TDM1 – Dynamique du point en référentiel non galiléen

Capacités exigibles	Ch	Ex	Ex	Ex	Ex	Ex
	M1	1	2	3-6	7-9	10,11
Mouvement d'un référentiel par rapport à un autre dans les cas du mouvement de translation et du						
mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.						
Reconnaître et caractériser un mouvement de translation et un mouvement de rotation uniforme autour						•
d'un axe fixe d'un référentiel par rapport à un autre.						
Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.			•			
Exprimer le vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.	•		•			
Lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation, et dans le cas						
d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe : vitesse d'entraînement, accélérations d'entraînement						
et de Coriolis.						
Relier les dérivées d'un vecteur dans des référentiels différents par la formule de la dérivation composée.		•				
Citer et utiliser les expressions de la vitesse d'entrainement et des accélérations d'entraînement et de						
Coriolis.						
Lois de la dynamique du point en référentiel non galiléen dans le cas où le référentiel entraîné est						
en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.						
Forces d'inertie.						
Exprimer les forces d'inerties, dans les seuls cas où le référentiel entraîné est en translation, ou en						
rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.						
Décrire et interpréter les effets des forces d'inertie dans des cas concrets : sens de la force d'inertie	•			•	•	•
d'entraînement dans un mouvement de translation ; caractère centrifuge de la force d'inertie						
d'entraînement dans le cas où le référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un						
référentiel galiléen.						
Utiliser les lois de la dynamique en référentiel non galiléen dans les seuls cas où le référentiel entraîné est						
en translation, ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un référentiel galiléen.						
Caractère galiléen approché de quelques référentiels : référentiel de Copernic, référentiel						
géocentrique, référentiel terrestre.						
Citer quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre.	•					•
Estimer, en ordre de grandeur, la contribution de la force d'inertie de Coriolis dans un problème de						
dynamique terrestre.						

0 Exercices classiques vus en cours :

A.4.b: Enfant dans un train

B.2.b/c: Forces d'inertie et mouvements dans le référentiel lié à un train / à un plateau tournant

C.2.b : ODG accélération d'entraînement dans le référentiel géocentrique

C.3.c/d : ODG accélération d'entraînement et de Coriolis dans le référentiel terrestre

1 / Déplacement d'un bateau

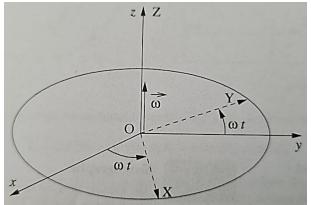
Une rivière forme un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\overrightarrow{v_{eau}} = v_{eau}\overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel terrestre. On note v_b la norme du vecteur vitesse du bateau par rapport à la rivière. On souhaite qu'il traverse la rivière selon l'axe (0y) perpendiculaire à la rivière dans le référentiel terrestre. Pour cela, il doit naviguer à une vitesse $\overrightarrow{v_b}$ par rapport au référentiel de la rivière.

lacktriangle Caractériser le vecteur $\overrightarrow{v_b}$.

2 / Manège en rotation

Un manège est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$. A la date t = 0, $\theta = 0$ et l'axe (0, X) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (0, x) du sol, l'axe (0, Y) dessiné sur le plateau coïncide avec l'axe (0, y) du sol et les axes verticaux (0, Z) et (0, z) sont à tout instant confondus.

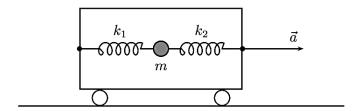
Une personne, initialement en O, marche sur le plateau du manège à la vitesse relative constante $\overrightarrow{v_r} = v_0 \overrightarrow{u_x}$ dans le référentiel du manège. On exprimera tous les vecteurs dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$.



- 1) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs vitesses relative et d'entraînement à la date t. En déduire celles du vecteur vitesse absolue.
- 2) Déterminer les coordonnées de ses vecteurs accélérations relative, d'entraı̂nement et de Coriolis à la date t.
- 3) Etablir les équations horaires x(t) et y(t) du mouvement de la personne.
- 4) Vérifier les lois cinématiques de composition des vitesses et des accélérations.

3 Oscillateur dans un véhicule

On considère un mobile de masse m relié à deux ressorts idéaux de raideur k_1 et k_2 , et pouvant se déplacer horizontalement sans frottement dans un véhicule en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre, a désignant la norme de son vecteur accélération.



