d'entraînement :

$$\underbrace{\vec{v}(\text{enfant})_{/sol}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\vec{v}(\text{enfant})_{/manège}}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\overrightarrow{\Omega_{manège/sol}} \wedge \overrightarrow{OM}}_{\vec{v}_e}$$

On a $\vec{v}_e = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques (cf § A.4.d) avec $\overrightarrow{\Omega_{manège/sol}} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$



5) Loi de composition des accélérations

a) Cas général (expression générale de \vec{a}_e hors programme en annexe)

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

avec \vec{a}_e l'accélération d'entraînement

et $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$ l'accélération de Coriolis

b) Preuve pour le cas où \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R}

$$\vec{a}_a = \vec{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d\vec{v}(O')_{/R}}{dt} \right)_{/R}$$

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R'} = \vec{a}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}(O')_{/R}$$

avec l'accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = \vec{a}(O')_{/R}$

et l'accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = \vec{0}$

A retenir : Lorsque \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , l'accélération de Coriolis est nulle.

c) Preuve pour le cas où \mathcal{R}' est en rotation UNIFORME autour d'un axe fixe par rapport à \mathcal{R}

On choisit $(Oz) = \Delta$

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z = c\vec{s}t$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R} + \left(\frac{d(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})}{dt} \right)_{/R}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$$

$$\left(\frac{d(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})}{dt} \right)_{/R} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{/R} = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{v}_r + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})$$

$$\vec{a}(M)_{/R} = \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM}) + 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

avec l'accélération d'entraînement : $\vec{a}_e = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{OM})$

et l'accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$

d) Point coïncident

DEFINITION :

Le **POINT COÏNCIDENT** C est le point confondu géométriquement avec le point M à l'instant t et fixe dans le référentiel \mathcal{R}' .

Ex : cf fig.1.9 de l'annexe 2

Appliquons la loi de composition des vitesses au point coïncident :

$$\vec{v}(C)_{/R} = \vec{v}(C)_{/R'} + \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'C} = \vec{0} + \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_e$$

La **vitesse d'entraînement** correspond donc à la **vitesse du point coïncident C dans R** .

De même, l'**accélération d'entraînement** correspond à l'**accélération du point coïncident dans R** .

Il est intéressant d'utiliser ces résultats dans le cas où **\mathcal{R}' est en rotation uniforme autour de $(Oz) = \Delta$ fixe par rapport à \mathcal{R}** car cela permet de calculer facilement la vitesse et l'accélération d'entraînement.

C décrit un cercle d'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$.

En coordonnées cylindriques d'axe $(Oz) = \Delta$, avec $r = HM$, H étant le **projeté orthogonal de M sur Δ à t** , on a :

$$\vec{v}_e = \vec{v}(C)_{/R} = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_e = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(C)_{/R} = -r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r$$

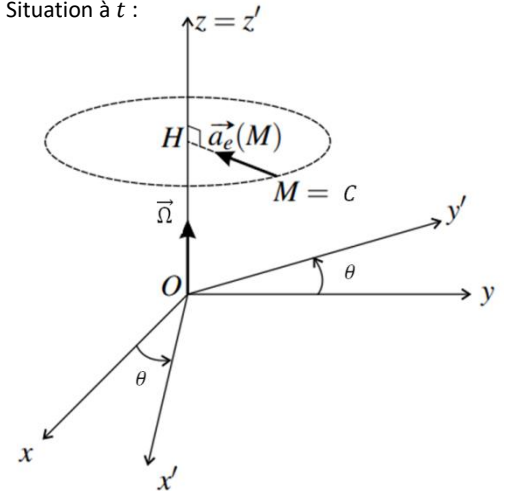
$$\Leftrightarrow \vec{a}_e = -r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r = -\dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

NB : dans les exercices, il faudra exprimer \overrightarrow{HM} , r , \vec{u}_r et \vec{u}_θ en fonction des vecteurs de la base fournie.

☞ **Exercice classique** : Vérifier que ces expressions concordent avec celles des § A.4.c et § A.5.c sachant que $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$.

NB : L'accélération d'entraînement est **centripète**.

