

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

Ex 1 : Propulseurs à hydrazine

La mission Parker Solar Probe a pour objectif d'approcher la couronne solaire. Au cours de la mission, il peut être nécessaire d'effectuer des corrections de trajectoire. Dans ce but, la sonde est équipée de 12 propulseurs à hydrazine N_2H_4 qui permettent de modifier sa vitesse.

Les propulseurs choisis utilisent l'hydrazine comme monergol : il n'y a pas de combustion. Par passage sur un catalyseur, l'hydrazine liquide se décompose en diazote et dihydrogène gazeux.

Q 49. Écrire l'équation de la réaction de décomposition de l'hydrazine et justifier son utilisation pour un moteur à propulsion.

Q 50. Définir le terme catalyseur.

La température de la chambre de décomposition doit être maîtrisée car le catalyseur se détériore à haute température.

Q 51. Justifier le caractère exothermique de la réaction de décomposition.

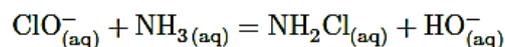
Q 52. Calculer la variation de température dans la chambre dans l'hypothèse d'une décomposition adiabatique et monobare.

Q 53. Quelles améliorations, permettant d'obtenir une meilleure estimation de la variation de température, peut-on apporter au modèle utilisé pour le calcul précédent ?

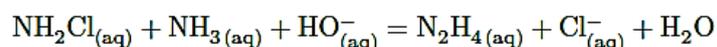
V.B – Synthèse de l'hydrazine

Pour des moteurs à propulsion, il est nécessaire d'utiliser de l'hydrazine de haute pureté (teneur massique supérieure à 99,5%). Une des méthodes utilisées est le procédé Raschig qui se décompose en deux étapes de synthèse suivies d'étapes de concentration et de purification pour obtenir l'hydrazine anhydre.

La première étape consiste en la formation à froid de monochloramine ($NH_2Cl_{(aq)}$) à partir d'ammoniac et d'hypochlorite de sodium :



La seconde étape de la synthèse est la formation de l'hydrazine par réaction entre la monochloramine et l'ammoniac, sous forte pression et en présence d'un large excès d'ammoniac :



Q 54. Justifier d'un point de vue thermodynamique l'intérêt d'utiliser un excès d'ammoniac pour cette étape.

Plusieurs études cinétiques ont été menées en laboratoire sur ces réactions dans le but d'optimiser les conditions de synthèse. Nous proposons ici d'étudier un modèle simplifié pour la seconde réaction. Les recherches ont établi que, sous certaines conditions, sa loi de vitesse peut s'écrire sous la forme $v = k[\text{NH}_2\text{Cl}]^\alpha[\text{NH}_3]$.

L'énergie d'activation est estimée à $74,0 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Un suivi cinétique par spectroscopie à $27,3 \text{ }^\circ\text{C}$ et $\text{pH} = 11,85$ a permis de déterminer la concentration en monochloramine au cours du temps à partir d'une solution de concentration initiale $2,00 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ en monochloramine et $1,00 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ en ammoniac. Les données sont regroupées dans le tableau 2.

t (min)	0	10	20	30	50	70	90
$[\text{NH}_2\text{Cl}]$ ($\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$)	$2,00 \times 10^{-3}$	$1,86 \times 10^{-3}$	$1,73 \times 10^{-3}$	$1,61 \times 10^{-3}$	$1,40 \times 10^{-3}$	$1,21 \times 10^{-3}$	$1,05 \times 10^{-3}$

Tableau 2

Q 55. Montrer que ces valeurs permettent de valider l'hypothèse d'un ordre $\alpha = 1$ par rapport à la monochloramine.

Q 56. Déterminer la valeur de la constante de vitesse k .

Q 57. Comment peut-on déterminer expérimentalement une énergie d'activation ?

Q 58. Proposer une estimation du temps de demi-réaction dans les conditions réelles de synthèse :

$$[\text{NH}_2\text{Cl}]_0 = 1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad [\text{NH}_3]_0 = 30 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad T = 130 \text{ }^\circ\text{C}$$

Q 59. La cinétique réelle est plus complexe et la constante de vitesse est dépendante du pH selon l'équation $k = k_1 + k_2 \times 10^{\text{pH}}$. Justifier que cette expression de la constante de vitesse peut se traduire par l'existence de deux chemins réactionnels dont l'un correspond à une catalyse par les ions HO^- .

Données numériques :

Hydrazine

Enthalpie standard de formation de l'hydrazine

$$\Delta_f H^\circ(\text{N}_2\text{H}_4) = 50,6 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Capacité thermique molaire standard à pression constante

$$C_{P,m}^\circ(\text{N}_2(\text{g})) = 29,1 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

$$C_{P,m}^\circ(\text{H}_2(\text{g})) = 28,8 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Densité de l'hydrazine liquide à $25 \text{ }^\circ\text{C}$

$$1,005$$

Masse molaire de l'hydrazine

$$32,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

Ex 2 : Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire = IRM

L'IRM, qui s'utilise dans des conditions quasi-naturelles et même in vivo, est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent \vec{B}_0 combiné avec un faible champ perturbateur oscillant. L'interaction de ces champs avec le moment magnétique d'une particule élémentaire (électron ou proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur l'environnement atomique de ces particules.