Quelle est l'expression de la fréquence propre des oscillations du mobile ?

4 Parpaing dans un ascenseur (type résolution de problème)

On considère un parpaing posé sur un capteur de force dans un ascenseur. L'ascenseur se trouve initialement au 2^e étage et se met en mouvement à partir de $t=4\,\mathrm{s}$ comme le montre le graphique ci-dessous.

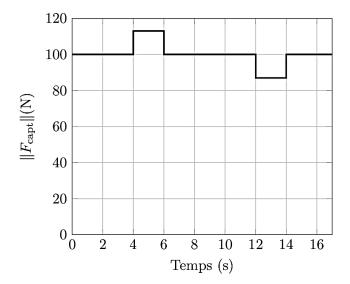


Fig. 2 – Relevé du capteur de force en fonction du temps.

 $F_{\rm capt}$ représente la force exercée sur le dessus du capteur. On notera que, d'après le graphe, $F_{\rm max}=113\,{\rm N}$ et $F_{\rm min}=87\,{\rm N}$. Chaque étage mesure $3\,{\rm m}$ de hauteur.

- 1. Déterminer la masse du parpaing.
- 2. Déterminer le nombre d'étage(s) parcouru(s) et l'étage d'arrivée.
- 3. A quelle condition le parpaing pourrait-il être en impesanteur ?

5 / Oscillations d'un pendule dans un véhicule en mouvement (d'après E3A MP 2017)

Certains conducteurs aiment suspendre des objets à proximité de leur rétroviseur intérieur comme des porte-bonheur ou des diffuseurs solides de parfum. On se propose de s'intéresser aux dangers associés à cette pratique. Pour simplifier l'étude, on considère que l'objet est une masse M suspendue à un fil inextensible, sans raideur, de masse négligeable devant M et de longueur ℓ dont l'autre extrémité est attachée au rétroviseur. On suppose que la voiture roule en ligne droite à vitesse constante $\overrightarrow{v_0} = v_0 \overrightarrow{e_x}$ quand surgit un obstacle sur la route. Le conducteur freine brutalement avec une accélération constante $\overrightarrow{d} = -a_0 \overrightarrow{e_x}$. On négligera les frottements de l'air.

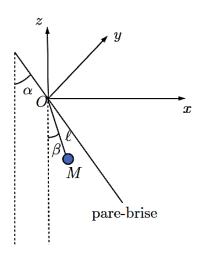


Figure 3: Pendule suspendu au pare-brise d'une voiture.

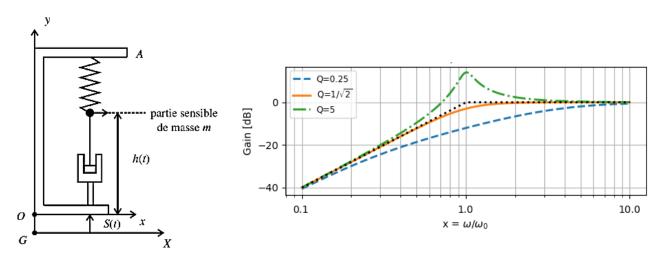
Le point de suspension du fil est situé sur le pare-brise, ce dernier étant incliné d'un angle $\alpha=15^{\circ}$ par rapport à la verticale.

- D.1. Pour déterminer si la masse M risque de heurter le conducteur ou le pare-brise, dans quel référentiel doit-on étudier le mouvement ? Justifier la réponse.
- D.2. On considère que le référentiel terrestre est galiléen. Le référentiel lié à la voiture est-il galiléen? La réponse diffère-t-elle en fonction de la phase du mouvement du véhicule (mouvement à vitesse constante ou phase de freinage)?
- D.3. Le point M étant initialement au repos, établir que son mouvement est plan à condition que la trajectoire de la voiture soit rigoureusement rectiligne.
- D.4. Déterminer l'expression littérale de la position angulaire β_{eq} d'équilibre relatif lors de la phase de freinage.
- D.5. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit la position angulaire $\beta(t)$ de l'objet suspendu dans le référentiel lié à la voiture lors de la phase de freinage.
 - On se place dans l'approximation des petits angles jusqu'à la fin de cette partie.
- D.6. Etablir l'expression de l'équation horaire de l'angle β en supposant qu'initialement le pendule est immobile et vertical.
- D.7. Déterminer la valeur a_1 de l'accélération maximale du véhicule pour que la masse ne heurte pas le pare-brise. Commenter.