Situation à t :



e) Bilan

Cas où R' est en translation par rapport à R	Cas où R' est en rotation uniforme autour d'un axe $(Oz) = \Delta$ fixe dans R
$\vec{\Omega}_{R'/R} =$	$\vec{\Omega}_{R'/R} =$
$\vec{v}_e =$	$\vec{v}_e =$ $\vec{v}_e = r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\theta$ <div>(expression intrinsèque) (dans la base cylindrique d'axe (Oz))</div>
$\vec{a}_e =$ $\vec{a}_c =$	$\vec{a}_e =$ $\vec{a}_e = -r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r$ <div>(expression intrinsèque) (dans la base cylindrique d'axe (Oz))</div> $\vec{a}_c =$

B) Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen

1) Principe d'invariance galiléenne

a) Référentiels galiléens (rappels)

DEFINITION :

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié :

tout point matériel isolé ou pseudo-isolé a un mouvement rectiligne uniforme ou reste immobile dans ce référentiel.

- système « **isolé** » : système ne subissant aucune interaction de la part de l'extérieur.
- système « **pseudo-isolé** » : système tel que les interactions qu'il subit se compensent.
- mouvement **rectiligne uniforme** $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Conséquence déduite de la loi de composition des vitesses :

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

b) Invariance de la 2^e loi de Newton / de la loi de la quantité de mouvement (= LQM) / du Principe Fondamental de la Dynamique (= PFD)

D'après la loi de composition des accélérations, la LQM / le PFD est invariant par changement de référentiel galiléen :

Soit M un point matériel de masse m étudié dans R_g un référentiel galiléen quelconque, on a :

$$m\vec{a}(M)_{/R_g} = \sum \vec{F}^{ext}$$

Avec $\sum \vec{F}^{ext}$ la **résultante des forces extérieures** exercées sur M .

Rq :

- L'énoncé général de la LQM est $\left(\frac{d\vec{p}(M)_{/R_g}}{dt}\right)_{/R_g} = \sum \vec{F}^{ext}$ avec $\vec{p}(M)_{/R_g} = m\vec{v}(M)_{/R_g}$ et dans le cas où la

masse m du système est constante, on a $\left(\frac{d\vec{p}(M)_{/R_g}}{dt}\right)_{/R_g} = m\vec{a}(M)_{/R_g}$.

- Galilée observe que, dans un navire, aucune expérience de mécanique ne permet de distinguer si le navire est **immobile** au port ou s'il est en **translation rectiligne uniforme** : les expériences donnent des résultats identiques. Par exemple, un corps lâché depuis un mât tombe toujours au pied du mât.

2) LQM / PFD dans un référentiel non galiléen – Forces d'inertie

a) Cas général

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen et \mathcal{R}' un référentiel non galiléen en mouvement par rapport à \mathcal{R} .

Soit M un point matériel de masse m subissant $\sum \vec{F}^{ext}$ la résultante des forces extérieures.

Dans \mathcal{R} galiléen, on a :

$$m\vec{a}(M)_{/R} = \sum \vec{F}^{ext}$$

La loi de composition des accélérations donne :

$$\begin{aligned}\vec{a}(M)_{/R} &= \vec{a}(M)_{/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c \\ \Rightarrow m\vec{a}(M)_{/R'} &= m(\vec{a}(M)_{/R} - \vec{a}_e - \vec{a}_c) = \sum \vec{F}^{ext} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c\end{aligned}$$

LQM / PFD : Soit M un point matériel de masse m étudié dans R' un référentiel non galiléen en mouvement par rapport à \mathcal{R} un référentiel galiléen, on a :

$$m\vec{a}(M)_{/R'} = \sum \vec{F}^{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Avec $\sum \vec{F}^{ext}$ la **résultante des forces extérieures** exercées sur M

et \vec{f}_{ie} et \vec{f}_{ic} les **forces d'inertie – pseudo-forces**, traduisant le **caractère non galiléen de R'** :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

la **FORCE D'INERTIE D'ENTRAÎNEMENT**

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$$

la **FORCE D'INERTIE DE CORIOLIS**

☛ Dans le bilan des forces, on **distinguera** d'une part les **forces « vraies »** dont la résultante est $\sum \vec{F}^{ext}$ et d'autre part les **pseudo-forces** \vec{f}_{ie} et \vec{f}_{ic} .

