

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.**
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies : "i/nombre total".**
- **Respecter les notations de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question posée.**
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

### Ex 1 : Bleu de bromothymol BBT

Les indicateurs colorés de pH sont des entités chimiques qui ont la propriété de changer de couleur en fonction du pH de la solution aqueuse qui les contient.

Utilisés au XVIII<sup>e</sup> siècle pour des dosages acido-basiques, les premiers indicateurs colorés étaient naturels : extraits de tournesol, de chou rouge, d'artichaut ou de betterave. Le XIX<sup>e</sup> siècle voit l'essor de la chimie organique et la mise au point de nouvelles substances qui serviront d'indicateurs colorés.

On étudie ici le bleu de bromothymol, que l'on note souvent BBT.

Il constitue un couple acide/ base dont la forme acide, notée  $\text{HIn}$ , et la forme basique, notée  $\text{In}^-$ , ont des teintes différentes en solution aqueuse. Comme pour tout couple acido-basique, on associe à un indicateur coloré de pH son  $\text{pK}_A$ .

**La partie A a pour but de déterminer son  $\text{pK}_A$  et la partie B correspond à l'étude d'un titrage acido-basique en présence de bleu de bromothymol.**

#### Partie A : Détermination du $\text{pK}_A$ du BBT par spectrophotométrie

- 1) Donner l'équation bilan de la réaction associée à la constante d'acidité  $K_A$  du couple  $\text{HIn}/\text{In}^-$ .
- 2) On considère une solution d'indicateur coloré à l'équilibre. Etablir la relation entre le  $\text{pK}_A$ , les concentrations  $[\text{HIn}]$  et  $[\text{In}^-]$  et le pH.
- 3) Construire le diagramme de prédominance du couple  $\text{HIn}/\text{In}^-$ .

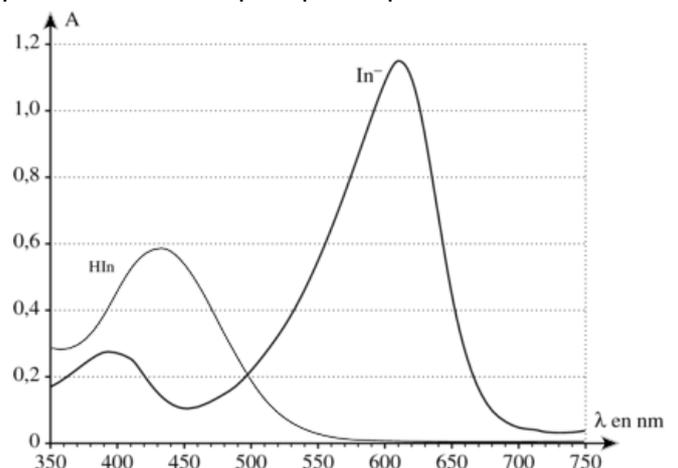
La valeur du  $\text{pK}_A$  d'un indicateur coloré peut s'obtenir expérimentalement par spectrophotométrie.

À l'aide d'un spectrophotomètre, on relève les variations de l'absorbance  $A$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  de la radiation lumineuse traversant la solution de BBT.

On réalise deux spectres d'absorbance :

- L'un pour une solution où l'acide  $\text{HIn}$  est majoritaire : courbe notée  $\text{HIn}$  ;
- L'autre pour une solution où la base  $\text{In}^-$  est majoritaire : courbe notée  $\text{In}^-$ .

- 4) A l'aide de ces spectres, préciser la couleur de la forme acide et celle de la forme basique du BBT.



On considère trois solutions de BBT. Elles sont telles que la concentration totale C en BBT est constante :  $C = [HIn] + [In^-]$ . En revanche, le pH et donc la proportion de forme basique varie d'une solution à une autre. On mesure l'absorbance A de ces trois solutions à la longueur d'onde  $\lambda_0 = 450 \text{ nm}$ , longueur d'onde où HIn et  $In^-$  absorbent. A cette longueur d'onde, on note  $\epsilon_a$  le coefficient d'extinction molaire de l'acide HIn et  $\epsilon_b$  le coefficient d'extinction molaire de la base  $In^-$ .

- 5) Comment nomme-t-on la loi permettant de relier l'absorbance  $A(\lambda_0)$  à la concentration d'une espèce qui absorbe le rayonnement de longueur d'onde  $\lambda_0$ ? En déduire l'expression de l'absorbance A de la solution, à 450 nm, en fonction de  $[HIn]$ , de  $[In^-]$ , des coefficients d'extinction molaire et de la largeur L de la cuve.

On obtient les résultats suivants :

Solution	1 : fortement acide	2 : fortement basique	3 : pH = 7,0
Absorbance	$A_1 = 0,196$	$A_2 = 0,076$	$A_3 = 0,140$

- 6) Vérifier que le rapport des concentrations en formes basique et acide dans la 3<sup>e</sup> solution peut s'écrire :

$$\frac{[In^-]_3}{[HIn]_3} = \frac{A_1 - A_3}{A_3 - A_2}$$

- 7) En déduire que le  $pK_A$  du BBT vaut 7,1.

### Partie B : Utilisation du BBT pour un titrage

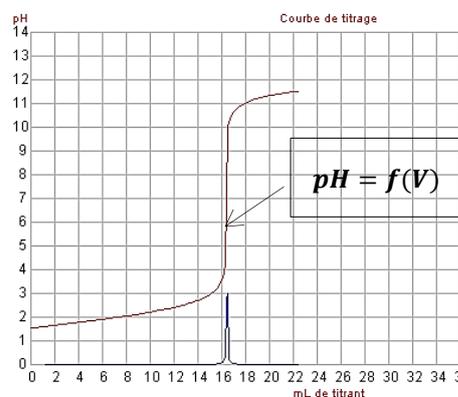
Au laboratoire, un flacon de solution aqueuse d'acide chlorhydrique ( $H^+_{(aq)}, Cl^-_{(aq)}$ ) a une concentration molaire  $C_A$  inconnue. Le but de cette partie est de déterminer par titrage la concentration  $C_A$  de cette solution notée S.