6 Sismographe

La partie sensible du sismographe pendulaire est une masse munie d'un index et d'une tige. Cet ensemble de masse m assujetti à se déplacer verticalement, est suspendu à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le ressort est fixé en A sur un bâti. La partie sensible (masse + index + tige) est par ailleurs reliée à un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $-\alpha \vec{v}$ où \vec{v} est le vecteur vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti. Le référentiel terrestre d'origine G est galiléen.

Un tremblement de terre est modélisé par une vibration verticale harmonique de translation : $S(t) = S_0 \cos(\omega t)$ où S(t) repère le déplacement vertical du sol par rapport au référentiel galiléen du lieu.



1) Établir l'équation du mouvement de la masse c'est-à-dire l'équation différentielle portant sur h(t) distance définie par la figure ci-dessus.

On donne le diagramme de Bode du système.

Par ailleurs, l'étude du spectre de Fourier des vibrations sismiques montre que leurs périodes se répartissent essentiellement sur une gamme qui va de 1 s à 10 s.

2) Comment doit-on choisir les caractéristiques du sismographe?

7 / Lanceur de Ball-Trap

Le ball-trap, parfois appelé « tir aux pigeons d'argile », est un exercice d'adresse consistant à abattre au fusil des cibles en argile projetées en l'air.

On modélise le lanceur de cible par un bras horizontal de longueur L en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical.

Une cible d'argile est assimilée à un point matériel M de masse m.

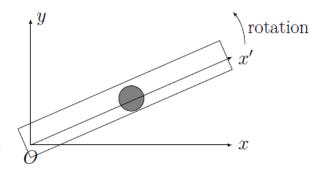


Schéma du dispositif vu de dessus

A l'instant initial, la cible est abandonnée sans vitesse relativement au bras et se trouve en x'(0) = a.

⇒ Par une approche énergétique, déterminer l'expression de la vitesse atteinte par la cible lorsqu'elle quitte le bras.

8 Glissement d'un anneau sur une tige

On considère une tige horizontale en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (0z).

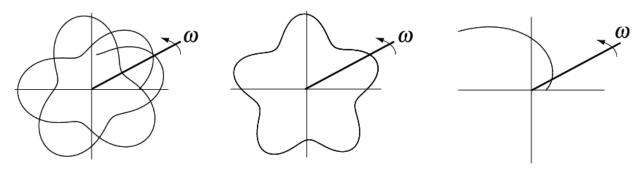
On introduit la demi-droite [Ox') de même direction que la tige.

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est enfilé sur la tige. Une de ses extrémités est fixée en O et l'extrémité mobile est reliée à un anneau qui peut glisser sans frottement sur O(N). Initialement, $O(N) = \ell_0$ et la vitesse de glissement de l'anneau le long de la tige est nulle.

On assimile l'anneau à un point matériel M de masse m.

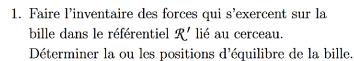
On note R' le référentiel lié à la tige.

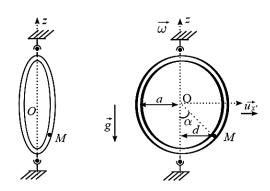
- 1) Etablir l'équation du mouvement de l'anneau dans le référentiel R'.
- 2) Discuter la nature du mouvement de l'anneau. On pourra observer les trajectoires suivantes pour différentes valeurs des paramètres du problème :



9 Mouvement d'une bille dans un cerceau tournant

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement dans un cerceau de rayon a qui tourne autour de son axe vertical à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le schéma du dispositif est présenté sur la figure ci-contre.





- 2. Établir l'expression de l'énergie potentielle de la bille en fonction de l'angle α . Retrouver les positions d'équilibre de la bille et étudier leur stabilité. Tracer l'allure de $E_p(\alpha)$ dans les différents cas étudiés.
- 3. On s'intéresse à de petites oscillations. Écrire l'énergie $E_p(\alpha)$ sous la forme d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de la position d'équilibre stable centrale. Écrire la conservation de l'énergie mécanique pour ces oscillations puis en déduire l'équation angulaire du mouvement et la pulsation des oscillations.

