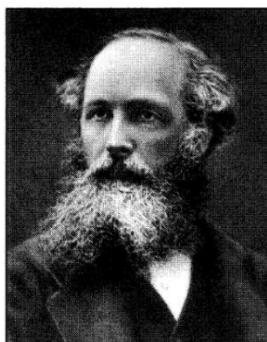


Chapitre EM4. Electromagnétisme en régime variable



James Maxwell (1831-1879) est un physicien et mathématicien écossais. Dans ces premiers travaux, il tente de comprendre le mécanisme de la vision des couleurs ce qui lui permet d'obtenir en 1861 la première photographie en couleur.

Retenant les travaux de Faraday et d'Ampère, il aboutit à des équations différentielles qui l'amènent à concevoir que la lumière et le magnétisme sont des phénomènes de même nature englobés dans ce que l'on nomme aujourd'hui l'**electromagnétisme** et qui trouvent des applications dans des domaines variés.

INTRO :

On va considérer dans ce chapitre des **champs électriques et magnétiques dépendant du temps** car générés par des charges mobiles et des courants variables. Dans cette situation, les champs sont couplés et on parle alors du **champ électromagnétique** ($\vec{E}(M, t)$, $\vec{B}(M, t)$). On étudie les propriétés locales de ce champ et ses liens avec ses sources (densités volumiques de charge et de courant) via les **équations de Maxwell**. A partir de ces équations, on retrouve les **théorèmes de Gauss et d'Ampère** vus aux ChEM1 (électrostatique) et EM2 (magnétostatique).

On s'intéresse également aux aspects énergétiques en menant des **bilans d'énergie** mettant en jeu **matière et champ électromagnétique**.

Les démonstrations de ce chapitre s'appuient sur la manipulation **d'opérateurs vectoriels** relatifs aux champs scalaires et vectoriels rassemblés dans la fiche outils maths « Analyse vectorielle ».

Buts de ce chapitre : Formuler, interpréter et manipuler les équations de Maxwell ; faire le lien avec les résultats d'électro-magnéto-statique ; mener des bilans d'énergie en introduisant le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique.

Prérequis :

1^{re} année : Bases de l'électrocinétique ; Mouvements de particules chargées dans \vec{E} ou \vec{B} ; Induction.

2^{re} année : EM1 Electrostatique ; EM2 Magnétostatique ; T2/T4 Transferts thermiques.

Plan du chapitre :

A) Equations de Maxwell.....	2
1) Principe de conservation de la charge électrique : formulation locale.....	2
2) Formulations des équations de Maxwell	3
B) Retour sur les champs statiques – Equations associées.....	5
1) Régimes liés à l'évolution temporelle.....	5
2) Equations locales du champ électrostatique – Equations de Poisson et de Laplace.....	5
3) Equations locales du champ magnétostatique	6
C) Bilans d'énergie et de puissance.....	7
1) Puissance volumique CEDEE par le champ EM aux porteurs de charges	7
2) Bilan d'énergie : énergie EM volumique et vecteur de Poynting	9
Annexe n°1 : Conservation de la charge – Démonstration du cas 3D par un bilan.....	12
Annexe n°2 : Résolution numérique de l'équation de Laplace (Cf CCINP PC Modélisation 2017)	13
Annexe n°3 : Expressions de uem et Π	16

A) Equations de Maxwell

1) Principe de conservation de la charge électrique : formulation locale

Un des postulats de l'électromagnétisme est le principe de conservation de la charge électrique.

La charge n'est ni créée ni détruite : elle est transmise d'un corps à un autre.

Rq : Il ne peut y avoir ni production, ni disparition de charge électrique. Ce qui ne veut pas dire qu'il ne peut y avoir de production ou de disparition de particule chargée. Cependant tous les processus connus (transformations chimique, nucléaire....) respectent la conservation de la charge.

Comme aux ChEM1-2, on introduit les champs correspondant aux **sources** du champ électromagnétique :

- $\rho(M, t)$ la **densité volumique de charges** ($C.m^{-3}$) ;
- $\vec{j}(M, t)$ le **vecteur densité de courant volumique** ($A.m^{-2}$).

♦ En géométrie unidimensionnelle cartésienne : On considère un milieu dont les densités de charges et de courant dépendent du temps et d'une seule variable d'espace cartésienne, x :

$$\rho(M, t) = \rho(x, t) \quad \text{et} \quad \vec{j}(M, t) = j(x, t) \vec{u}_x$$

Le volume élémentaire considéré est un cylindre (ou un parallélépipède) d'axe (Ox) de section S , situé entre les abscisses x et $x + dx$.

Bilan de charges (USI : $A.m^{-3}$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

♦ Généralisation à trois dimensions :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

⇒ **Cas 1D démonstration à connaître** : Etablir le bilan de charges par une démarche analogue à celle du bilan d'énergie, cf chapitre sur les transferts thermiques :

Schématiser le système : portion de cylindre comprise entre x et $x + dx$;

Faire un bilan de charges du système sur l'intervalle de temps $[t, t + dt]$;

Utiliser des DL à l'ordre 1 en dx et en dt .

Cas 3D démonstrations :

Cf Annexe n°1 (démarche généralisée à celle du cas 1D : HP) et cf § A.2 (à partir des équations de Maxwell).