**Protocole :** on prélève avec précision un volume  $V_S = 10,0 \text{ mL}$  de la solution S que l'on verse dans un erlenmeyer. On titre cet échantillon par de la soude ( $Na^+_{(aq)}, HO^-_{(aq)}$ ) dont la concentration molaire est  $C_B = 1,00 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ , en présence de quelques gouttes de bleu de bromothymol de  $pK_A = 7,1$ . On obtient un volume équivalent  $V_E = 16,5 \text{ mL}$ .

- 1) Avec quelle verrerie prélève-t-on le volume  $V_S$  de la solution S ?
- 2) Schématiser le dispositif expérimental en précisant le contenu des verreries.
- 3) Quel est le rôle du BBT ?
- 4) Donner l'équation bilan de la réaction support du titrage.
- 5) Que vaut la constante d'équilibre de cette réaction. Commenter.
- 6) Déterminer la concentration molaire  $C_A$  de la solution S.

Avant de réaliser expérimentalement le titrage, on l'a simulé. On obtient la courbe  $pH = f(V)$  ci-contre.

- 7) A l'aide de cette simulation, expliquer pourquoi le BBT est un indicateur coloré qui convient pour effectuer ce dosage.



## Ex 2 : Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire = IRM

L'IRM, qui s'utilise dans des conditions quasi-naturelles et même in vivo, est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent  $\vec{B}_0$  combiné avec un faible champ perturbateur oscillant. L'interaction de ces champs avec le moment magnétique d'une particule élémentaire (électron ou proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur l'environnement atomique de ces particules.

Dans ce sujet, nous étudierons quelques aspects de cette technique sans caractère exhaustif. Les questions ne font appel qu'à des éléments du programme de physique. Les candidats peuvent à tout moment utiliser un résultat donné par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes.

Données	
Constante de Boltzmann :	$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Facteur de Boltzmann associé à un système d'énergie E, en équilibre à la température T :	$\exp(-E/kT)$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Constante de Planck « réduite » :	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l'électron :	$-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Rayon de l'orbite 1s du modèle de Bohr :	$r_B = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Moment magnétique du proton :	$\mu_p = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
Conductivité du cuivre :	$\sigma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Développement limité de la fonction exponentielle autour de $x = 0$ :	$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

Précession : la précession est le nom donné au changement graduel d'orientation d'un vecteur qui décrit un cône dont l'axe est la direction de précession. Ce cône est parcouru à vitesse constante dans un sens donné.

# Partie I – Comportement d’une population de dipôles dans un champ magnétique

## I.1- Dipôles magnétiques

- Q1.** Définir le vecteur moment magnétique  $\vec{\mu}$  associé à une boucle circulaire de courant de rayon  $R$  et d’axe de révolution  $Oz$ , parcourue par une intensité  $I$ , dans le cadre de l’approximation dipolaire (**figure 1**). On note  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire de l’axe  $Oz$ . Le sens de rotation directe autour de l’axe  $Oz$  est le sens d’orientation de l’intensité algébrique.
- Q2.** Expliquer pourquoi une sphère chargée, en rotation autour d’un axe passant par son centre, est elle-aussi caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence).

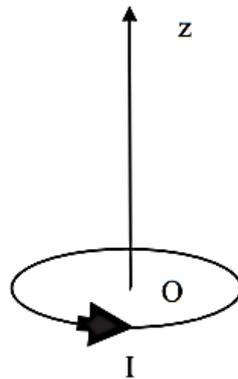


Figure 1 – Boucle de courant

Dans le cas du proton (noyau d’hydrogène) qui tourne sur lui-même (rotation propre de vecteur de rotation  $\vec{\Omega}$  autour d’un axe  $Oz$ ), on peut lui associer un moment magnétique  $\vec{\mu}_p$  colinéaire à  $\vec{\Omega}$  et de norme  $\mu_p$ .

- Q3.** Justifier par analyse dimensionnelle l’unité écrite dans le tableau de données.

Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{\mu}$  placé en  $O$  dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On rappelle les expressions de l’énergie potentielle  $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$  et du couple (moment de force) d’interaction  $\vec{\Gamma}(O) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$ .

- Q4.** En déduire quelles sont les 2 positions d’équilibre d’un moment dipolaire magnétique, dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_0$ , en précisant les valeurs associées de l’énergie potentielle.
- Q5.** Évaluer la différence d’énergie en eV entre les deux configurations d’équilibre d’un noyau d’hydrogène soumis à un champ magnétique permanent de 1 tesla (ordre de grandeur typique en RMN).
- Q7.** L’ordre de grandeur de l’énergie de liaison covalente de OH dans l’eau est de 5 eV et celui d’une énergie d’ionisation est de 13,6 eV. Justifier l’utilisation de la RMN en imagerie médicale, en considérant que la méthode fait passer le proton d’un état d’équilibre à l’autre.

## I.2- Rapports gyromagnétiques

Une boucle de courant est créée par un électron dans son mouvement orbital autour du noyau. On considère l'orbite circulaire, de rayon  $r_B$  et de centre  $O$ , contenue dans le plan  $xOy$ . Le vecteur vitesse de l'électron s'écrit  $\vec{v} = v\vec{t}$  avec  $\vec{t}$  le vecteur unitaire tangent au cercle orienté dans le sens direct autour de  $O$ .

**Q13.** Exprimer le moment magnétique  $\vec{\mu}_e = \mu_e \vec{e}_z$  associé à cette boucle de courant en fonction du rayon  $r_B$ , de la vitesse  $v$ , du vecteur  $\vec{e}_z$  et de constantes fondamentales.

**Q14.** Exprimer le moment cinétique de l'électron, par rapport au point  $O$ ,  $\vec{\sigma}_O = \sigma_e \vec{e}_z$  en fonction des mêmes paramètres.

**Q15.** Exprimer le rapport gyromagnétique correspondant  $\gamma_e = \frac{\mu_e}{\sigma_e}$  en fonction des constantes fondamentales et calculer la valeur numérique du rapport gyromagnétique de l'électron.