Cas particulier : Le système est dit en **EQUILIBRE RELATIF** lorsqu'il est **immobile** par rapport au **référentiel relatif \mathcal{R}'** : $\vec{v}_r = \vec{v}(M)_{/R'} = \vec{0}$ et $\vec{a}_r = \vec{a}(M)_{/R'} = \vec{0}$.

Dans ce cas, la force d'inertie de **Coriolis** est **nulle** : $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$.

Pour un système en équilibre relatif, on a : $\sum \vec{F}^{ext} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$

b) Cas particulier où \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R}

Soit M un point matériel de masse m étudié dans R' un référentiel non galiléen en **translation** par rapport à R un référentiel galiléen, on a :

$$m\vec{a}(M)_{/R'} = \sum \vec{F}^{ext} + \vec{f}_{ie}$$

Avec $\sum \vec{F}^{ext}$ la **résultante des forces extérieures** exercées sur M

et $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}(O')_{/R}$ la **force d'inertie d'entraînement**.

Ex : Sens de la force d'inertie d'entraînement

Soit un passager assis dans un train dans le sens de la marche. Un livre, de masse m , est posé devant lui sur la tablette. Le train, initialement à l'arrêt, démarre en accélérant. Le passager constate que le livre glisse sur la tablette.

On étudie le livre dans le référentiel terrestre R galiléen. En négligeant les frottements, le livre est pseudo-isolé et sa vitesse initiale étant nulle, il est donc immobile dans R . Lors du démarrage du train, dans le référentiel R' lié au train, le livre se déplace donc dans le sens inverse du train.

On peut aussi étudier le livre dans le référentiel R' lié au train en translation par rapport à R le référentiel terrestre. Selon le plan horizontal, on introduit la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}(\text{train})_{/R}$$

Le sens de la force d'inertie d'entraînement est cohérent avec le sens de glissement du livre sur la tablette : glissement du livre dans le sens inverse du train.

Si le train ralentit, la force d'inertie d'entraînement change de sens. Le livre glisse vers l'avant du train.

c) Cas particulier où \mathcal{R}' est en rotation UNIFORME autour d'un axe fixe par rapport à \mathcal{R}

Soit M un point matériel de masse m étudié dans R' un référentiel non galiléen en **rotation uniforme autour d'un axe fixe** (Oz) = Δ par rapport à R un référentiel galiléen, on a :

$$m\vec{a}(M)_{/R'} = \sum \vec{F}^{ext} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Avec $\sum \vec{F}^{ext}$ la **résultante des forces extérieures** exercées sur M ;

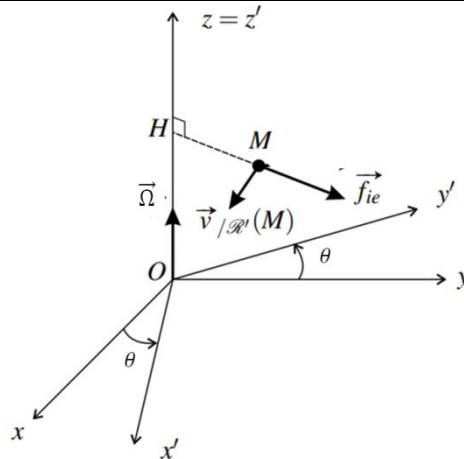
$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m \cdot HM \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{u}_r = m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{HM} \text{ la force d'inertie d'entraînement}$$

$$\text{et } \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r \text{ la force d'inertie de Coriolis avec } \vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$$

Propriétés :

- \vec{f}_{ie} est **CENTRIFUGE** (ou plus précisément **axifuge**) ;

- \vec{f}_{ic} est orthogonale au vecteur vitesse \vec{v}_r , elle induit donc une **dévi**ation du système en mouvement.



Ex : Soit un plateau sur lequel on dépose une bille. On met le plateau en rotation uniforme autour de son axe vertical fixe par rapport à R le référentiel terrestre.

On étudie la bille dans le référentiel R' lié au plateau. Selon le plan horizontal, on introduit la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{HM}$$

Le caractère centrifuge de la force d'inertie d'entraînement est cohérent avec le mouvement observé de la bille dans le référentiel R' .