Dans ce sujet, nous étudierons quelques aspects de cette technique sans caractère exhaustif. Les questions ne font appel qu'à des éléments du programme MPSI/MP de physique. Les candidats peuvent à tout moment utiliser un résultat donné par l'énoncé pour répondre aux questions suivantes.

Données	
Constante de Boltzmann :	$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Facteur de Boltzmann associé à un système d'énergie E, en équilibre à la température T :	$\exp(-E/kT)$
Nombre d'Avogadro :	$N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Vitesse de la lumière dans le vide :	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Constante de Planck « réduite » :	$\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse de l'électron :	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Charge de l'électron :	$-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Rayon de l'orbite 1s du modèle de Bohr :	$r_B = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Moment magnétique du proton :	$\mu_p = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$
Conductivité du cuivre :	$\sigma = 6,0 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$
Développement limité de la fonction exponentielle autour de $x = 0$:	$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$

Précession : la précession est le nom donné au changement graduel d'orientation d'un vecteur qui décrit un cône dont l'axe est la direction de précession. Ce cône est parcouru à vitesse constante dans un sens donné.

Partie I – Comportement d’une population de dipôles dans un champ magnétique

I.1- Dipôles magnétiques

- Q1.** Définir le vecteur moment magnétique $\vec{\mu}$ associé à une boucle circulaire de courant de rayon R et d’axe de révolution Oz , parcourue par une intensité I , dans le cadre de l’approximation dipolaire (**figure 1**). On note \vec{e}_z le vecteur unitaire de l’axe Oz . Le sens de rotation directe autour de l’axe Oz est le sens d’orientation de l’intensité algébrique.
- Q2.** Expliquer pourquoi une sphère chargée, en rotation autour d’un axe passant par son centre, est elle-aussi caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence).

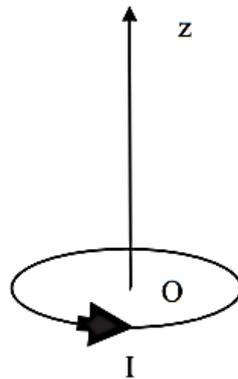


Figure 1 – Boucle de courant

Dans le cas du proton (noyau d’hydrogène) qui tourne sur lui-même (rotation propre de vecteur de rotation $\vec{\Omega}$ autour d’un axe Oz), on peut lui associer un moment magnétique $\vec{\mu}_p$ colinéaire à $\vec{\Omega}$ et de norme μ_p .

- Q3.** Justifier par analyse dimensionnelle l’unité écrite dans le tableau de données.

Soit un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ placé en O dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On rappelle les expressions de l’énergie potentielle $E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$ et du couple (moment de force) d’interaction $\vec{\Gamma}(O) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$.

- Q4.** En déduire quelles sont les 2 positions d’équilibre d’un moment dipolaire magnétique, dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B}_0 , en précisant les valeurs associées de l’énergie potentielle.
- Q5.** Évaluer la différence d’énergie en eV entre les deux configurations d’équilibre d’un noyau d’hydrogène soumis à un champ magnétique permanent de 1 tesla (ordre de grandeur typique en RMN).
- Q7.** L’ordre de grandeur de l’énergie de liaison covalente de OH dans l’eau est de 5 eV et celui d’une énergie d’ionisation est de 13,6 eV. Justifier l’utilisation de la RMN en imagerie médicale, en considérant que la méthode fait passer le proton d’un état d’équilibre à l’autre.

I.2- Rapports gyromagnétiques

Une boucle de courant est créée par un électron dans son mouvement orbital autour du noyau. On considère l'orbite circulaire, de rayon r_B et de centre O, contenue dans le plan xOy. Le vecteur vitesse de l'électron s'écrit $\vec{v} = v\vec{t}$ avec \vec{t} le vecteur unitaire tangent au cercle orienté dans le sens direct autour de O.

Q13. Exprimer le moment magnétique $\vec{\mu}_e = \mu_e \vec{e}_z$ associé à cette boucle de courant en fonction du rayon r_B , de la vitesse v , du vecteur \vec{e}_z et de constantes fondamentales.

Q14. Exprimer le moment cinétique de l'électron, par rapport au point O, $\vec{\sigma}_O = \sigma_e \vec{e}_z$ en fonction des mêmes paramètres.

Q15. Exprimer le rapport gyromagnétique correspondant $\gamma_e = \frac{\mu_e}{\sigma_e}$ en fonction des constantes fondamentales et calculer la valeur numérique du rapport gyromagnétique de l'électron.

Le corps humain est essentiellement constitué d'eau : l'hydrogène représente 10 % de la masse corporelle, c'est-à-dire 86 % de la composition chimique de notre organisme. On étudiera donc, par la suite, le comportement de ces protons soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

On peut, comme dans l'exemple de l'électron, associer au proton un rapport gyromagnétique égal au rapport de son moment magnétique et de son moment cinétique. Pour l'hydrogène H isolé, le rapport gyromagnétique, qui vaut $\gamma_p = 2,67 \cdot 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$, est associé à un moment cinétique quantifié qui ne peut prendre que les valeurs $\pm \hbar/2$.