Le corps humain est essentiellement constitué d'eau : l'hydrogène représente 10 % de la masse corporelle, c'est-à-dire 86 % de la composition chimique de notre organisme. On étudiera donc, par la suite, le comportement de ces protons soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

On peut, comme dans l'exemple de l'électron, associer au proton un rapport gyromagnétique égal au rapport de son moment magnétique et de son moment cinétique. Pour l'hydrogène  $H$  isolé, le rapport gyromagnétique, qui vaut  $\gamma_p = 2,67 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$ , est associé à un moment cinétique quantifié qui ne peut prendre que les valeurs  $\pm \hbar/2$ .

**Q16.** Les valeurs ci-dessus sont-elles conformes à la valeur du moment magnétique  $\mu_p$  ?

## I.3- Précession d'un dipôle

On écarte un dipôle d'un angle  $\alpha$  par rapport à la position d'équilibre stable dans un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .

**Q19.** Écrire l'équation différentielle caractéristique de l'évolution du vecteur moment dipolaire sous la forme  $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$  en précisant ce que vaut  $\vec{\omega}_0$ .

**Q20.** Montrer que sa norme se conserve et que la projection du moment sur l'axe du champ magnétique se conserve aussi.

**Q21.** Décrire le mouvement de la projection du vecteur dans un plan orthogonal au champ magnétique, en précisant ce que représente  $\|\vec{\omega}_0\| = \omega_0$ .

**Q22.** Décrire le mouvement complet du dipôle en vous appuyant sur un dessin. Préciser le sens du mouvement de précession.

Lorsque les protons étudiés se trouvent dans une molécule (ou un cristal), les liaisons chimiques entre atomes modifient la fréquence de résonance précédente par modification du rapport gyromagnétique. Mais ces effets sont très petits (ils sont généralement mesurés en parties par million ou ppm). Il faut donc des instruments très sensibles pour distinguer entre protons libres et protons engagés dans une liaison chimique.

#### I.4- Précession de l'aimantation

À l'état naturel, les vecteurs moments dipolaires des noyaux d'hydrogène sont répartis dans toutes les directions et il n'y a pas d'effet magnétique global pour un échantillon. Par contre, en présence d'un champ magnétique extérieur, l'hydrogène aura des propriétés magnétiques caractérisées par un vecteur moment magnétique global volumique appelé aimantation  $\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$ , la somme étant réalisée sur tous les noyaux d'hydrogène composant l'unité de volume. En IRM, c'est ce vecteur aimantation  $\vec{M}$ , obtenu en présence d'un champ magnétique extérieur, qui permet d'obtenir des images des tissus du corps humain.

On considère l'état d'équilibre thermique d'un échantillon contenant des hydrogènes en présence d'un seul champ fort permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On suppose, pour simplifier, que le système des dipôles magnétiques associés aux protons peut être décrit comme un système à 2 états ne pouvant occuper que les positions parallèles (vecteur moment dipolaire et champ magnétique de même sens) ou antiparallèles (vecteur moment dipolaire et champ magnétique de sens contraire), décrites à la question Q4.

**Q23.** Comment est orienté le vecteur aimantation de norme  $M_0$  ?

On considère que la population de dipôles, placés dans le champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0$ , en équilibre thermique à la température  $T$ , obéit à la statistique de Boltzmann.

On introduit  $N_+$  la densité volumique de dipôles de plus grande énergie (cf Q4) et  $N_-$  la densité volumique de dipôles de plus faible énergie (cf Q4).

L'étude statistique permet d'évaluer  $\eta = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+}$  la différence relative de population entre les deux

états :  $\eta \approx \frac{\mu_p B_0}{kT}$  avec  $k$  la constante de Boltzmann.

**Q24.** Soit  $N$  le nombre de noyaux d'hydrogène par unité de volume, montrer que  $M_0 = \eta \mu_p N$ .

En mécanique quantique, le moment cinétique du noyau d'hydrogène est quantifié en projection sur l'axe Oz par  $\sigma_z = \pm \frac{\hbar}{2\pi} S = \pm \hbar S$ , avec  $S = 1/2$ .

**Q25.** Exprimer  $M_0$  à partir du nombre  $N$  de noyaux d'hydrogène par unité de volume, du rapport gyromagnétique  $\gamma_p$  du proton, du champ magnétique  $B_0$ , de la température  $T$  et des constantes de Planck et de Boltzmann.

**Q26.** Évaluer la concentration volumique des noyaux d'hydrogène (exprimée en  $m^{-3}$ ) en assimilant le corps humain à de l'eau (masse molaire de l'eau  $H_2O$  :  $m = 18 \text{ g.mol}^{-1}$  et masse volumique de l'eau  $\rho = 1,0 \text{ g.cm}^{-3}$ ).

**Q27.** Comparer le champ créé par ce dipôle global à une distance de 1 m sur son axe au champ permanent  $B_0 = 1 \text{ T}$ . On rappelle qu'un moment magnétique  $\vec{M} = M \vec{e}_z$ , placé en O point origine des coordonnées, crée un champ égal à  $\vec{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 M (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi r^3}$  en un point P de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ .

