Chapitre M2. Forces de contact – Lois du frottement solide

Les coefficients de frottements sont généralement compris entre 0,1 et 1.
Voici une exception : le coefficient de frottement d'un pneu de Formule 1 à température sur piste peut atteindre 1,5. C'est ce qui permet à une Formule 1 de prendre des virages relativement fermés à très grande vitesse sans glisser.

INTRO :
Ce chapitre porte sur la **force de contact exercée par un solide S_1 sur un solide S_2** déjà rencontrée en 1e année (réaction d'un support S_1 sur un système S_2). On se limitera au cas où S_2 est en translation par rapport à S_1.
Les forces de contact entre deux solides sont, a priori, des actions mécaniques inconnues et qui évoluent en fonction du contexte mécanique des solides en contact. Pour les étudier, on donne des lois phénoménologiques (= issues d'études expérimentales) : il s'agit des **lois de Coulomb**.
L'exploitation des lois de Coulomb impose de mettre en œuvre un **mode de raisonnement spécifique** qui consiste à formuler une hypothèse relative au comportement du système que l'on teste en fin de calcul.

Buts de ce chapitre : Décrire les actions de contact ; Enoncer les lois de Coulomb ; Décrire et mettre en œuvre la démarche permettant de les exploiter pour interpréter une observation expérimentale ; Effectuer un bilan énergétique.

Prérequis :
1e année : Cinématique et dynamique du solide.

Plan du chapitre :

A) Actions de contact

DEFINITION :
On appelle **ACTION DE CONTACT** l'action mécanique exercée par un solide S_1 sur un solide S_2 avec lequel il est en contact.

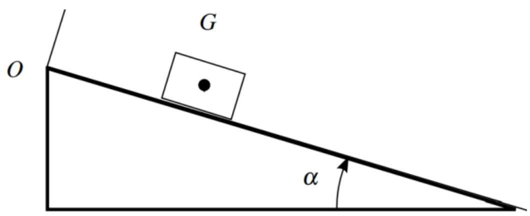
Ex : L'action du sol sur un pneu a une composante qui évite au véhicule de déraper,
Le frottement des plaquettes du frein permet de freiner...

L'action de contact résulte des **interactions** (notamment électromagnétiques) **entre les atomes** constituant les solides qui se trouvent **au voisinage des surfaces en contact**.
Elle dépend de la nature des deux solides et de l'état de la surface de contact (propreté, présence d'une couche d'oxyde...).

B) Observations expérimentales

1) Dispositif

On dispose d'un plan incliné S_1 dont on peut faire l'angle α par rapport à l'horizontale. On étudie le mouvement (ou l'absence de mouvement) d'un solide S_2 parallélépipédique de masse m, que l'on posera sans vitesse initiale ou que l'on lancera suivant la ligne de plus grand pente.



2) 1^{e} expérience

On dépose le solide S_2 sur le plan incliné S_1 sans vitesse initiale.
On constate que pour un solide et un plan donnés deux comportements différents sont possibles :

- soit S_2 reste en équilibre là où on l'a posé ;
- soit S_2 se met à glisser vers le bas le long de la direction de plus grande pente.

On constate que le choix du comportement dépend de la valeur de l'angle α :

- S_2 reste en équilibre quand α est inférieur à un angle limite α_l
- S_2 glisse vers le bas quand $\alpha > \alpha_l$.

On peut recommencer la manipulation avec un solide constitué d'une autre matière. Les observations sont les mêmes mais la valeur de l'angle limite est différente : α_l est d'autant plus élevé que S_2 « adhère » à S_1.
Cf : https://phymain.unisciel.fr/coefficients-de-frottement-statique-de-differents-materiaux/index.html

3) 2^{e} expérience

On lance le solide S_2 vers le haut du plan incliné S_1 le long de la direction de plus grande pente.
S_2 commence par glisser vers le haut le long du plan incliné. Sa vitesse diminue progressivement jusqu'à s'annuler. Ensuite, on constate deux comportements possibles :

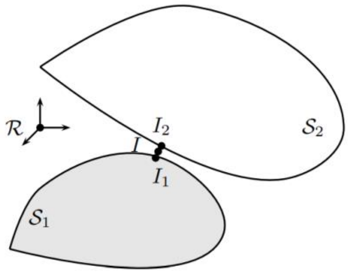
- soit S_2 reste immobile ;
- soit S_2 redescend en bas du plan incliné.