Q16. Les valeurs ci-dessus sont-elles conformes à la valeur du moment magnétique μ_p ?

I.3- Précession d'un dipôle

On écarte un dipôle d'un angle α par rapport à la position d'équilibre stable dans un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Q19. Écrire l'équation différentielle caractéristique de l'évolution du vecteur moment dipolaire sous la forme $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$ en précisant ce que vaut $\vec{\omega}_0$.

Q20. Montrer que sa norme se conserve et que la projection du moment sur l'axe du champ magnétique se conserve aussi.

Q21. Décrire le mouvement de la projection du vecteur dans un plan orthogonal au champ magnétique, en précisant ce que représente $\|\vec{\omega}_0\| = \omega_0$.

Q22. Décrire le mouvement complet du dipôle en vous appuyant sur un dessin. Préciser le sens du mouvement de précession.

Lorsque les protons étudiés se trouvent dans une molécule (ou un cristal), les liaisons chimiques entre atomes modifient la fréquence de résonance précédente par modification du rapport gyromagnétique. Mais ces effets sont très petits (ils sont généralement mesurés en parties par million ou ppm). Il faut donc des instruments très sensibles pour distinguer entre protons libres et protons engagés dans une liaison chimique.

I.4- Précession de l'aimantation

À l'état naturel, les vecteurs moments dipolaires des noyaux d'hydrogène sont répartis dans toutes les directions et il n'y a pas d'effet magnétique global pour un échantillon. Par contre, en présence d'un champ magnétique extérieur, l'hydrogène aura des propriétés magnétiques caractérisées par un vecteur moment magnétique global volumique appelé aimantation $\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$, la somme étant réalisée sur tous les noyaux d'hydrogène composant l'unité de volume. En IRM, c'est ce vecteur aimantation \vec{M} , obtenu en présence d'un champ magnétique extérieur, qui permet d'obtenir des images des tissus du corps humain.

On considère l'état d'équilibre thermique d'un échantillon contenant des hydrogènes en présence d'un seul champ fort permanent $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On suppose, pour simplifier, que le système des dipôles magnétiques associés aux protons peut être décrit comme un système à 2 états ne pouvant occuper que les positions parallèles (vecteur moment dipolaire et champ magnétique de même sens) ou antiparallèles (vecteur moment dipolaire et champ magnétique de sens contraire), décrites à la question Q4.

Q23. Comment est orienté le vecteur aimantation de norme M_0 ?

On considère que la population de dipôles, placés dans le champ magnétique extérieur \vec{B}_0 , en équilibre thermique à la température T , obéit à la statistique de Boltzmann.

On introduit N_+ la densité volumique de dipôles de plus grande énergie (cf Q4) et N_- la densité volumique de dipôles de plus faible énergie (cf Q4).

L'étude statistique permet d'évaluer $\eta = \frac{N_- - N_+}{N_- + N_+}$ la différence relative de population entre les deux

états : $\eta \approx \frac{\mu_p B_0}{kT}$ avec k la constante de Boltzmann.

Q24. Soit N le nombre de noyaux d'hydrogène par unité de volume, montrer que $M_0 = \eta \mu_p N$.

En mécanique quantique, le moment cinétique du noyau d'hydrogène est quantifié en projection sur l'axe Oz par $\sigma_z = \pm \frac{\hbar}{2\pi} S = \pm \hbar S$, avec $S = 1/2$.

Q25. Exprimer M_0 à partir du nombre N de noyaux d'hydrogène par unité de volume, du rapport gyromagnétique γ_p du proton, du champ magnétique B_0 , de la température T et des constantes de Planck et de Boltzmann.

Q26. Évaluer la concentration volumique des noyaux d'hydrogène (exprimée en m^{-3}) en assimilant le corps humain à de l'eau (masse molaire de l'eau H_2O : $m = 18 \text{ g.mol}^{-1}$ et masse volumique de l'eau $\rho = 1,0 \text{ g.cm}^{-3}$).

Q27. Comparer le champ créé par ce dipôle global à une distance de 1 m sur son axe au champ permanent $B_0 = 1 \text{ T}$. On rappelle qu'un moment magnétique $\vec{M} = M \vec{e}_z$, placé en O point origine des coordonnées, crée un champ égal à $\vec{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 M (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}{4\pi r^3}$ en un point P de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) .

Q28. Justifier l'introduction d'un champ perturbateur qui change la direction de l'aimantation.

Ex 3 : A propos des araignées

Les araignées ou Aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. À ce jour, plus de 47 000 espèces subdivisées en 117 familles sont repertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varient typiquement de 1 jusqu'à $70 \mu\text{m}$. À diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. Dans la nature, l'usage que les araignées en font est multiple et dépend des espèces considérées : fil de sécurité pendant un saut pour fuir ou pour se déplacer (fil d'Ariane), tissage de toile pour piéger des proies, moyen de s'élever dans les airs et de voyager au gré des courants aériens pour les araignées montgolfières (fil de la Vierge), confection de catapultes pour la chasse, création de dômes pour le stockage d'air sous l'eau douce pour les espèces subaquatiques . . .