**Q28.** Justifier l'introduction d'un champ perturbateur qui change la direction de l'aimantation.

## Partie II – Les champ magnétiques

### II.1- Création d'un champ $\vec{B}_1$ « tournant »

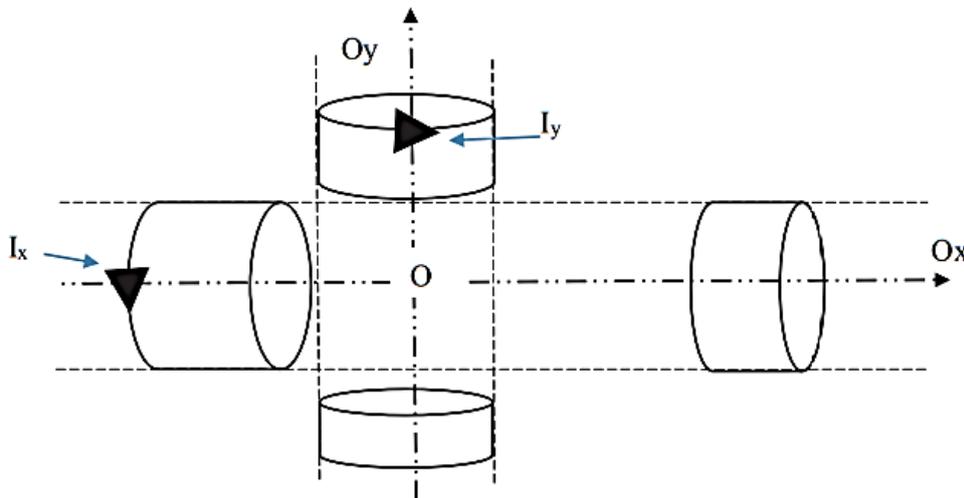
On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'ARQS : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables  $i(t)$ , comme en magnétostatique. En particulier, on peut utiliser le théorème d'Ampère.

**Q32.** Énoncer le théorème d'Ampère.

**Q33.** Après avoir précisé les symétries du champ magnétique créé par un solénoïde unique infini d'axe  $\Delta$ , qui contient  $n$  spires par unité de longueur parcourues par une intensité  $I$ , établir que celui-ci sépare l'espace en deux zones de champ uniforme.

**Q34.** On admet que le champ extérieur est nul : établir l'expression du champ intérieur créé par le solénoïde unique en fonction de  $\mu_0$ ,  $n$ ,  $I$  et le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  de  $\Delta$ , l'orientation du courant étant celle qui correspond au sens direct autour de  $\vec{u}_\Delta$ .

On considère un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes  $Ox$  et  $Oy$  perpendiculaires concourants en  $O$  comme l'indique la **figure 5**. Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur un cylindre de rayon  $R$  comportant  $n$  spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe  $Oy$  sont parcourues par une intensité  $I_y = I_0 \cos(\Omega t + \alpha)$  et celles du solénoïde d'axe  $Ox$  par une intensité  $I_x = I_0 \cos(\Omega t)$ . L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.



**Figure 5** – Configuration des solénoïdes

Les solénoïdes sont infiniment longs, seules quelques spires ont été représentées.

**Q35.** Établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage  $\alpha = \pi/2$ , est un champ « tournant »  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}$ , c'est-à-dire un champ de norme constante  $B_1$  porté par une direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  qui tourne à vitesse uniforme dans le plan  $xOy$ . On précisera sa norme  $B_1$  et sa vitesse de rotation  $\omega$ .

Il est en réalité difficile de produire des champs tournants autour des patients. On utilise donc un champ oscillant créé par une bobine unique d'axe  $Ox$  :  $\vec{B}'_1 = 2B_1 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ .

**Q36.** Montrer que ce champ est équivalent à la superposition de 2 champs de même amplitude (à préciser) qui tournent en sens opposé à la même vitesse.

## II.2- Création d'un champ permanent intense $\vec{B}_0$

On utilise un solénoïde « épais » (épaisseur  $e = R_2 - R_1$ ) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur  $L \gg R_2$ ) de même axe Oz. Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté  $a = 1,0 \text{ mm}$ , enroulées sur un cylindre de longueur  $L = 4,0 \text{ m}$ , depuis un rayon  $R_1 = 20 \text{ cm}$  jusqu'à un rayon  $R_2 = 25 \text{ cm}$ . Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu  $I_0$  uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz. La situation est schématisée sur la **figure 6**. Les sections carrées sont dans les plans  $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$  c'est-à-dire en positionnement radial.

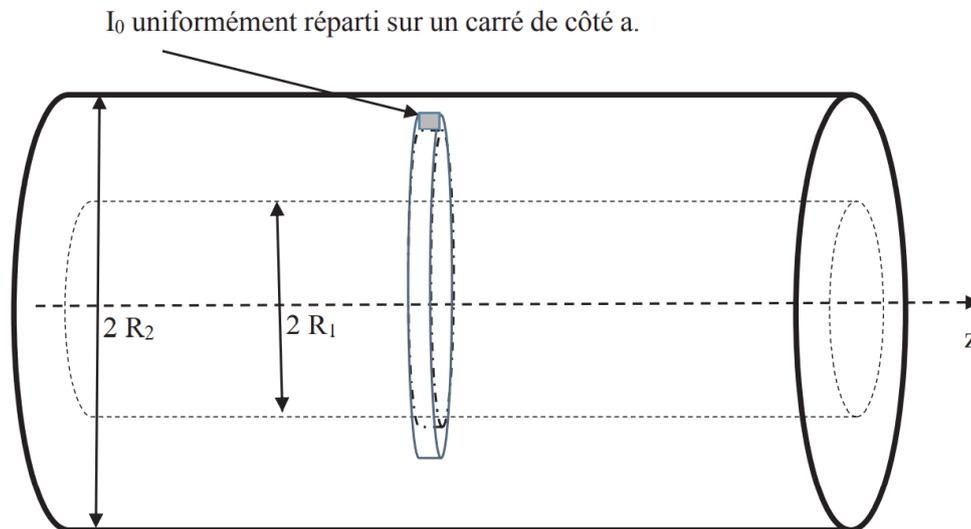


Figure 6 – Solénoïde épais

- Q37. Calculer le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}$  pour  $R_2 > r > R_1$ .  
Q38. Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut  $B = \mu_0 \frac{I_0}{a^2} (R_2 - R_1)$ .  
Q39. Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?

### **Ex 3 : Gouttes d'eau**

Dans les parties I et II (mécanique du point) et II (électrostatique), on s'intéresse d'abord à la vitesse limite de chute des gouttes de pluie et à la mesure de leurs diamètres.

Dans tout le sujet, on suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté  $D$ , est le millimètre.