C) Glissement

1) Modélisation – Translation de S_2 par rapport à S_1

Soient deux solides S_1 et S_2 en contact.

A un instant donné, le lieu des points de contact est a priori une surface et les actions de contact s'exercent en tout point de cette surface. Selon le **modèle du contact ponctuel**, on représente ces actions par des actions équivalentes ramenées en un **unique point I**.
On note I_1 (resp[t] I_2) le point du solide S_1 (resp[t] S_2) qui coïncide avec le point de contact I à l'instant t.



On suppose les surfaces assez régulières pour qu'existe en I un **plan tangent** $(\boldsymbol{\Pi})$ commun et donc une normale commune à S_1 et S_2.

On note $\vec{n}_{1\to2}$ **le vecteur unitaire normal au plan tangent, et dirigé de S_1 vers S_2**.

On se limite au cas où le **solide S_2 est en translation par rapport au solide S_1** : on parle d'un **mouvement de <u>glissement</u>***. Pour que les deux solides restent en contact, cette translation s'effectue alors parallèlement au plan tangent (Π) commun aux deux solides.
* absence de roulement et de pivotement.

2) Définitions

La **<u>VITESSE DE GLISSEMENT</u>** de S_2 sur S_1, notée $\overrightarrow{v_{g\ 2/1}}$, est la vitesse de $I_2 \in S_2$ par rapport au solide S_1 :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{g\ 2/1}} = \vec{v}(I_2)_{/S_1}}$$

Dans le cas où le **solide S_2 est en translation par rapport au solide S_1**, la vitesse de glissement de S_2 sur S_1, est la vitesse d'un point quelconque M_2 appartenant au solide S_2 par rapport au solide S_1 :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{g\ 2/1}} = \vec{v}(M_2 \in S_2)_{/S_1}}$$

La vitesse de glissement appartient au plan tangent (Π) commun aux deux solides.

La situation de **<u>GLISSEMENT</u>** de S_2 sur S_1 se traduit par $\overrightarrow{v_{g\ 2/1}} \neq \vec{0}$.
La situation de **<u>NON-GLISSEMENT</u>** se traduit par $\boldsymbol{\overrightarrow{v_{g\ 2/1}} = \overrightarrow{v_{g\ 1/2}} = \vec{0}}$**.**

<u>Rq</u> :
♦ La vitesse de glissement de S_1 sur S_2 vérifie :

$$\overrightarrow{v_{g\ 1/2}} = \vec{v}(I_1)_{/S_2} = -\overrightarrow{v_{g\ 2/1}}$$

♦ Soit R un référentiel
*Dans le cas où le solide **S_1 est en translation par rapport au référentiel R**, la loi de composition des vitesses donne :*

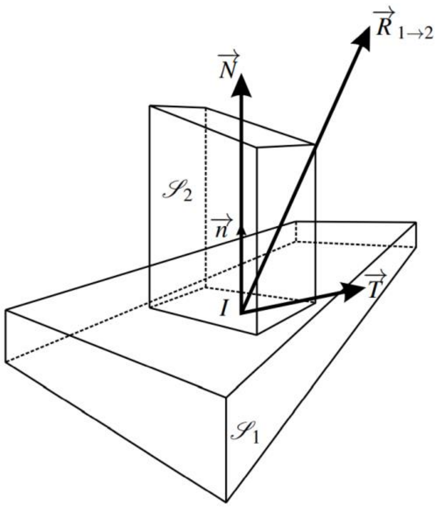
$$\vec{v}(I_2)_{/R} = \vec{v}(I_2)_{/S_1} + \vec{v_e} \quad avec \quad \vec{v_e} = \vec{v}(I_1)_{/R}$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{v_{g\ 2/1}} = \vec{v}(I_2)_{/R} - \vec{v}(I_1)_{/R}}$$

D) Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

1) Modélisation, définitions et notations



On modélise les actions de contact d'un solide S_1 sur un solide S_2 par une force $\vec{R}_{1\to2}$ appliquée au point I.