Nous proposons d'aborder quelques problèmes de physique relatifs aux araignées et plus particulièrement aux trois espèces représentées dans la figure ci-dessous (Fig. 1). Les applications numériques seront données avec un chiffre significatif. Les vecteurs sont indiqués par des flèches (\vec{v}) sauf s'ils sont unitaires et sont alors surmontés d'un chapeau ($\|\hat{e}_x\| = 1$). Les nombres complexes sont soulignés à l'exception de j tel que $j^2 = -1$. Un formulaire est fourni en fin d'énoncé.

Les 3 parties de ce problème sont indépendantes.

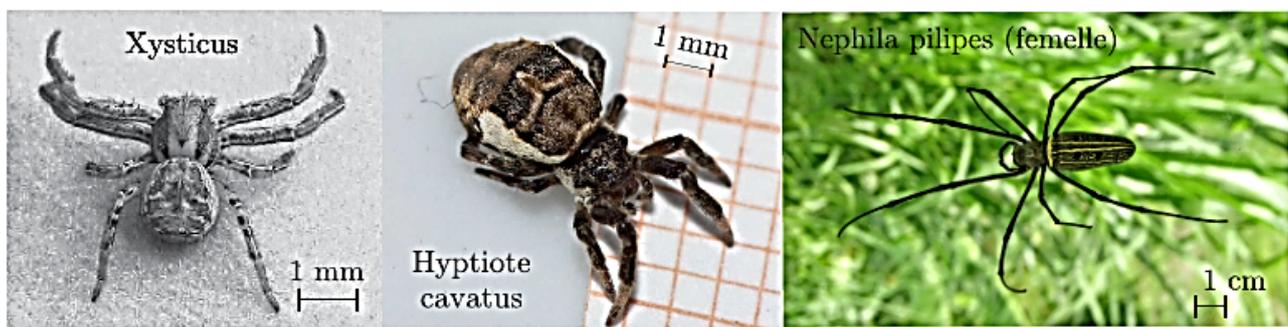


FIGURE 1 – *Xysticus sp.* est une araignée-crabe volante. *Hyptiote cavatus* est une araignée catapulte, tisseuse de toiles triangulaires. Les araignées *Nephila pilipes* fabriquent des fils dont les propriétés mécaniques rivalisent avec les meilleures fibres artificielles : ils peuvent être assemblés pour former des cordes de violon produisant un son au timbre exceptionnel. Source des images : Wikipédia.

I Des araignées volantes

Certaines araignées volantes dont la taille est comprise entre 2 et 7 mm parviennent, en tirant profit des forces électrostatiques, à décoller et à s'envoler. Elles arrivent ainsi à parcourir, au gré des vents, des distances considérables (plusieurs centaines de kilomètres) comme l'a observé pour la première fois, Charles Darwin, lors de son grand voyage à bord du *Beagle* de 1831 à 1836. Dans cette partie du problème, nous nous intéressons à la physique permettant d'expliquer un tel phénomène.

- – 1. En utilisant une schématisation sphérique rudimentaire pour modéliser ces araignées, estimer un ordre de grandeur m_g pour leur masse.

Par temps clair, le champ électrique, en tout point de la surface de la Terre est radial uniforme, dirigé vers le centre de la Terre et sa valeur moyenne vaut $E_0 = 120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. En première approximation on assimile localement l'atmosphère terrestre à un condensateur plan dont les deux armatures sont le sol terrestre et la couche de l'ionosphère située à l'altitude $z_0 = 60 \text{ km}$ de celui-ci.

- – 2. Évaluer la valeur de la densité surfacique moyenne de charge au niveau du sol, notée σ . Des mesures ont permis de montrer qu'il existe une différence de 360 kV entre l'ionosphère et le sol. Que pouvez vous conclure quant à la validité du modèle électrique atmosphérique proposé ?

Les araignées volantes positionnent leurs corps de manière à prendre le vent, en éjectant vers le ciel des fils de soie, qui grâce aux courants d'air et au champ électrique leur permettent de s'élever. Darwin nota que ces araignées décollent en présence au niveau du sol de légers courants d'air ascendants ayant des vitesses U de l'ordre de $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et que le nombre de fils fabriqués par celles-ci peut atteindre quelques dizaines.

On peut montrer que les forces hydrodynamiques sont insuffisantes pour permettre à elles seules de faire s'élever les araignées.

Darwin remarqua que les différents fils tissés par une même araignée s'écartent en éventail du fait d'une répulsion électrostatique. Pour corroborer cette hypothèse, on modélise chaque fil de soie comme un fil rigide isolant, de longueur L que l'on supposera inextensible dans un premier temps, possédant en son extrémité libre, une charge q . Ces charges placées dans le champ électrique terrestre interagissent entre elles. On suppose qu'il y a $2n$ fils et que les charges correspondantes se répartissent régulièrement sur le cercle formant la base d'un cône d'angle α en son sommet S (lequel correspond à l'extrémité commune des soies) avec la verticale (Fig. 2).