#### **Partie I. Vitesse des gouttes de pluie**

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre  $D$  et de masse volumique  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On prendra pour l'air une masse volumique égale à  $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe  $Oz$  est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut  $\vec{g} = g\vec{e}_z$  avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

**Q1.** Définir " référentiel galiléen ". Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

**Q2.** On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse  $v$  de la goutte. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \text{ avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

**Q3.** En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

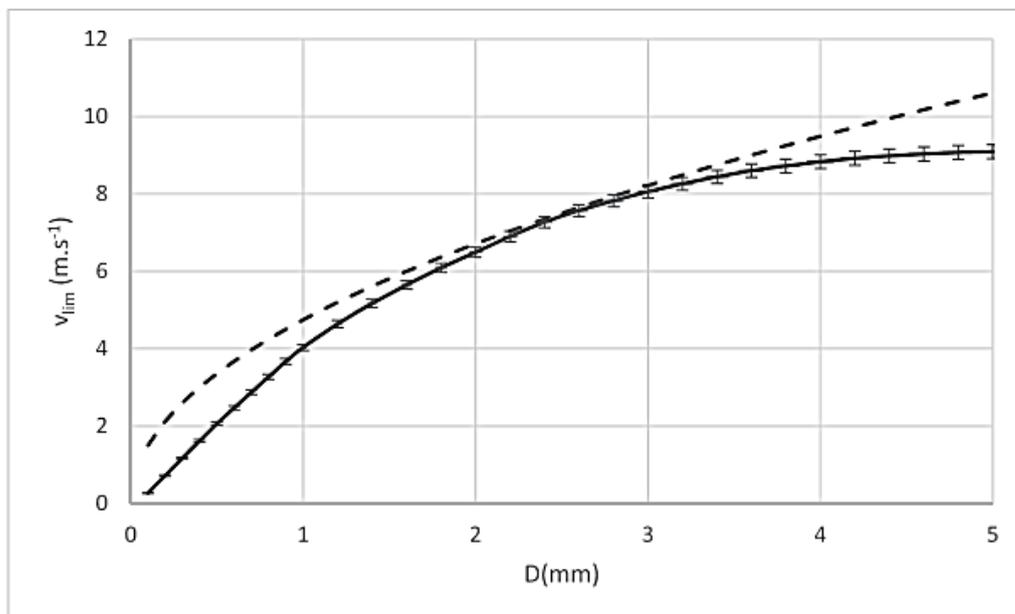
$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D}\vec{e}_z$$

où  $K$  est un coefficient à exprimer en fonction de  $\rho$ ,  $\rho_a$ ,  $C$  et de  $g$ .

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la **figure 1** en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

**Q4.** Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de **Q1** à **Q3** n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?



**Figure 1** - Influence du diamètre sur la vitesse limite

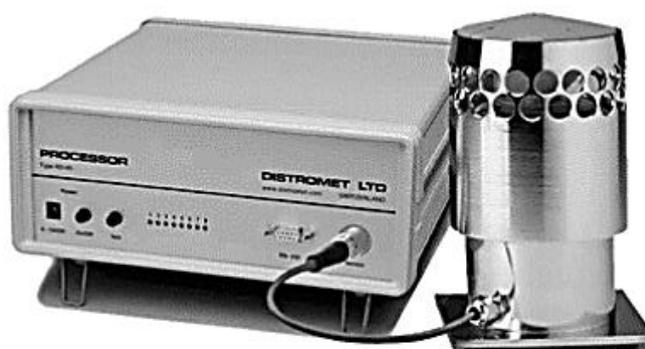
Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter").

## Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre  $D$  qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overline{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D} \overline{e_z} \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (**photo 1**).



**Photo 1** - Disdromètre Joss-Waltvogel

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse  $m(D)$  ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon  $R$  et de masse  $M$ , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note  $k$  la raideur du ressort liant la platine au support,  $l_0$  sa longueur à vide et  $\lambda$  le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$ .

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force  $\vec{F}(t) = F(t)\vec{e}_z$  verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est  $Z(t)$  (figure 2).

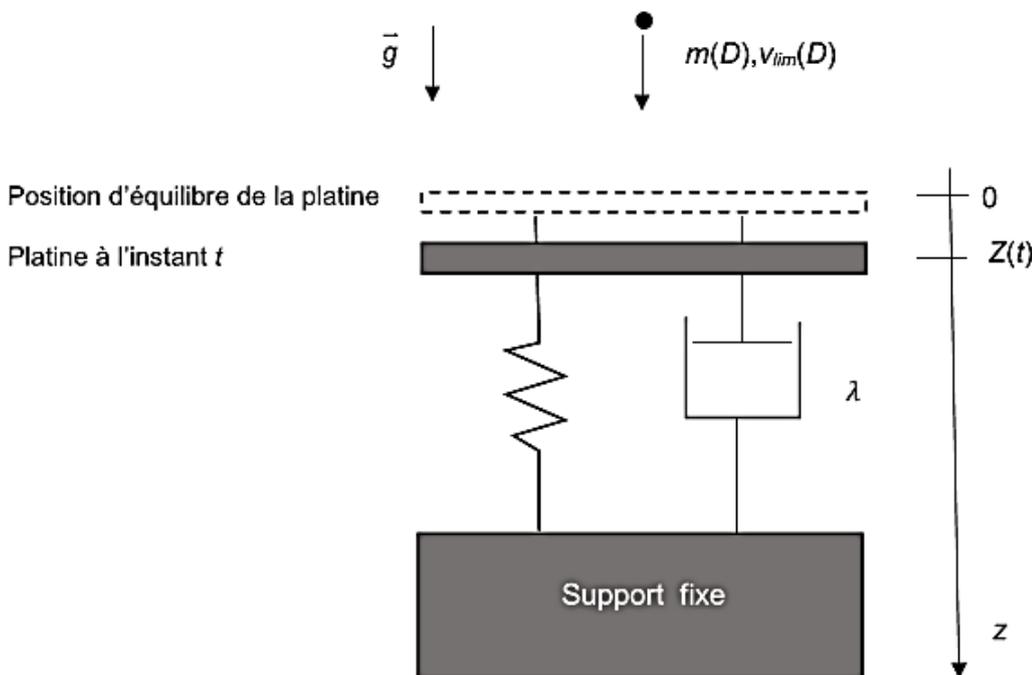


Figure 2 - Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur  $l_{\text{éq}}$  du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant  $Z(t)$  à  $F(t)$  est :

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients  $\gamma$  et  $\beta$  en fonction de  $k$ ,  $M$  et de  $\lambda$ .