On décompose cette force $\vec{R}_{1\to2}$ en :
- une composante selon la normale $(I, \vec{n}_{1\to2})$, notée $\vec{\boldsymbol{N}}$, appelée **réaction normale** ;
- et une composante appartenant au plan tangent (Π) commun aux deux solides, notée $\vec{\boldsymbol{T}}$, appelée **réaction tangentielle** ou **force de frottement de glissement**.

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{1\to2} = \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{T}}$$

<u>Rq</u> : *D'après la 3e loi de Newton,* l'action de contact de S_2 sur S_1 *vérifie :*

$$\vec{R}_{2\to1} = -\vec{R}_{1\to2}$$

2) Sens de la réaction normale – Rupture du contact

La réaction normale $\vec{N}$ traduit l'opposition du solide S_1 à sa pénétration par le solide S_2.

Lorsqu'il y a contact entre les deux solides, la **composante normale $\vec{\boldsymbol{N}}$ de l'action de $\boldsymbol{S_1}$ sur $\boldsymbol{S_2}$ est dirigée nécessairement de $\boldsymbol{S_1}$ vers $\boldsymbol{S_2}$**, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{1\to2}.\vec{\boldsymbol{n}}_{1\to2} = \vec{\boldsymbol{N}}.\vec{\boldsymbol{n}}_{1\to2} > \boldsymbol{0}$$

avec $\vec{n}_{1\to2}$ le vecteur unitaire normal au plan tangent, et dirigé de S_1 vers S_2.

<u>**NB :**</u> Dans le cas d'une liaison entre deux solides unilatérale i.e. susceptible de se rompre, si l'on fait l'hypothèse d'un contact entre les solides et qu'il ressort du calcul que $\vec{N}.\vec{n}_{1\to2} \leq 0$, cela signifie que cette hypothèse est fausse et qu'il y a perte du contact.

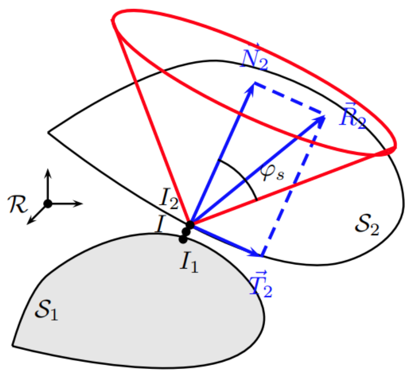
3) Lois de Coulomb = Lois du frottement solide / sec

a) Cas du non-glissement = Loi du frottement statique

Dans la situation de **non-glissement** i.e. si $\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{g\,2/1}} = \vec{\boldsymbol{0}}$, les normes des composantes normale et tangentielle de l'action de contact vérifient :

$$\|\vec{\boldsymbol{T}}\| \leq \boldsymbol{f_s}.\|\vec{\boldsymbol{N}}\|$$

Où f_s est le **coefficient de frottement statique** caractéristique des matériaux en contact



<u>**NB**</u> : Dans le cas de non-glissement, on ne connaît a priori ni le sens, ni la direction de la composante tangentielle. On a juste une contrainte sous la forme d'une inégalité : sa norme est inférieure à une certaine valeur.