10 Caractère non galiléen du référentiel terrestre : Expérience de Reich

→ « Exercice de cours » : Méthode des perturbations

On étudie ici l'expérience réalisée par Ferdinand Reich, en 1833, dans un puits de mine à Freiberg (latitude $\lambda = 50^{\circ}54'$). Des billes étaient lâchées d'une hauteur h = 158,5 m.

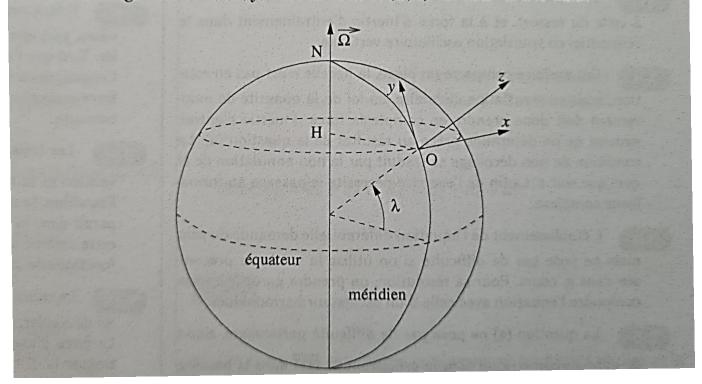
On travaille dans le référentiel terrestre. On prend comme repère (Oxyz), O étant au fond du puits, à la verticale du point L de lâcher, (Ox) étant dirigé vers l'est, (Oy) vers le nord et (Oz) suivant vers la verticale ascendante . On note $\overrightarrow{\omega}$ le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique, g l'intensité du champ de pesanteur, m la masse d'une bille.

On rappelle que dans le référentiel terrestre le poids inclut la force d'inertie d'entrainement due au mouvement de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On néglige tout frottement dans cette étude.

- 1. Écrire les projections sur les trois axes de l'application du principe fondamental de la dynamique à une bille dans le référentiel terrestre.
- 2. On cherche à évaluer l'importance de la force de Coriolis. Quelle est la vitesse maximale d'une bille pour laquelle la force de Coriolis est inférieure à un millième de son poids? On prendra $\omega = 7.29 \times 10^{-5} \, \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- 3. Comme on constate expérimentalement que la vitesse précédente n'est pas atteinte on va trouver une solution approchée du problème par une méthode dite des perturbations. Cela consiste à résoudre le problème en ignorant la force de Coriolis, puis à utiliser l'expression de la vitesse ainsi trouvée pour évaluer la force de Coriolis.
- **a.** En utilisant cette idée déterminer l'ordre de grandeur de l'écart entre le point de chute et *O*.
- **b.** La bille est lâchée sans vitesse initiale à une altitude h au dessus de O. Quelles sont les expressions $\dot{x}_0(t)$, $\dot{y}_0(t)$ et $\dot{z}_0(t)$ des composantes du vecteur vitesse en l'absence de la force de Coriolis? Ce résultat est l'approximation d'ordre 0.
- **c.** Quelle est l'expression approchée de la force de Coriolis utilisant l'approximation d'ordre 0 de la vitesse? Réécrire les équations du mouvement avec cette approximation, puis en donner les solutions $x_1(t)$, $y_1(t)$ et $z_1(t)$. Le résultat est l'approximation d'ordre 1.
- **d.** Déterminer les coordonnées du point d'impact. Comparer à la mesure expérimentale de Reich, à savoir une déviation moyenne de 28 mm à l'est de *O*.
- **4.** La résolution analytique exacte du système non approché est possible (quoique lourde). Elle prévoit en plus de la déviation vers l'est une déviation vers le sud. Que faudrait-il faire dans notre étude pour la mettre en évidence?
- 5. Dans quel sens est la déviation si l'on réalise l'expérience dans l'hémisphère Sud?

11 Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un pendule simple dont le fil inextensible, accroché au sommet S du dôme du Panthéon à Paris, de latitude $\lambda = 48,85^{\circ}$, a une longueur L = 67 m et soutient un mobile M de masse m = 28 kg. L'intensité de la pesanteur est g = 9,81 m·s⁻². On note O le point du sol à la verticale de S. Les axes du repère sont (0,x) dirigé vers l'est, (0,y) vers le nord et (0,z) vertical vers le haut.