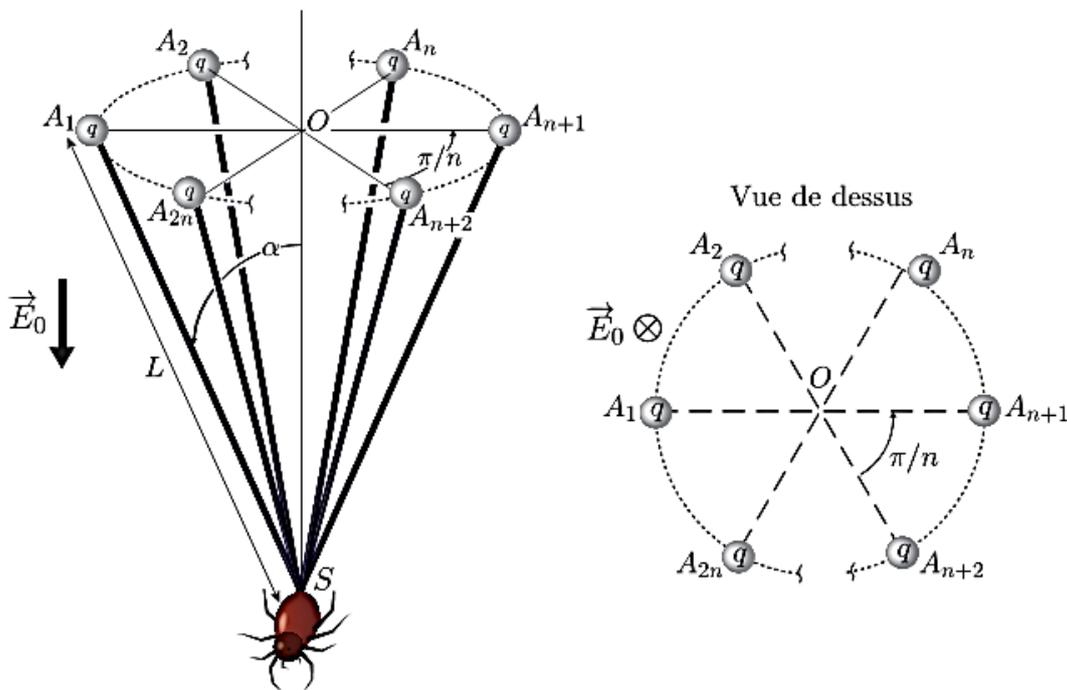


FIGURE 2 – Représentation schématique d'une araignée prête à décoller.

- – 3. Montrer que le potentiel électrique créé sur une charge par les $2n - 1$ autres charges s'exprime comme :

$$V = \frac{q}{p\pi\epsilon_0 L \sin \alpha} G(n) \text{ avec } G(n) - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)}$$

On précisera la valeur de l'entier p . On pourra éventuellement considérer les points diamétralement opposés A_k et A_{k+n} avec $1 \leq k \leq n$.

En déduire l'énergie d'interaction électrostatique du système total constitué des $2n$ charges en l'absence de champ électrique extérieur.

S'il n'est soumis qu'à ce potentiel, quelle est alors la forme de l'éventail à l'équilibre ?

On étudie le mouvement de cet éventail autour de sa position d'équilibre en supposant qu'à l'instant t tous les fils forment le même angle $\alpha(t)$ avec la verticale. On simplifie le système en considérant, d'une part, que la masse m de chaque fil est ponctuelle, située en leur milieu et, d'autre part, on néglige l'énergie potentielle de pesanteur et celle de déformation élastique devant l'électrostatique. On suppose finalement que S est fixe.

- – 4. Déterminer l'équation différentielle régissant ce mouvement. Discuter la stabilité de l'équilibre et établir l'expression de la période T , du mouvement au voisinage de la position d'équilibre en fonction de ϵ_0 , m , L , q et $G(n)$.
- – 5. Déterminer l'expression de l'énergie électrostatique du système lorsque celui-ci est maintenant immergé dans le champ électrique terrestre \vec{E}_0 existant au niveau du sol ainsi que l'équation permettant de déterminer la valeur de l'angle α à l'équilibre. Expliquer qualitativement comment varie l'ouverture d'équilibre de l'éventail en fonction respectivement de q , n , L et E_0 . On observe un angle $\alpha = 30^\circ$ pour un éventail constitué de $2n = 6$ soies longues de 1 mètre. Que vaut alors la charge q ? On donne $G(3) \simeq 38/(3\sqrt{3})$.
- – 6. Calculer le module de la force électrique s'exerçant sur l'araignée au niveau du sol pour une charge dont le module est de l'ordre du nanocoulomb. Par temps clair et uniquement par la force électrique, combien de fils sont-ils nécessaires pour soulever les plus petites araignées ? Commenter ce résultat.

II Propriétés mécaniques des fils d'araignée

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale ℓ_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke : $\frac{\delta\ell}{\ell_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S_0}$ où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

- – 9. Quelle est la dimension de E ?

Montrer que, dans ce régime, le comportement mécanique du fil peut être assimilé à celui d'un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction des données du problème.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur ℓ_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de ℓ_0 et situés sur une même horizontale. Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V, dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur ℓ .

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale. Cette configuration d'équilibre est représentée sur la figure 4.

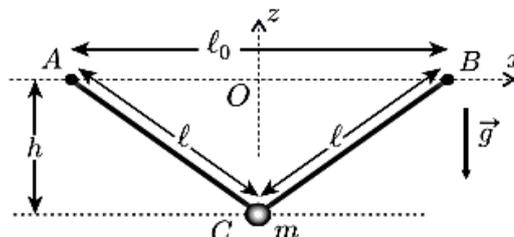


FIGURE 4 – Extension d'un fil.