La force  $F(t)$  est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$  pour  $0 < t < \tau$  ;
- $F = 0$  pour  $t > \tau$ .

**Q7.** Donner la signification physique de  $\tau$  et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

On utilise en pratique un facteur correctif  $\xi = 0,65$  tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer  $\tau$  pour  $D = 2,5 \text{ mm}$ .

**Q8.** On se place à  $0 \leq t \leq \tau(D)$  et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients  $\beta$  et  $\gamma$  ?

On se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour  $0 \leq t \leq \tau$  :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[ 1 - \left( 1 + \gamma \frac{t}{2} \right) e^{-\gamma t/2} \right].$$

c) Comment choisir  $\gamma$  pour réaliser  $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$  ? Montrer alors que  $Z(\tau)$  est proportionnel à

$D^\alpha$  et donner la valeur de  $\alpha$ .

d) Tracer l'allure de  $Z(t)$  pour  $0 \leq t \leq 2\tau$ .

e) Comment la mesure de  $Z(t)$  permet-elle de connaître  $D$  ?

### Partie III - Disdromètre à impact avec piézoélectrique

Ce disdromètre est un disdromètre à impact utilisant un capteur piézoélectrique (photo 2).

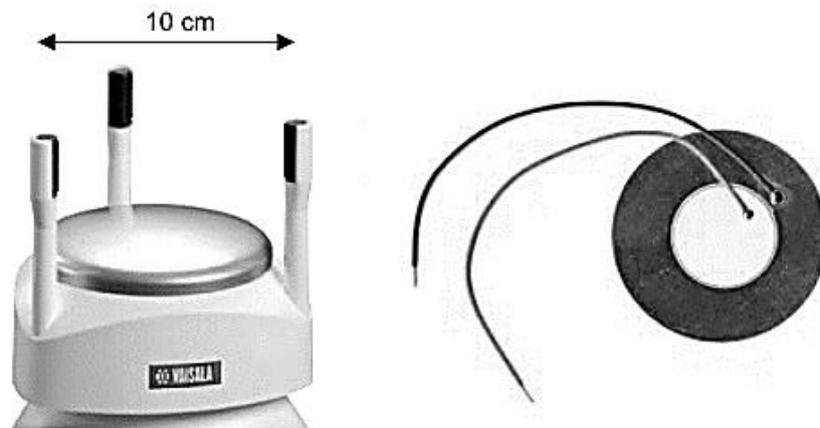


Photo 2 - (à gauche) Disdromètre Vaisala / (à droite) Capteur piézoélectrique

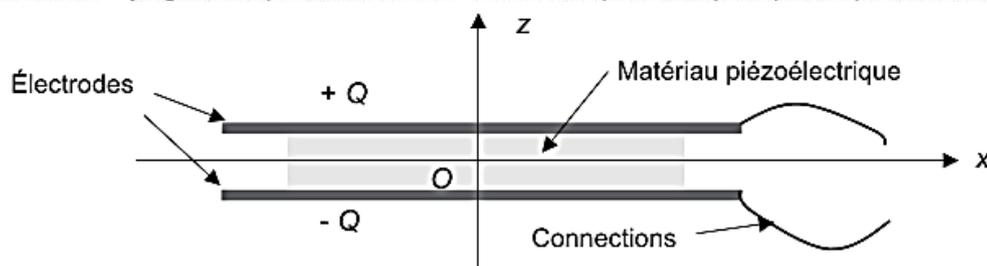


Figure 3 - Modélisation du capteur piézoélectrique

Les cristaux piézoélectriques, par exemple le quartz, génèrent une tension lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique et ils se déforment lorsqu'ils sont soumis à une tension électrique.

On modélise le capteur piézoélectrique par l'ensemble de deux électrodes planes de surface  $S$  chargées  $+Q$  et  $-Q$  et séparées par le matériau piézoélectrique, d'épaisseur  $e$  (figure 3).

On considère tout d'abord l'électrode chargée  $+Q$  : on la modélise par un plan infini d'épaisseur nulle, situé en  $z = e/2$  et on cherche le champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par cette distribution placée dans le vide.

**Q9.** En étudiant les symétries, puis les invariances de la distribution, donner la direction du champ électrique  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  quelconque de l'espace et les coordonnées dont ce champ dépend.

**Q10.** En utilisant un théorème d'électromagnétisme à énoncer, calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

**Q11.** En déduire l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)_{\text{vide}}$  créé par l'association des deux électrodes chargées  $+Q$  et  $-Q$ , en un point  $M$  entre les deux électrodes s'il y avait le vide. Dans un matériau ayant une permittivité  $\epsilon$ , on remplace la permittivité diélectrique du vide par  $\epsilon$ . En déduire le champ  $\vec{E}(M)_{\text{piezo}}$  à l'intérieur du matériau piézoélectrique.

**Q12.** On admet que la charge  $Q$  est proportionnelle à la force  $F(t)$  exercée par une goutte sur le capteur lors de son impact. Montrer, en utilisant la modélisation de  $F(t)$  proposée en haut de la page 12 que la tension  $u(t)$  aux bornes du capteur piézoélectrique est proportionnelle à  $D^3$ .

## Ex 4 : Caractéristiques thermiques d'un matériau biosourcé : le Kairlin®

### Partie I - Contexte de l'étude

Source : <https://www.kairos-jourdain.com/fr/environnement/kairlin>

Véritable révolution dans le domaine des matériaux, les composites offrent de nombreux avantages comparativement aux matériaux standards : performances mécaniques supérieures, faible masse volumique ou durée de vie améliorée... Ces avantages sont obtenus grâce à leur structure composée d'un renfort, constituant l'ossature, et d'une matrice ou résine, assurant la cohésion du matériau.