3) Autres lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen, déduites du PFD

[...] = [Soit M un point matériel de masse m étudié dans R' un référentiel non galiléen en mouvement par rapport à \mathcal{R} un référentiel galiléen.]

a) Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétiques

TPC : [...]

$$\frac{dE_{c/R'}}{dt} = \sum \mathcal{P}^{ext}_{/R'} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/R'}$$

Avec $E_{c/R'} = \frac{1}{2} m (v(M)_{/R'})^2$ l'énergie cinétique du système dans R'

$$\sum \mathcal{P}^{ext}_{/R'} \text{ la puissance des forces extérieures dans } R' : \sum \mathcal{P}^{ext}_{/R'} = \sum (\vec{F}^{ext} \cdot \vec{v}(M)_{/R'})$$

et $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/R'}$ la **puissance de la force d'inertie d'entraînement** dans R' .

NB : La puissance de la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r$ est nulle dans R' puisque $\vec{f}_{ic} \perp \vec{v}_r$.

TEC : [...]

$$\Delta E_{c/R'} = \sum W^{ext}_{/R'} + W(\vec{f}_{ie})_{/R'}$$

Avec $\Delta E_{c/R'}$ la **variation** d'énergie cinétique dans R' entre 2 dates (ou 2 positions de M) ;
 $\sum W^{ext}_{/R'}$ le **travail des forces extérieures** dans R' entre ces 2 dates ou 2 positions de M
 et $W(\vec{f}_{ie})_{/R'}$ le **travail de la force d'inertie d'entraînement** dans R' entre ces 2 dates.

b) Théorèmes de la puissance et de l'énergie mécaniques

TPM : [...]

$$\frac{dE_{m/R'}}{dt} = \sum \mathcal{P}_{nc/R'} + \mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/R'}$$

Avec $\sum \mathcal{P}_{nc/R'}$ la **puissance** dans R' des **forces extérieures non conservatives**
 et $\mathcal{P}(\vec{f}_{ie})_{/R'}$ la **puissance de la force d'inertie d'entraînement** dans R' .

TEM : [...]

$$\Delta E_{m/R'} = \sum W_{nc/R'} + W(\vec{f}_{ie})_{/R'}$$

Avec $\Delta E_{m/R'}$ la **variation** d'énergie mécanique dans R' entre 2 dates (ou 2 positions de M) ;
 $\sum W_{nc/R'}$ le **travail** dans R' des **forces extérieures non conservatives** entre ces 2 dates
 et $W(\vec{f}_{ie})_{/R'}$ le **travail de la force d'inertie d'entraînement** dans R' entre ces 2 dates.

NB : On peut déterminer une énergie potentielle dont dérive la force d'inertie d'entraînement, cf TD.

c) Théorème du moment cinétique

TMC : [...]. Soit un **point A FIXE** dans R' .

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_A(M)_{/R'}}{dt} \right)_{/R'} = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}^{ext}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})$$

Avec $\vec{\sigma}_A(M)_{/R'} = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M)_{/R'}$: le **moment cinétique** de M par rapport à A dans R' ;
 $\sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}^{ext}) = \sum (\vec{AM} \wedge \vec{F}^{ext})$: le **moment des forces extérieures** par rapport à A
 et $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie})$ et $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})$ les **moments des forces d'inertie** par rapport à A .

NB : On peut également énoncer le TMC par rapport à un axe (Az) fixe dans R' :

$$\frac{d\sigma_{(Az)}(M)_{/R'}}{dt} = \sum \mathcal{M}_{(Az)}(\vec{F}^{ext}) + \mathcal{M}_{(Az)}(\vec{f}_{ie}) + \mathcal{M}_{(Az)}(\vec{f}_{ic})$$

4) Méthode d'application



*Démarche pour
appliquer une loi de
dynamique en référentiel
non galiléen*

- ① Préciser le **système** étudié et sa modélisation : point / solide*.
- ② Préciser le **référentiel non galiléen** \mathcal{R}' d'étude et son mouvement par rapport à un référentiel R galiléen.
- ③ Etablir le **bilan des forces extérieures** subies par le système avec un **schéma précisant la (ou les) BOND** de vecteurs **appropriée(s)**.
- ④ Exprimer les forces d'inertie.
- ⑤ Appliquer une des **lois de dynamique**. **NB :** Pour le TMC, s'assurer que le point A ou l'axe (Az) est **fixe dans R'** .