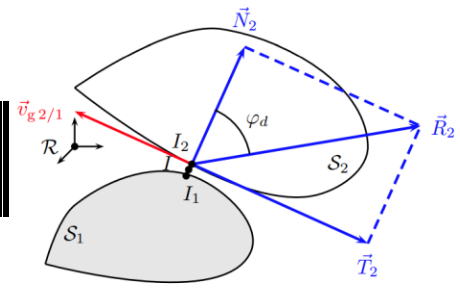
➲ <u>Exercice classique :</u> Montrer que dans le cas de non-glissement, l'action de contact $\vec{R}_{1\to2}$ doit être située à l'intérieur du cône de sommet I et d'angle $\varphi_s = arctan(f_s)$ appelé cône de frottement, *cf figure ci-dessus.*

b) Cas du glissement = Loi du frottement dynamique / cinétique

Dans la situation de **glissement** i.e. si $\overrightarrow{v_{g\,2/1}} \neq \vec{0}$, les composantes normale et tangentielle de l'action de contact vérifient :

$$\begin{cases} \vec{T} \text{ est de même direction et de sens opposé à } \overrightarrow{v_{g\,2/1}} & (1) \\ \|\vec{T}\| = f_d . \|\vec{N}\| & (2) \end{cases}$$

Où f_d est le **coefficient de frottement dynamique** caractéristique des matériaux en contact



__NB__ : Dans le cas du glissement, la composante tangentielle est totalement déterminée : (1) donne sa direction et son sens et (2) donne sa norme.

D'après (1) : la composante tangentielle s'oppose au glissement de S_2 par rapport à S_1, ceci explique qu'on la nomme parfois « résistance au glissement ».

D'après (2) : l'action de contact $\vec{R}_{2\to1}$ est située sur la surface du cône de frottement de sommet I et d'angle $\varphi_d = arctan(f_d)$.

4) Valeurs des coefficients de frottements

Les coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d dépendent du **couple de matériaux constituant les solides S_1 et S_2** et de **l'état des surfaces**. Ils ne dépendent ni de l'aire de la surface de contact, ni de la valeur de la composante normale, cf TP.

__ODG__ : Typiquement, on a $f_s \gtrsim f_d \in [0,1\,;1]$

__Ex__ :

Surfaces en contact	f_s	f_d
Acier sur acier	0,2	
Acier sur bois	0,2 à 0,6	
Aluminium sur aluminium	1,1	
Aluminium sur acier	0,5	0,47
Bois sur bois	0,25 à 0,5	
Caoutchouc sur acier	0,35	0,3
Caoutchouc sur bitume	0,6	
Garniture frein sur acier	0,45	

__Rq__ :

- *Ces valeurs sont indicatives car ces coefficients dépendent grandement de l'état de surface des solides.*
- *On a $f_s > f_d$: autrement dit, pour mettre en mouvement une lourde caisse posée sur le sol, il faut exercer dans un 1er temps une force horizontale donnée, mais une fois que le mouvement est initié, pour continuer de faire glisser la caisse, il faut exercer une force horizontale moins élevée.*
- *En général $\frac{f_s - f_d}{f_s} \ll 1$: on parle alors d'un unique coefficient de frottement $f \approx f_s \approx f_d$.*

5) Modèle du contact sans frottement

La situation idéale d'un __**contact sans frottement**__ correspond à $f = 0$.

En effet, d'après les lois de Coulomb, on a alors nécessairement $\|\vec{T}\| = 0$ ainsi :

$$\vec{T} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{R}_{1\to2} = \vec{N}$$