Issu du bureau d'étude de l'entreprise Kairos, le Kairlin® (**figure 1**), est un matériau bio-composite conçu à partir de fibres de lin et de composants 100 % végétaux destiné à la construction de voiliers de course. Le respect de l'environnement a été l'un des principaux critères considéré lors du développement du produit. Désireux d'élargir son offre et de permettre l'emploi du Kairlin® au plus grand nombre, Kairos envisage d'élargir son usage à l'industrie du bâtiment comme isolant thermique et phonique.

Ce sujet vise ainsi à déterminer quelle devra être l'épaisseur minimum du composite permettant de garantir des performances thermiques conformes aux recommandations du gouvernement pour les usages du génie civil.



**Figure 1** - Le Kairlin®, un composite biosourcé

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

## II.1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le composite (figure 2) lorsque la température intérieure  $T(t, x = 0) = T_{int} = 20 \text{ °C}$  et la température extérieure  $T(t, x = L) = T_{ext} = 5 \text{ °C}$ . On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à  $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$ .

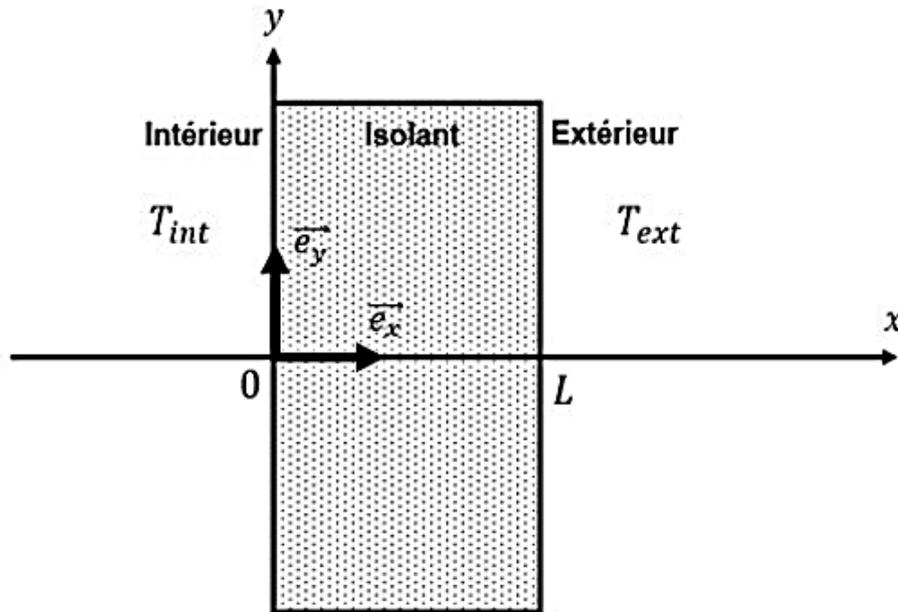


Figure 2 - Schématisation du problème

- Q1. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant  $x$  ?
- Q2. Donner, sans démontrer, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera  $T$  la température,  $\lambda_{isolant}$  la conductivité thermique de l'isolant,  $\rho$  la masse volumique et  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la question Q1.
- Q3. Donner les conditions aux limites,  $T(t > 0, x = 0)$  et  $T(t, x = L)$ , et les conditions initiales  $T(t = 0, x > 0)$  et  $T(t = 0, x = 0)$  de la fonction  $T(t, x)$ .
- Q4. Déterminer l'expression de la température en régime permanent  $T(x)$  en fonction des variables  $x$ ,  $T_{ext}$ ,  $T_{int}$  et  $L$ .
- Q5. Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique  $r_{th}$  de l'isolant en fonction de l'épaisseur  $L$  de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant  $\lambda_{isolant}$ .

**Q6.** Quelle doit être la valeur de l'épaisseur du composite pour obtenir une résistance thermique surfacique de  $r_{th} = 3,15 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$  ? On prendra  $\lambda_{isolant} = 0,037 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ .

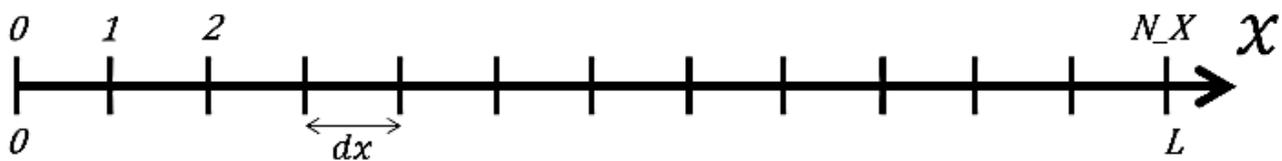
## II.2 - Étude numérique du régime transitoire

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

**Q7.** Exprimer la diffusivité thermique  $k_{th}$  en fonction de la conductivité thermique  $\lambda_{isolant}$ , de la masse volumique  $\rho$  et de la chaleur spécifique massique à pression constante  $c_p$ .

On discrétise l'intervalle  $[0, L]$ , représentant l'épaisseur de l'isolant, en  $N_X + 1$  points régulièrement espacés d'un pas spatial  $dx$  (**figure 3**). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.



**Figure 3** - Discretisation de l'isolant selon  $x$

**Q8.** Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle  $[0, L]$ . Donner l'expression de  $dx$  en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse  $x_i$  du  $(i)$ -ème point.

**Q9.** À l'aide de la formule de Taylor-Young, **équation (1)**, exprimer :

- $T(t + dt, x)$ , au premier ordre par rapport à  $t$ ,  $dt$  étant l'incrément temporel ;
- $T(t, x - dx)$ , au second ordre par rapport à  $x$  ;
- $T(t, x + dx)$ , au second ordre par rapport à  $x$ .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (1)$$

**Q10.** En déduire une expression de  $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$  en fonction de  $dx$ ,  $T(t, x)$ ,  $T(t, x - dx)$  et  $T(t, x + dx)$ .

La température à l'abscisse  $x_i$  à une date  $t_n$  sera notée :  $T_i^n$ .