- 1) L'amplitude des oscillations du pendule est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que M reste dans le plan horizontal. En déduire que la tension du fil s'écrit $\vec{T} \approx -\frac{mg}{I} \vec{SM}$.
- 2) En déduire que x et y vérifient le système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\beta \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\beta \dot{x} \end{cases}$$

en précisant les expressions de ω_0 et β en fonction de L, g, Ω et λ . Vérifier que $\beta \ll \omega_0$.

3) On définit la variable complexe $\underline{\rho}=x+iy$. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\rho}$ et la résoudre en prenant les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = a ; y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 = \dot{y}(0) \end{cases}$$

4) En déduire x(t) et y(t) et montrer que le mouvement de M correspond à des aller-retours quasirectilignes selon un segment de centre O, de longueur 2a et qui tourne très lentement à une vitesse angulaire Ω_F qu'on précisera. En déduire la période T_F du pendule de Foucault.

Révisions 1^e année : Mécanique

A. Rappels des méthodes

Etude d'un système PONCTUEL (ou un solide en translation)



Démarche introductive pour appliquer à un système ponctuel (ou à un solide en translation) une loi de dynamique en <u>référentiel galiléen</u>

- ① Préciser le **système ponctuel** étudié (ou le solide en translation).
- ② Préciser le **référentiel galiléen** $\mathcal R$ d'étude.
- ③ Avec un schéma en précisant la BOND (Base OrthoNormée Directe) de vecteurs appropriée, établir le bilan des forces extérieures subies par le système.
- 4 Analyse cinématique

Application de la LQM/PFD	⑤ Appliquer le PFD / la LQM, et la projeter dans la BOND.⑥ Résoudre la ou les éguation(s) :
.,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	- soit pour obtenir les lois horaires ou l'équation de la trajectoire ; - soit pour exprimer les forces « non données ».

- la puissance ou le travail des forces pour en déduire l'équation du mouvement ou un scalaire.	Application du TPC ou du TEC	•
--	---	---

	③' Lors du bilan des forces extérieures subies par le système, distinguer :
Application du TPM ou du	- les forces conservatives
TEM	- les forces non conservatives
	⑤ Appliquer le TPM ou le TEM en calculant SEPAREMENT :
	- $rac{dE_m}{dt}$ ou ΔE_m en utilisant l'expression de l'énergie potentielle de chaque
	force conservative
	- la puissance ou le travail des forces non conservatives
	pour en déduire l'équation du mouvement ou un scalaire.

Application du TMC	$\textcircled{6}$ Appliquer le TMC par rapport à A ou à \triangle en calculant SEPAREMENT :
	- $\overrightarrow{\sigma_A}(M)$ ou $\sigma_\Delta(M)$ puis sa dérivée par rapport au temps
	- le moment des forces.
	pour en déduire l'équation du mouvement.



Pour certains problèmes de mécanique, une loi s'avère plus efficace que les autres. Comment <u>repérer ces</u> situations? Les lois de la puissance et de l'énergie cinétiques ou mécaniques n'apportent aucune information supplémentaire par rapport au PFD. On passe seulement d'une équation vectorielle à une équation scalaire.

- Les TPC, TEC, TPM et TEM sont plus efficaces que le PFD lorsque :
 - l'on étudie le mouvement d'un système à un seul ddl;
 - les forces non données ne travaillent pas.
- ② Il est généralement plus aisé d'utiliser le TPM ou le TEM que le TPC ou le TEC car il est plus simple d'exploiter les expressions des énergies potentielles des forces conservatives plutôt que de calculer leur travail.
- **9**a) Les <u>TPC et TPM</u> sont les plus adaptées pour déterminer <u>l'équation du</u> mouvement d'un tel système.
- **9**b) Les <u>TEC et TEM</u> sont les plus adaptées pour <u>déterminer un scalaire</u> (norme du vecteur vitesse, distance...) à un instant donné t_1 et que l'on connaît la valeur de ce scalaire à un autre instant t_0 .