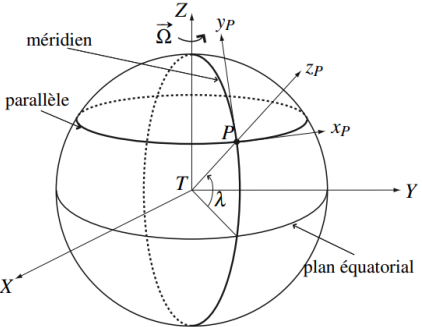
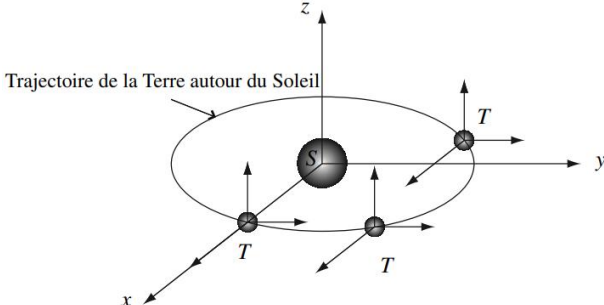
* Les lois de dynamique pour un solide étudié en référentiel galiléen vues en 1^e année peuvent s'adapter en référentiel non galiléen en prenant en compte les forces d'inertie.

C) Caractère galiléen approché des référentiels usuels

Les lois Newton postulent l'existence d'un référentiel galiléen mais n'en donnent explicitement aucun ! Le seul moyen de vérifier si un référentiel est galiléen est de réaliser des expériences de mécanique et de vérifier si les observations expérimentales sont compatibles avec les lois de Newton en supposant le référentiel galiléen. Mais qui dit expérience dit précision expérimentale. Dès lors :

On considérera un référentiel comme galiléen tant qu'on pourra appliquer les lois de Newton, et en particulier le PFD, sans que les observations expérimentales n'infirment cette hypothèse. Autrement dit, on ne peut affirmer le caractère galiléen d'un référentiel que dans la limite de la précision des mesures expérimentales.

1) Référentiels usuels (rappels)

Référentiel terrestre	Référentiel géocentrique	Référentiel de Copernic
<p>Origine P : point de la surface de la Terre où se déroule l'expérience. 3 axes fixes par rapport à la Terre. (Pz_P) axe vertical ascendant (Px_P) et (Py_P) axes horizontaux (Px_P) ouest \rightarrow est et (Py_P) sud \rightarrow nord.</p>  <p>Figure 2.8 – Référentiel terrestre local</p>	<p>Origine T : centre de la Terre. 3 axes pointant vers des étoiles lointaines supposées fixes.</p>  <p>Figure 2.9 – Référentiel géocentrique et référentiel de Copernic.</p>	<p>Origine S : centre de masse du système solaire, proche du centre du Soleil*. 3 axes pointant vers des étoiles lointaines supposées fixes.</p>

* Le centre de masse du système solaire est proche du centre du Soleil puisque la masse du Soleil est très supérieure à celle des planètes ($m_S \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ et $m_{Jupiter} \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$).

Ainsi le référentiel de Copernic et le référentiel héliocentrique sont presque identiques.

Le référentiel de Copernic est considéré galiléen à condition de se limiter à des mouvements à l'intérieur du système solaire et de durée courte devant la durée caractéristique du mouvement du Soleil dans la galaxie (230 millions d'années).

Il est adapté pour l'étude du mouvement des planètes / comètes du système solaire, cf 1^e année.

2) Caractère galiléen approché du référentiel géocentrique

Ce référentiel est adapté pour l'étude du mouvement des satellites (artificiels ou de la Lune) autour de la Terre, cf 1^e année.

a) Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic

Soit R_C le référentiel de Copernic, considéré galiléen, et R_G le référentiel géocentrique.

Par rapport à R_C , R_G est en **translation quasi-circulaire uniforme** à la vitesse angulaire $\omega = 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$.

Ainsi, en toute rigueur, le référentiel géocentrique est non galiléen.

➡ ODG : Justifier la valeur de ω .