E) Exploitation des lois de Coulomb

1) Méthode

<table>
<tr>
<td>
Démarche pour étudier un problème avec frottement solide</td>
<td>① On précise le système, le référentiel d’étude, le bilan des forces représentées sur un schéma où apparaissent les coordonnées et une BOND. On énonce une loi de dynamique puis…
② Formulation : on fait une hypothèse* (H) relative au mouvement du solide :
[non-glissement] ou [glissement dans une direction et un sens précis].
③ Exploitation : on traduit mathématiquement les conséquences de (H) avec les coordonnées et la BOND choisies :
$[\overrightarrow{v_{g\,2/1}} = \vec{0}]$ ou $\left[\|\vec{T}\| = f_d.\|\vec{N}\| \text{ et } \vec{T} \text{ de sens opposé à } \overrightarrow{v_{g\,2/1}}\right]$
④ Résolution : on résout le problème posé dans le cadre de (H) puis on calcule toutes les grandeurs qui interviennent dans les conditions à vérifier.
⑤ Validation : on impose aux grandeurs calculées de vérifier les conditions de validité de $(\boldsymbol{H})$.
$\left[\|\vec{T}\| \leq f_s.\|\vec{N}\|\right]$ ou $\left[\overrightarrow{v_{g\,2/1}} \text{ dans le sens choisi}\right]$
On trouve ainsi la plage de valeurs des paramètres pour lesquels (H) est valide.
- Soit ces conditions sont impossibles ⇔ $(\boldsymbol{H})$ est fausse.
- Soit ces conditions sont vérifiées mais uniquement jusqu’à un certain instant ; dans ce cas il faut formuler une nouvelle hypothèse pour la suite du mouvement et reprendre les points ② à ⑤.
⑥ Conclusion : on tire une conclusion claire concernant le mouvement.</td>
</tr>
</table>

* Choix de l’hypothèse :

En général, les conditions initiales permettent d’évaluer la vitesse de glissement à $t = 0$.

- **Si** $\overrightarrow{\boldsymbol{v}_{g\,2/1}}(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}) \neq \vec{\boldsymbol{0}}$ alors par continuité la vitesse de glissement reste non nulle sur un intervalle de temps $[0, t_1]$: on fait donc **l’hypothèse de glissement pour** $\boldsymbol{t} > \boldsymbol{0}$, cf § E.2.c.
- Si $\overrightarrow{v_{g\,2/1}}(t = 0) = \vec{0}$ alors tout est possible pour $t > 0$, cf § E.2.b. On fait plutôt l’hypothèse de non-glissement pour $t > 0$ et si elle s’avère fausse a posteriori, on reprend.

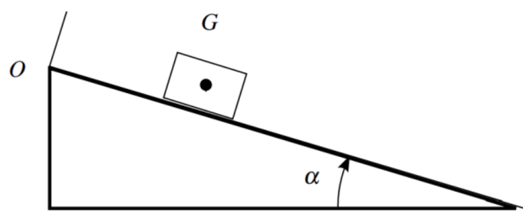
<u>Rq</u> : Dans certaines situations (« stick-slip »), il y a alternance de phases de glissement et de non-glissement, on doit donc mettre en œuvre cette méthode plusieurs fois. La résolution numérique s’avère alors utile, cf TD.

2) Exercice classique : interprétation des observations expérimentales du § B

a) Description de la situation

Dans le référentiel terrestre, on étudie le mouvement du solide S_2 de masse m sur le plan incliné fixe S_1.

Pour simplifier, on confondra les coefficients de frottement statique et dynamique, qu’on notera f.



➲ i) Positionner le problème (cf étape ① de la méthode) et vérifier qu’on obtient 3 inconnues scalaires (le degré de liberté de S_2, les composantes normale et tangentielle de l’action de contact) et 2 équations.

b) Interprétation de la 1e expérience § B.2

On dépose le solide S_2 sans vitesse initiale sur le plan incliné fixe S_1.

A priori, il y a trois cas possibles :

$(H1)$ le solide reste en équilibre ; $(H2)$ il descend le plan incliné ; $(H3)$ il remonte le plan incliné.

<u>Rq</u> : *Intuitivement,* $(H3)$ *est fausse.*

◆ **Hypothèse de non-glissement** $(H1)$

➲ ii) Appliquer la méthode pour retrouver le résultat expérimental $\{S_2$ reste en équilibre si $\alpha \leq \alpha_l\}$ et montrer que $\alpha_l = \arctan(f)$.