Pour quelles situations, le TMC s'avère-t-elle la loi de dynamique la plus efficace? Le TMC est plus efficace que le PFD dans les cas suivants :

- lacktriangle Mouvement circulaire de centre ou d'axe fixe dans $\mathcal R$ galiléen.
- 2 Force non donnée telle que son moment (par rapport au point ou à l'axe) est nul.
- Mouvement à force centrale.

Etude d'un SOLIDE EN ROTATION



Démarche pour appliquer à un <u>solide en rotation</u> le **TMC** en **référentiel galiléen**

- ① Préciser le **solide** étudié.
- ② Vérifier que le solide est en **rotation autour d'un axe** Δ **fixe** dans \mathcal{R} .
- ③ Avec un schéma représentant la BOND cylindrique d'axe Δ , établir le bilan des forces extérieures subies par le solide et identifier leur point d'application.
- 4 Appliquer le **TMC** par rapport à \triangle en calculant SEPAREMENT :
 - $\sigma_{\Delta}(S) = J_{\Delta}\omega = J_{\Delta}\dot{\theta}$ puis sa dérivée par rapport au temps
 - le moment des forces

pour en déduire l'équation du mouvement.

B. Exercices

12 Trajectoire parabolique

Les coordonnées cartésiennes d'un point sont données, en fonction du temps, par :

$$\begin{cases} x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ y = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \\ z = 0 \end{cases}$$

où α et a sont des constantes.

- 1) Vérifier que la trajectoire est une parabole.
- 2) Donner l'expressions de la vitesse dans le repère cartésien.
- 3) Faire de même avec l'accélération.

13 Interactions

Pendule électrostatique

Un pendule est constitué d'une petite sphère S, de masse $m=30\ g$, attachée au bout d'un fil idéal de longueur L.

On communique à cette sphère une charge électrique positive q, que l'on souhaite déterminer. D'autre part, une autre sphère chargée avec une charge opposée (-q) est placée au voisinage du pendule : celui-ci s'écarte alors de la verticale d'un angle θ_0 . On supposera que les deux sphères sont à la même hauteur et espacée d'une distance d.

On donne $\varepsilon_0 \approx 9.\,10^{-12}\,F.\,m^{-1}$ et on mesure expérimentalement : $\theta_0=45^\circ$ et $d=20\,cm$.

a) Déterminer la valeur de la charge q.

Attractions

- b) Déterminer l'expression puis l'intensité de la force qu'exerce une pomme de 200 g, tombée au sol, sur la Terre à l'aide des données ci-dessous.
- c) En supposant le mouvement de la Lune autour de la Terre circulaire et uniforme, exprimer puis calculer l'intensité de la force qu'exerce la Terre sur la Lune à l'aide des données ci-dessous.

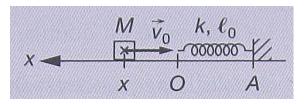
Données:

Champ de pesanteur $g = 9.8 m. s^{-2}$	Distance moyenne Terre-Lune $d=384403\ km$
Masse de la Lune $M_L = 7.34.10^{22} \ kg$	Période de révolution $T_L = 27 jours 7 heures et 43 minutes$

Aucune autre donnée n'est nécessaire!

14 Masse percutant un ressort

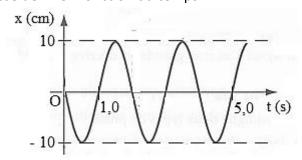
Un ressort de raideur k et de longueur à vide $l_0=30\ cm$ est fixé en A à une paroi (figure ci-contre). Initialement, le ressort est à l'équilibre et l'extrémité libre du ressort est initialement en O.



Un point M de masse m=200~g, glisse sans frottement sur l'axe horizontal (Ox). Ce point M percute l'extrémité libre du ressort à l'instant t=0 et M reste accroché à cette extrémité pour t>0. Le point M percute le ressort avec une vitesse de norme v_0 .

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse pour $t \ge 0$.

On trace l'évolution de l'abscisse de M en fonction du temps :



2) Déterminer la valeur de la constante de raideur k.

On refait la même manipulation pour différentes vitesses initiales v_0 .

- 3) La période du mouvement sera-t-elle différente pour ces nouvelles vitesses initiales ?
- 4) Théoriquement, à quelle condition sur v_0 , la masse vient-elle percuter la paroi en A ?

15 Pseudo-oscillations

Une sphère M (de masse m et de rayon r faible), se déplace avec une faible vitesse \vec{v} .