**Q11.** En reformulant le résultat des **questions Q9 et Q10**, déterminer une relation entre :

- $T_i^{n+1}$ ,  $T_i^n$ ,  $\frac{\partial T(t, x)}{\partial t}$  et  $dt$  ;
- $T_{i+1}^n$ ,  $T_{i-1}^n$ ,  $T_i^n$ ,  $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$  et  $dx$ .

**Q12.** À partir des **questions Q2 et Q11**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt \cdot k_{th} \left( \frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n. \quad (2)$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

**Q13.** Donner l'**Instruction 1** permettant de définir la diffusivité thermique  $k_{th}$ .

- Q14.** L'équation (2) est-elle valable pour toute valeur de  $i \in \{0 \dots N_X\}$  ?
- Q15.** Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2.  $N_t$  intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps  $[0; t_{max}]$ .
- Q16.** Dédire de la question Q3 les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.
- Q17.** À partir de la question Q12, compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1      #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000    #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100      #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5       #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]      #Diffusivité thermique

#Discretisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

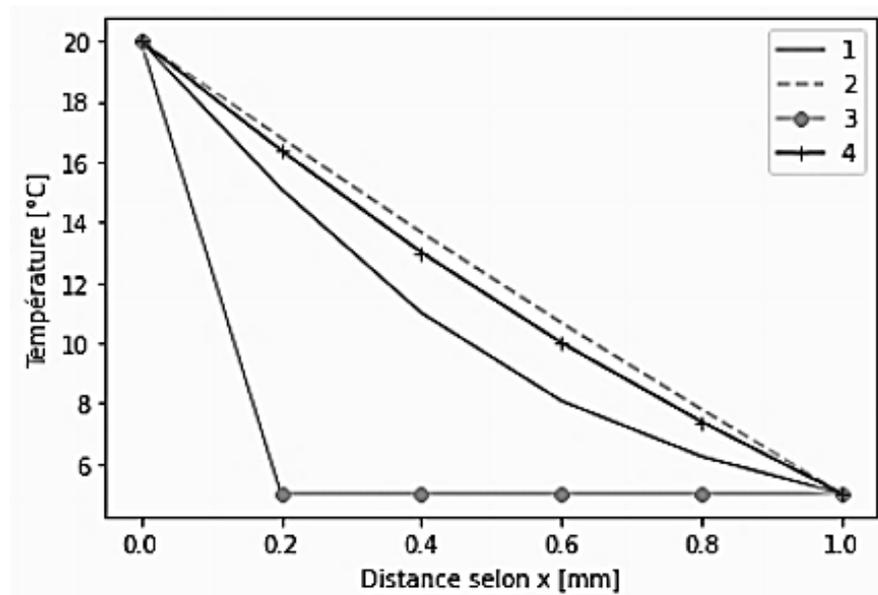
#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]

```

**Algorithme 1** - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en **figure 4** le profil de température dans le composite à plusieurs instants.



**Figure 4** - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

**Q18.** Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :  
 $t = [0 \text{ s}, 6\,000 \text{ s}, 12\,000 \text{ s}, 18\,000 \text{ s}]$ .

**Q19.** Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

# ANNEXE

## Quelques commandes utiles en langage Python

### I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **np.linspace(start, stop, N point) :**

- o description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
- o argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code>

- **np.zeros(i) :**

- o description : renvoie un tableau de taille i rempli de zéros.
- o argument d'entrée : un scalaire
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.zeros(5)</code>	<code>[0, 0, 0, 0, 0]</code>

- **np.array(liste) :**

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

- **A[i, j] :**

- o description : retourne l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A. Pour accéder à l'intégralité de la ligne i + 1 de la matrice A, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne j + 1 de la matrice A, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
- o argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau A
- o argument de sortie : l'élément (i + 1, j + 1) de la matrice A

Commande	Résultat
<code>A = np.array([[1, 2, 1], [4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code>	<code>3</code>

## Ex 5 : Détection des erreurs

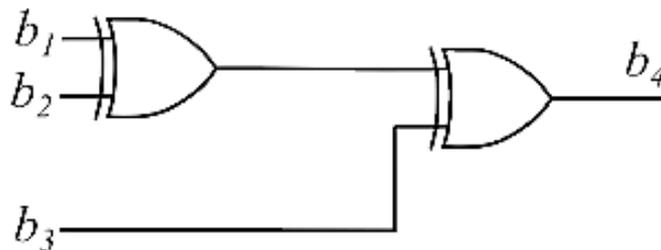
Lors de transmission de données numériques, il est fréquent que certains bits soient mal interprétés ou modifiés lors de leur transport à cause de phénomènes aléatoires, spécialement lors de transmission sans fil. Il est alors important de savoir détecter les erreurs (pour, par exemple, demander une retransmission) lorsqu'elles adviennent. On s'intéresse ici à quelques montages logiques simples permettant de détecter ces erreurs.

Le principe le plus simple à mettre en œuvre pour vérifier l'intégrité des données est le bit de parité. A chaque ensemble de bits de données, on adjoint un bit de parité qui code le nombre de 1 dans ces données : 0 si il y a un nombre pair de 1 dans les données, et 1 dans le cas contraire.

1. Quels sont les bits de parité des mots 1001000 et 1111001 ?

2. On s'intéresse au bit de parité d'un mot de deux bits. Montrer que la porte logique qui génère ce bit de parité à partir des deux bits en entrée est une porte classique dont on établira la table de vérité et dont on donnera le nom.

On propose maintenant l'association suivante :



3. Etablir la table de vérité de ce montage en fonction des valeurs des bits  $b_1$ ,  $b_2$  et  $b_3$ . Conclure sur le rôle de ce montage.

A la réception des données, on peut alors créer un montage (parity checker) permettant de déterminer si le bit de parité est bien compatible avec les données.

4. Proposer un montage utilisant uniquement des portes déterminées à la question 2 renvoyant un bit  $c$  codant la compatibilité des 3 bits de données  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  et du bit de parité  $b_p$ .

5. Citer deux inconvénients à cette méthode de contrôle de l'intégrité des données par bit de parité.

**-- FIN DE L'ENONCE --**