NB : La mesure de l'angle maximum α_l pour lequel le solide est immobile permet de déterminer expérimentalement le coefficient de frottement : $f = \tan(\alpha_l)$.

◆ **Hypothèse de glissement vers le bas** $(H2)$

➲ iii) Appliquer la méthode pour retrouver le résultat expérimental $\{S_2$ glisse vers le bas si $\alpha > \alpha_l\}$ et montrer que $\alpha_l = \arctan(f)$.

Rq : Hypothèse de glissement vers le haut $(H3)$

➲ iv) Appliquer la méthode pour vérifier que cette hypothèse (contre-intuitive) est fausse.

c) Interprétation de la 2e expérience § B.3

On lance le solide S_2 avec une vitesse de norme v_0 vers le haut du plan incliné fixe S_1 le long de la direction de plus grande pente.

Expérimentalement, on observe que S_2 glisse vers le haut entre $t = 0$ et $t = t_1$ puis il reste immobile ou il redescend en bas du plan incliné.

➲ v) Appliquer la méthode pour retrouver le résultat expérimental et montrer que $t_1 = \frac{v_0}{g(sin\alpha + f cos\alpha)}$.

F) Aspect énergétique

1) Solide S_2 étudié dans un référentiel R dans lequel S_1 est fixe

On étudie le solide S_2 dans le référentiel R.

La puissance de la force de contact $\vec{R}_{1\to2}$ exercée en I_2 s'écrit :

$$P(\vec{R}_{1\to2})_{/R} = \vec{R}_{1\to2}.\vec{v}(I_2)_{/R}$$

On considère que S_1 est fixe dans R ainsi :

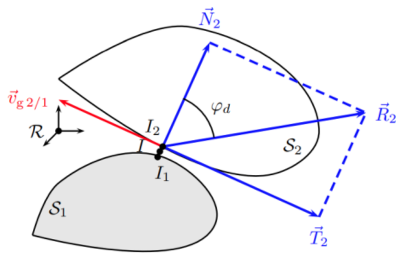
$$\vec{v}(I_2)_{/R} = \vec{v}(I_2)_{/S_1} = \overrightarrow{v_{g\,2/1}}$$

D'où

$$P(\vec{R}_{1\to2})_{/R} = \vec{R}_{1\to2}.\overrightarrow{v_{g\,2/1}}$$

Or

$$\vec{R}_{1\to2} = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{avec } \vec{N} // \vec{n}_{1\to2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_{g\,2/1}} \perp \vec{n}_{1\to2}$$



BILAN : On étudie le **solide S_2 dans le référentiel R où S_1 est fixe**. On a :

$$\boldsymbol{P(\vec{R}_{1\to2})_{/R} = \vec{T}.\overrightarrow{v_{g\,2/1}}}$$

Cette puissance est donc **nulle** dans les deux cas suivants :

- s'il y a **absence de frottement** : $\vec{T} = \vec{0}$
- ou s'il y a **non-glissement** de S_2 sur S_1 : $\overrightarrow{v_{g\,2/1}} = \vec{0}$

S'il y a glissement de S_2 sur S_1, d'après les lois de Coulomb, cette **puissance est négative***.

* ce résultat n'est pas généralisable à n'importe quelle situation, cf annexe.

2) Puissance totale des forces de contact entre deux solides en translation

On étudie les solides S_1 et S_2 dans le référentiel R.

On se limite au cas où les solides sont en translation par rapport à R.

On note respectivement $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ leur vitesse dans le référentiel R.