La sphère, suspendue à un ressort de raideur k, est plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η . La sphère est donc soumise, entre autres, à une force $\vec{f} = -6\pi r \eta \vec{v}$.

La période des oscillations dans l'air est égale à T_0 .

On note T_p la pseudo-période du mouvement de M dans le liquide.

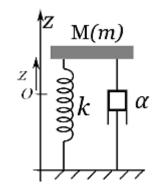
- 1) Exprimer T_p .
- 2) En déduire une application de cette étude.

16 Suspension d'un moteur

On étudie la suspension d'un moteur dont le fonctionnement entraîne des vibrations. Le moteur est assimilé à un point M de masse m.

La suspension est constituée d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 associé à un amortisseur qui exerce sur M une force $\overrightarrow{f_f} = -\alpha \vec{v}$.

La variable z repère la position de M par rapport à la position d'équilibre du moteur, à l'arrêt, symbolisée par le point O.



1) Établir l'expression de la longueur l_e du ressort à l'équilibre, lorsque le moteur est à l'arrêt, en fonction de m, g, k et l_0 .

Lorsque le moteur fonctionne, tout se passe comme s'il apparaissait une force supplémentaire de la forme $\vec{F} = F_0 \cdot \cos(\omega t) \overrightarrow{u_z}$.

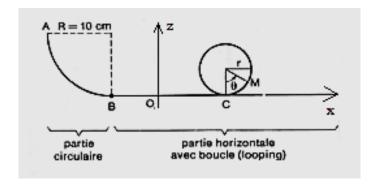
2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z.

En régime forcé, on recherche des solutions sous la forme $v_z(t) = \dot{z}(t) = V_0 \cdot cos(\omega t + \psi)$.

- 3) Exprimer V_0 .
- 4) La pulsation ω vaut $630 \ rad \cdot s^{-1}$. Le moteur a une masse $m=10 \ kg$ et on dispose de deux ressorts de constante de raideur respective $k_1=4,0.10^6 \ N\cdot m^{-1}$ et $k_2=1,0.10^6 \ N\cdot m^{-1}$. Lequel faut-il choisir pour réaliser la suspension ?

17 Looping

Sur une piste représentée sur la figure suivante, on lâche d'un point A, une bille M supposée ponctuelle, de masse m, sans vitesse initiale. On néglige les frottements.



- 1) La bille arrive en C et aborde la boucle de rayon r et sa position est repérée par l'angle θ . Déterminer la vitesse v de la bille sur la boucle en fonction de g, R, r et θ . En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en M.
- 2) Montrer que si $r < r_0$, la bille ne quitte pas la piste au cours du looping. Donner l'expression littérale puis numérique de r_0 .

18 Masse attachée à un fil

Un point matériel M de masse m, attaché à un fil, peut glisser sans frottement sur un support plan horizontal.

On note (0z) l'axe vertical ascendant.

Le fil passe par un trou du support, noté O, et est tiré vers le bas à la vitesse $\vec{v} = -v_0 \overrightarrow{u_z}$ avec v_0 une constante positive. La masse est lancée initialement avec une vitesse angulaire ω_0 et la longueur horizontale du fil est à, cet instant, égale à L_0 .

 \supset Déterminer l'expression temporelle de la vitesse angulaire ω du point M autour de l'axe (Oz) en fonction des données du problème.

19 Comète de Halley

L'orbite de la comète de Halley autour du Soleil a une période de 76 années.

En 1986, la comète se trouvait à son périhélie, la distance comète/Soleil valant alors $8,9.10^{10} \, m$ (rq : ce point se trouve entre les orbites de Mercure et de Vénus).

→ A quelle distance du Soleil se trouve l'aphélie de la comète de Halley ?

Données: $M_S = 2.0.10^{30} kg$ et $G = 6.67.10^{-11} USI$.

20 Modélisation de la chute d'un arbre

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A t=0, l'arbre fait un angle de 5° avec la verticale et est immobile.

Le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité vaut $\frac{1}{3}mL^2$.

- 1) Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
- 2) Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

3) A partir de cette relation, montrer que l'on peut déterminer le temps de chute d'un arbre de 30~m de haut tel que $\theta_0=5^\circ$.

Donnée:

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5.1$$