- – 10. Établir, lorsque la masse m est suffisamment faible, la loi de puissance qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure 5 ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $\ell_0 = 5$ cm de rayon $a = 5 \mu\text{m}$ et différentes masses m suspendues.

- – 11. Vérifier que la loi obtenue à la question 10 est compatible avec l'expérience.

Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil ; en déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil. On pourra utiliser la figure 9 du formulaire.

L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc.

Elle garde alors cette position jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture.

La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{\text{max}} = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{\text{max}} = 800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

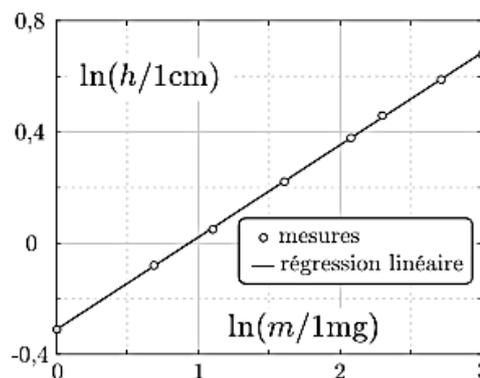


FIGURE 5 – Mesures de $h(m)$.

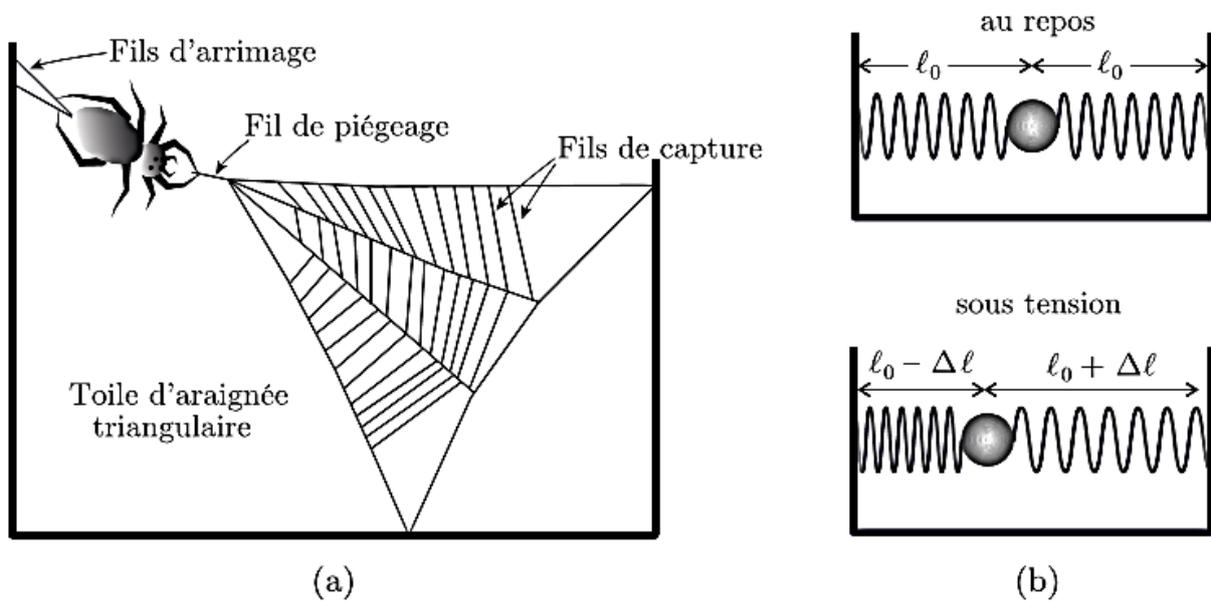


FIGURE 6 – (a) Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

- – 12. En modélisant la toile par un simple fil de soie dont on négligera la masse devant celle de l'araignée, estimer, en fonction de v_{\max} et a_{\max} , l'allongement maximum $\Delta\ell$ du fil avant que l'araignée ne relâche la tension (Fig. 6), ainsi que sa raideur k en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} .

Évaluer, en fonction de m , v_{\max} et a_{\max} , la puissance mécanique instantanée maximale \mathcal{P}_{\max} développée pendant le processus de capture.

Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $\mathcal{P} = 326 \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$ par kilo de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse à $m = 75 \text{ kg}$, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble.

Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $\ell = 25 \text{ m}$ sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(t = 0) = \pi/2$.

Il se laisse alors entraîner sans vitesse initiale. (Fig. 7).

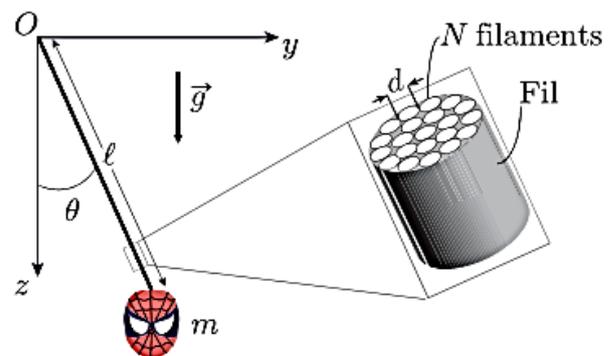


FIGURE 7 – Le vol de SPIDERMAN.