Rq : C'est le caractère non galiléen du référentiel géocentrique qui permet d'expliquer l'existence de deux marées hautes et deux marées basses par jour dues à l'influence de la Lune.

b) ODG - Approximation

En toute rigueur, pour une étude dans le référentiel géocentrique, il faut rajouter une accélération d'entraînement de l'ordre de $D\omega^2 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$, où $D = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ est la distance Terre-Soleil.

➡ Exercice classique : Justifier l'expression de l'accélération d'entraînement.

On peut considérer que le **référentiel géocentrique** est **galiléen** à condition de se limiter à des mouvements de **durée courte devant 1 an** car sur une telle durée, on peut assimiler le mouvement du référentiel géocentrique à une **translation RECTILIGNE uniforme** par rapport au référentiel de Copernic.

3) Caractère galiléen approché du référentiel terrestre

Pour étudier le mouvement d'un objet au voisinage de la surface de la Terre, le référentiel adapté est le référentiel terrestre R_T . R_T est aussi appelé « référentiel du laboratoire ».

Pour la plupart des expériences classiques, les observations sont compatibles avec une étude théorique où le référentiel terrestre R_T est considéré galiléen, cf 1^e année.

En revanche, si on regarde très finement certaines expériences réalisées sur des grandes échelles de temps ou d'espace, il apparaît des écarts notables et quantifiables qui démontrent que R_T n'est pas galiléen.

a) Expériences

♦ Chute des corps – Expérience de Reich (cf TD)

En 1833, Ferdinand Reich réalisa une centaine de lâchers de bille d'une hauteur $H = 158 \text{ m}$, sans vitesse initiale, dans un puits de mines à Freiberg (latitude $\lambda = 51^\circ$).

Si R_T était galiléen, les billes auraient touché le sol à la verticale du point de lâcher.

Reich mesura une déviation moyenne de $\delta = 28 \text{ mm}$ à l'est de la verticale du point de lâcher.

♦ Pendule de Foucault

En 1851, Léon Foucault fit osciller un immense pendule de masse 28 kg, de longueur $L = 67 \text{ m}$ accroché au sommet de la coupole du Panthéon à Paris (latitude $\lambda = 48^\circ$).

Si R_T était galiléen, le pendule aurait oscillé dans un plan vertical fixe. L'expérience montra que le pendule, une fois lâché, oscillait pendant 6 h (à cause de diverses causes d'amortissement), mais surtout que le plan d'oscillation du pendule n'était pas fixe et tournait autour de la verticale, à raison de 11° par heure, effet parfaitement mesurable.

Le pendule de Foucault est toujours visible de nos jours dans le Panthéon.

b) Cause

Soit R_G le référentiel géocentrique, considéré galiléen (cf § C.2.b : durée d'expérience faible par rapport à 1 an) et R_T le référentiel terrestre.

Par rapport à R_G , R_T est en **rotation uniforme autour d'un axe fixe**, l'axe des pôles, à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Ainsi, en toute rigueur, le référentiel terrestre est non galiléen.

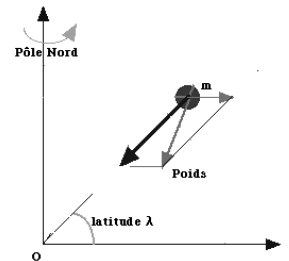
➡ ODG : Justifier la valeur de $\dot{\theta}$.

c) Force d'inertie d'entraînement : Champ de pesanteur – ODG (cf CCS2 MP 2018)

♦ Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ d'un objet M est, par définition, la force opposée à la tension d'un fil au bout duquel est accroché l'objet, ce dernier étant en équilibre dans le référentiel terrestre.

➡ Exercice classique : En déduire que le poids est égal à la somme de la force de gravitation exercée par la Terre de centre T et de la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{P} = -mGM_T \frac{\vec{TM}}{TM^3} - m\vec{a}_e \Leftrightarrow \vec{g} = -GM_T \frac{\vec{TM}}{TM^3} - \vec{a}_e$$



♦ ODG :

L'accélération d'entraînement est radiale vis-à-vis de l'axe des pôles. Elle est maximale au niveau de l'équateur où elle a pour intensité : $R_T \dot{\theta}^2 \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$, où $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ le rayon de la Terre.