La puissance totale des forces de contact s'écrit :

$$P_{tot/R} = \vec{R}_{1\to2}.\overrightarrow{v_2} + \vec{R}_{2\to1}.\overrightarrow{v_1} \qquad \text{avec } \vec{R}_{1\to2} = \vec{N} + \vec{T}$$

BILAN : Pour des **solides** S_1 et S_2 **en translation par rapport au référentiel** $\boldsymbol{R}$, on a :

$$\boldsymbol{P_{tot/R} = \vec{T}.\overrightarrow{v_{g\,2/1}}}$$

Cette puissance totale est donc **nulle** dans les deux cas suivants :

- s'il y a **absence de frottement** : $\vec{T} = \vec{0}$
- ou s'il y a **non-glissement** de S_2 sur S_1 : $\overrightarrow{v_{g\,2/1}} = \vec{0}$

S'il y a glissement de S_2 sur S_1, d'après les lois de Coulomb, cette **puissance totale est négative**.

Autrement dit, la **puissance totale** des forces mises en jeu dans un **contact entre deux solides en translation** est **nulle dans le cas du non glissement** et **négative dans le cas du glissement**.

➲ Exercice classique : En exploitant la 3e loi de Newton et la loi de composition des vitesses, cf Ch.M1, démontrer l'expression de $P_{tot/R}$.

Annexe – Cas particulier où la réaction tangentielle est motrice

On considère une planche horizontale $\mathscr{S}_1$ de masse M, qui peut se déplacer sans frottement sur le sol et sur laquelle est posé un solide $\mathscr{S}_2$ de masse m. L'ensemble est initialement au repos et on exerce une force horizontale de norme F constante sur $\mathscr{S}_1$ (voir figure 3.4).

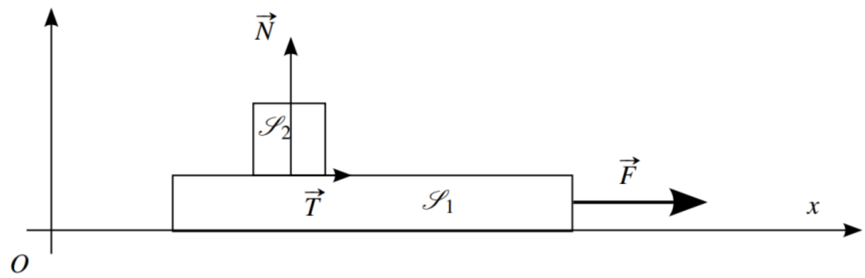


Figure 3.4 – Solide entraîné par une planche

Si F n'est pas trop grande, $\mathscr{S}_2$ reste immobile par rapport à $\mathscr{S}_1$ et tous les deux se déplacent vers la droite. La force qui met en mouvement $\mathscr{S}_1$ est $\vec{F}$ tandis que la force qui met en mouvement $\mathscr{S}_2$ est la force de contact exercée par $\mathscr{S}_1$. La puissance de cette force est donc positive.

On peut exprimer cette puissance. $\mathscr{S}_2$ étant immobile par rapport $\mathscr{S}_1$, les deux solides ont la même accélération. En repérant $\mathscr{S}_1$ par l'abscisse x de son extrémité gauche cette accélération commune est simplement : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$.

$\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ forment un solide auquel on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique en projection sur l'axe horizontal ; il vient : $(M+m)\ddot{x} = F$. L'intégration donne alors facilement :

$$\dot{x} = \frac{F}{M+m}t.$$

On applique maintenant le principe fondamental de la dynamique à $\mathscr{S}_2$ seul. Il est soumis à son poids et à l'action de contact $\vec{R}_{1/2} = \vec{T} + \vec{N}$ (voir figure 3.4) avec $\vec{T} = T\vec{u}_x$. Il vient :

$$m\ddot{x} = T.$$

En combinant les deux résultats précédents pour éliminer $\ddot{x}$ on trouve : $T = \dfrac{m}{m+M}F > 0$.
Dès lors, la puissance de l'action de $\mathscr{S}_1$ sur $\mathscr{S}_2$ est :

$$\mathscr{P}(\vec{R}_{1\to2}) = \vec{R}_{1\to2}\cdot(\dot{x}\vec{u}_x) = \dot{x}\,T = \frac{mF^2}{(M+m)^2}t,$$

qui est bien positive.