- – 13. Écrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g , l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

- – 14. Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèle.

Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10 \text{ MPa}$ et $a = 5 \mu\text{m}$, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne subissent pas une déformation supérieure à 1 % et donc pouvoir supporter SPIDERMAN lors de son vol ?

Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films ?

Formulaire

Détail de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien

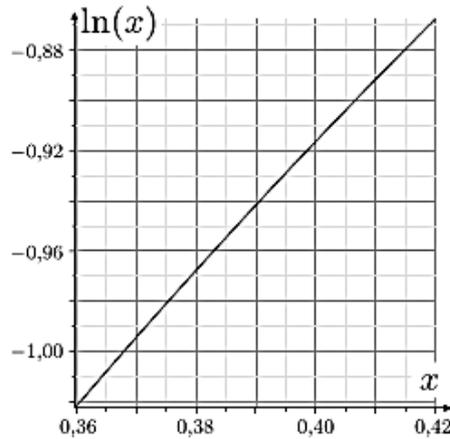


FIGURE 9 – Graphe de la fonction $\ln x$ pour $x \in [0,36; 0,42]$.

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z$$

Rayon terrestre	$R_t = 6400 \text{ km}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Accélération de pesanteur terrestre	$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse volumique de l'eau	$\rho_c = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Ex 4 : Caractéristiques thermiques d'un matériau biosourcé : le Kairlin®

Partie I - Contexte de l'étude

Source : <https://www.kairos-jourdain.com/fr/environnement/kairlin>

Véritable révolution dans le domaine des matériaux, les composites offrent de nombreux avantages comparativement aux matériaux standards : performances mécaniques supérieures, faible masse volumique ou durée de vie améliorée... Ces avantages sont obtenus grâce à leur structure composée d'un renfort, constituant l'ossature, et d'une matrice ou résine, assurant la cohésion du matériau.

Issu du bureau d'étude de l'entreprise Kairos, le Kairlin® (**figure 1**), est un matériau bio-composite conçu à partir de fibres de lin et de composants 100 % végétaux destiné à la construction de voiliers de course. Le respect de l'environnement a été l'un des principaux critères considéré lors du développement du produit. Désireux d'élargir son offre et de permettre l'emploi du Kairlin® au plus grand nombre, Kairos envisage d'élargir son usage à l'industrie du bâtiment comme isolant thermique et phonique.

Ce sujet vise ainsi à déterminer quelle devra être l'épaisseur minimum du composite permettant de garantir des performances thermiques conformes aux recommandations du gouvernement pour les usages du génie civil.



Figure 1 - Le Kairlin®, un composite biosourcé

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

II.1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le composite (figure 2) lorsque la température intérieure $T(t, x = 0) = T_{int} = 20 \text{ °C}$ et la température extérieure $T(t, x = L) = T_{ext} = 5 \text{ °C}$. On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$.

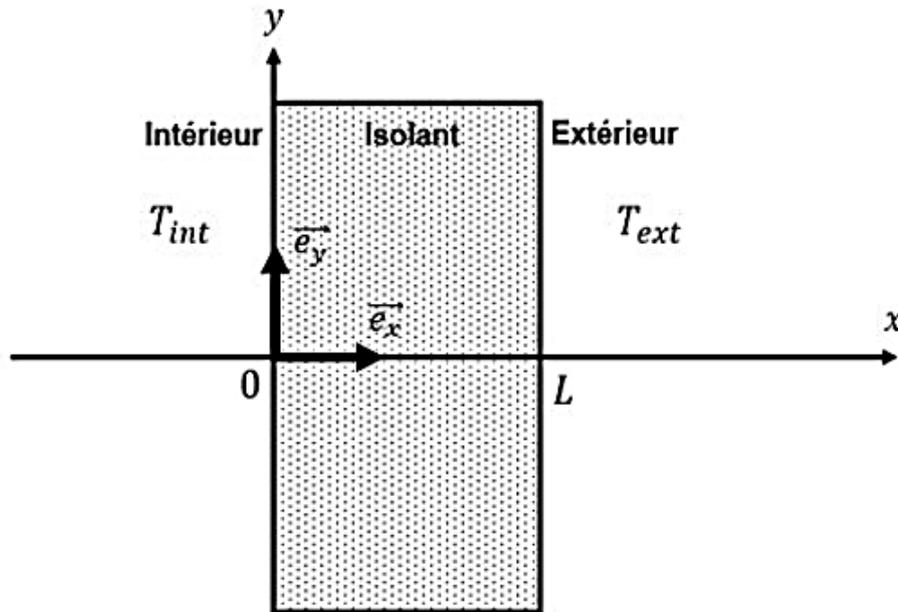


Figure 2 - Schématisation du problème

- Q1. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?
- Q2. Donner, sans démontrer, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, $\lambda_{isolant}$ la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la question Q1.
- Q3. Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.
- Q4. Déterminer l'expression de la température en régime permanent $T(x)$ en fonction des variables x , T_{ext} , T_{int} et L .
- Q5. Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique r_{th} de l'isolant en fonction de l'épaisseur L de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant $\lambda_{isolant}$.