On peut comparer cette valeur au champ gravitationnel au niveau de l'équateur : $\frac{GM_T}{R_T^2} \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Ainsi, **la force d'inertie d'entraînement est un terme correctif de l'ordre du millième** : le schéma ci-dessus exagère donc la composante radiale du poids.

➡ Exercice classique : Justifier l'expression de l'accélération d'entraînement au niveau de l'équateur.

d) Force d'inertie de Coriolis : Influence - ODG

♦ La force d'inertie de Coriolis est responsable :

- de la déviation vers l'est des objets lors d'une chute libre de grande ampleur, cf § a et TD.
- du sens de rotation des masses d'air autour d'une dépression (cyclones).

➡ Exercice classique : Une dépression se crée en un point. Les vents convergent à grande vitesse vers ce point. Déterminer les directions et les sens de déviation de ces vents due à la force de Coriolis selon que le vent vient du nord, du sud, de l'est ou de l'ouest et selon l'hémisphère où apparaît la dépression.

Dans l'hémisphère **nord** : latitude $\lambda > 0$

Dans l'hémisphère **sud** : latitude $\lambda < 0$

Rotation dans le sens **trigonométrique** autour d'une dépression.

Rotation dans le sens **horaire** autour d'une dépression.

Animation sur :

www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/RefTerre/Depressions_FJ.php

Exemple analogue de déviation dans un référentiel non galiléen : <https://cahier-de-prepa.fr/mp-lafayette/docs?rep=115> vidéo n°3

♦ ODG : On considère un système à la surface de la Terre.

- Effets verticaux de la force de Coriolis sur le mouvement décrit dans le référentiel terrestre

On a $\|\vec{f}_{ic}\| \approx m\dot{\theta}v_r$

Les **effets verticaux de la force de Coriolis sont négligeables** ssi $\|\vec{f}_{ic}\| \ll \|\vec{P}\|$

$$\Leftrightarrow m\dot{\theta}v_r \ll mg \Leftrightarrow v_r \ll \frac{g}{\dot{\theta}} \approx 1.10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

La **vitesse** du système doit donc être **très élevée pour que les effets verticaux de la force de Coriolis ne soient pas négligeables** sur le mouvement décrit dans le référentiel terrestre.

- Déviation

On note L^* et T^* la distance et la durée caractéristiques de l'expérience étudiée telles que $v_r = \frac{L^*}{T^*}$.

On note L_{cor} la distance caractéristique des effets (déviation) de la force de Coriolis telle que $\|\vec{a}_c\| \approx \frac{L_{cor}}{T^{*2}}$.

Par ailleurs, on a $\|\vec{a}_c\| \approx \dot{\theta}v_r$ donc $L_{cor} \approx \dot{\theta}v_r T^{*2}$.

Les **effets (déviation) de l'accélération de Coriolis sont négligeables** sur le mouvement décrit dans le référentiel terrestre ssi $L_{cor} \ll L^*$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}v_r T^{*2} \ll v_r T^*$$

$$\Leftrightarrow T^* \ll \frac{1}{\dot{\theta}} \approx 1 \text{ jour}$$

On peut interpréter ceci en disant que si $T^* \ll 1 \text{ jour}$, alors le mouvement du lieu de l'expérience a décrit, par rapport au référentiel géocentrique R_G , un tout petit arc de cercle (centré sur l'axe des pôles), de manière uniforme. Ce mouvement peut être confondu avec une **TRANSLATION rectiligne uniforme** par rapport à R_G galiléen, permettant ainsi de considérer le référentiel terrestre R_T comme galiléen.

On peut considérer que le **référentiel terrestre** est **galiléen** à condition de se limiter à des mouvements de **faible ampleur** (à proximité de la surface terrestre) et de **durée courte devant 1 jour**.