Q6. Quelle doit être la valeur de l'épaisseur du composite pour obtenir une résistance thermique surfacique de $r_{th} = 3,15 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$? On prendra $\lambda_{isolant} = 0,037 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.2 - Étude numérique du régime transitoire

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

Q7. Exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction de la conductivité thermique $\lambda_{isolant}$, de la masse volumique ρ et de la chaleur spécifique massique à pression constante c_p .

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, représentant l'épaisseur de l'isolant, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (**figure 3**). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

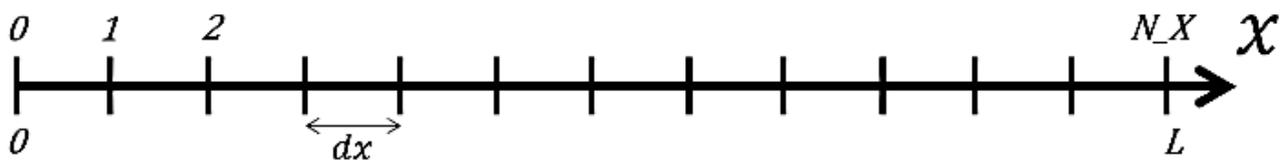


Figure 3 - Discretisation de l'isolant selon x

Q8. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du (i)-ème point.

Q9. À l'aide de la formule de Taylor-Young, **équation (1)**, exprimer :

- $T(t + dt, x)$, au premier ordre par rapport à t , dt étant l'incrément temporel ;
- $T(t, x - dx)$, au second ordre par rapport à x ;
- $T(t, x + dx)$, au second ordre par rapport à x .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (1)$$

Q10. En déduire une expression de $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx , $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n .

Q11. En reformulant le résultat des **questions Q9** et **Q10**, déterminer une relation entre :

- T_i^{n+1} , T_i^n , $\frac{\partial T(t, x)}{\partial t}$ et dt ;
- T_{i+1}^n , T_{i-1}^n , T_i^n , $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ et dx .

Q12. À partir des **questions Q2** et **Q11**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt \cdot k_{th} \left(\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n. \quad (2)$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

Q13. Donner l'**Instruction 1** permettant de définir la diffusivité thermique k_{th} .

- Q14.** L'équation (2) est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \dots N_X\}$?
- Q15.** Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les Instruction 2.1 et Instruction 2.2. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t_{max}]$.
- Q16.** Dédire de la question Q3 les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.
- Q17.** À partir de la question Q12, compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1      #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000      #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100      #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5      #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]      #Diffusivité thermique

#Discretisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]

```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en **figure 4** le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

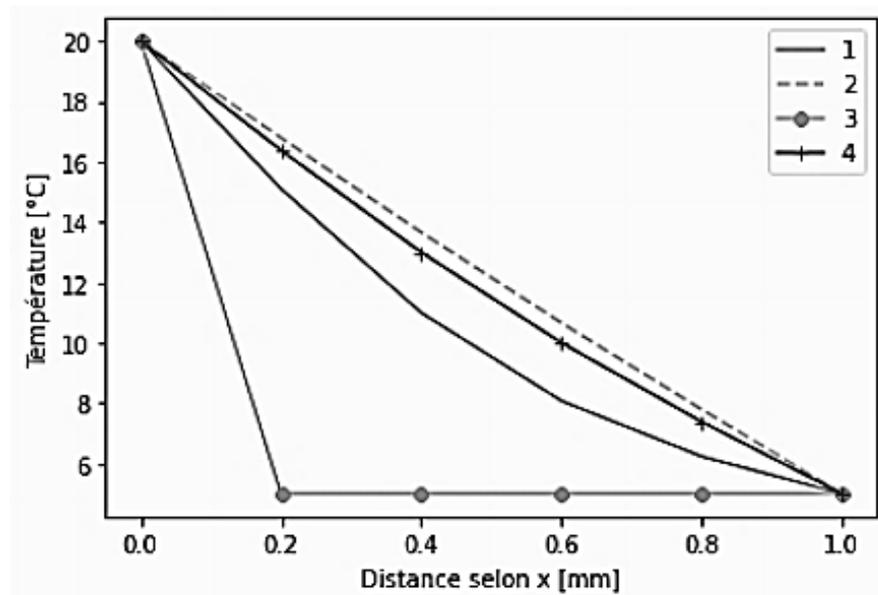


Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Q18. Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :
 $t = [0 \text{ s}, 6\,000 \text{ s}, 12\,000 \text{ s}, 18\,000 \text{ s}]$.

Q19. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **np.linspace(start, stop, N point) :**

- o description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
- o argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code>

- **np.zeros(i) :**

- o description : renvoie un tableau de taille `i` rempli de zéros.
- o argument d'entrée : un scalaire
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.zeros(5)</code>	<code>[0, 0, 0, 0, 0]</code>

- **np.array(liste) :**

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

- **A[i, j] :**

- o description : retourne l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`. Pour accéder à l'intégralité de la ligne `i + 1` de la matrice `A`, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne `j + 1` de la matrice `A`, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
- o argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau `A`
- o argument de sortie : l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`

Commande	Résultat
<code>A = np.array([[1, 2, 1], [4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code>	<code>3</code>

-- FIN DE L'ENONCE --