Annexe 1 – Loi de composition des accélérations dans le cas général

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_a &= \left(\frac{d\vec{u}_a}{dt} \right)_{/R} = \frac{d}{dt} \left(\vec{u}_a + \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \right)_{/R} \\
 (*) \quad &\downarrow = \left(\frac{d\vec{u}_a}{dt} \right)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_a + \vec{a}(O')_{/R} + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \right)_{/R} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{/R} \\
 (*) \quad &\downarrow = \vec{a}_a + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_a + \vec{a}(O')_{/R} + \frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left[\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} \right] \\
 &= \vec{a}_a + \underbrace{2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}_a}_{\vec{a}_c} + \vec{a}(O')_{/R} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})}_{\vec{a}_e}
 \end{aligned}$$

$$(*) \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}$$

Annexe 2 – Exemple pour illustrer la notion de point coïncident

Cas où \mathcal{R}' est en **translation** par rapport à \mathcal{R} :

Le centre O' d'une roue de vélo de rayon R , avance à la vitesse \vec{v} par rapport au sol. Un point M de la périphérie de la roue (la valve par exemple) est au contact avec le sol à l'instant t . On étudie son mouvement dans le référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ lié au sol et dans le référentiel $\mathcal{R}' = (O', x, y, z)$ en translation à la vitesse \vec{v} par rapport à \mathcal{R} . Dans \mathcal{R}' , la trajectoire du point M est un cercle. Dans \mathcal{R} , elle est plus compliquée, c'est une cycloïde (si la roue ne glisse pas sur le sol) représentée en pointillés sur la figure (1.8) :

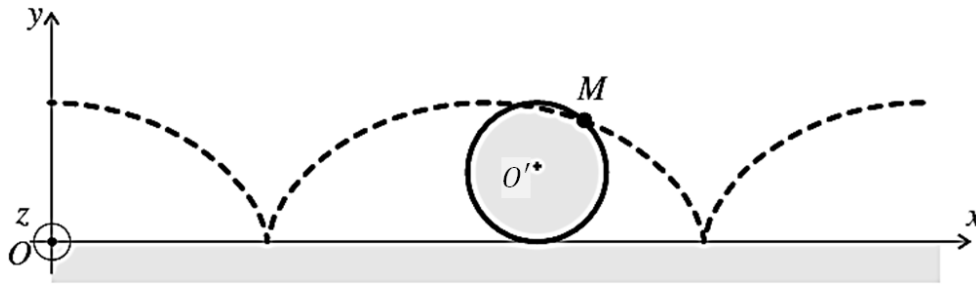


Figure 1.8 – Trajectoire de la valve d'une roue de vélo

Pour faire comprendre ce qu'est le point coïncident, on représente sur la figure 1.9, dans le référentiel \mathcal{R} lié au sol, les trajectoires :

- du point M pris sur la périphérie de la roue et qui décrit la cycloïde
- d'un point P_1 fixe dans \mathcal{R}' , situé à une altitude R au dessus du sol et à une distance R en arrière du centre de la roue
- d'un point P_2 fixe dans \mathcal{R}' , situé à une altitude $2R$ au dessus du sol et à la verticale du centre de la roue.

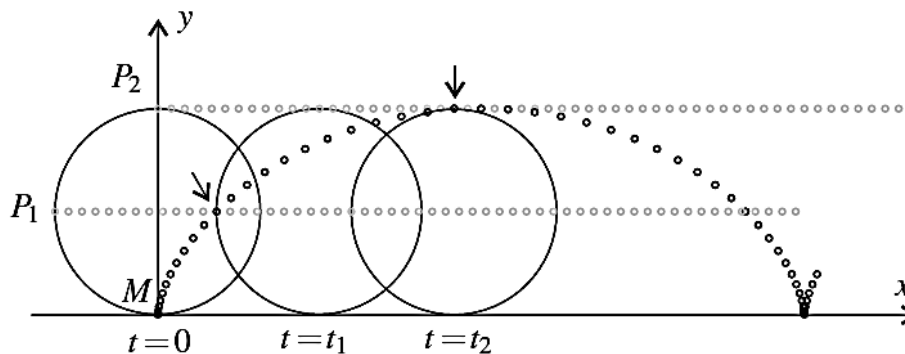


Figure 1.9 – Point coïncident.

À l'instant $t = 0$ ces trois points sont distincts. À $t = t_1$, M et P_1 sont confondus, autrement dit à cet instant là P_1 est le point coïncident de M . De même à $t = t_2$, M et P_2 sont confondus, c'est-à-dire que P_2 est le point coïncident de M à $t = t_2$.

Cas où \mathcal{R}' est en **rotation** autour d'un axe fixe Δ par rapport à \mathcal{R} :

Trajectoires dans \mathcal{R} des points M_1 , M_2 et M_3 points fixes dans \mathcal{R}' :