Rq : - **Equation « LOCALE » : relation vérifiée au point M à l'instant t .**

- **En régime stationnaire ou dans l'ARQS** $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$, l'équation locale de conservation de la charge devient donc : $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Ainsi, il y a conservation du flux du vecteur densité de courant \vec{j} . Par conséquent, l'intensité a la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ \vec{j} . Autrement dit, **l'intensité du courant électrique prend la même valeur dans toute section d'une branche de circuit** : il s'agit de la « **loi des branches** ».

2) Formulations des équations de Maxwell

a) Formulation locale

Les comportements des champs électrique $\vec{E}(M, t)$ et magnétique $\vec{B}(M, t)$ sont entièrement décrits par le principe de conservation de la charge, la force de Lorentz et les équations de Maxwell.

Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$
Maxwell-flux ou -Thomson	$\operatorname{div} \vec{B}(M, t) = 0$
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E}(M, t) = - \frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{J}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$

Avec

$$\cdot \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} F \cdot m^{-1} \approx 8,84 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H \cdot m^{-1}$$

resp^t la **permittivité diélectrique du vide** et la **perméabilité magnétique du vide** qui vérifient :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad \text{avec } c \text{ la célérité de la lumière dans le vide}$$

• $\rho(M, t)$ la **densité volumique de charges (C.m⁻³)** et $\vec{J}(M, t)$ le **vecteur densité de courant volumique (A.m⁻²)** sont les **sources locales** du champ électromagnétique ($\vec{E}(M, t)$, $\vec{B}(M, t)$).

Commentaires :

- Les équations de Maxwell sont **linéaires**, le **théorème de superposition** est donc valable.
- En hommage à Maxwell, le terme $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$, noté \vec{J}_D , est encore appelé aujourd’hui « vecteur densité de **courant de déplacement** » par opposition au vecteur densité de courant de conduction \vec{J} . \vec{J}_D désigne un phénomène relié à la variation dans le temps du champ électrique.
- On déduit des équations de Maxwell que **des champs électriques et magnétiques variables dans le temps** **satisfont à une équation d’onde**. En particulier, **dans une région vide de charge et de courant**, \vec{E} et \vec{B} vérifient l'**équation de d’Alembert** :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3,00 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$$

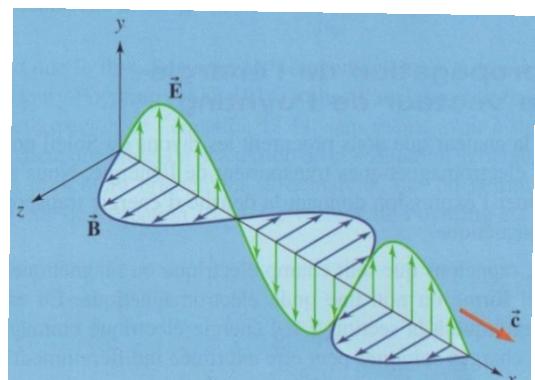
On établira ces équations au ChEM5.

Les champs peuvent se propager en formant une onde électromagnétique basée sur le phénomène d’induction électromagnétique :

D’après l’équation de Maxwell-Faraday, la variation d’un champ magnétique fait apparaître un champ électrique et d’après l’équation de Maxwell-Ampère, la variation d’un champ électrique (\vec{J}_D) fait apparaître un champ magnétique. C’est ce **couplage des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$** variables qui est à l’origine des ondes électromagnétiques **qui peuvent même se propager en l’absence de milieu matériel**.

La conception de ce nouveau type d’onde est le résultat le plus important de la théorie de Maxwell.

- L’encadré ci-dessus donne les équations de Maxwell dans le **cas général**. Selon les situations étudiées (« hypothèses constitutives »), elles peuvent se **simplifier**. On verra au § B, les simplifications associées au type de **régime temporel étudié** (indépendant du temps, ARQS). On verra dans les ChEM5-6-7, les simplifications associées à la **nature du milieu de propagation** (vide, plasma dilué, milieu ohmique).



Une représentation d’ondes électromagnétiques se propageant le long de l’axe des x positifs.

b) Formulation intégrale

⇒ Démonstrations à connaître et à accompagner de schémas :

En utilisant les **théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes** (à connaître) des § C.3 et D.3 de la fiche « Analyse vectorielle », établir les formulations intégrales des équations de Maxwell :

	<i>Formulation locale</i>		<i>Formulation intégrale</i>
① M-G	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\xrightleftharpoons{\text{Ostrogradski}}$	$\iint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(t)}{\epsilon_0}$ → THEOREME DE GAUSS (cf ChEM1)
② M-f	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\xrightleftharpoons{\text{Ostrogradski}}$	$\iint_{P \in (\Sigma)} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S} = 0$ Champ \vec{B} à flux conservatif (cf ChEM2)
③ M-F	$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\xrightleftharpoons{\text{Stokes}}$	$\oint_{P \in (C)} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \left(\iint_{M \in (S)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} \right)$ $\Leftrightarrow e(t) = - \frac{d\phi_B}{dt}$ avec $e(t)$ la force électromotrice d'induction . → LOI DE FARADAY (cf 1 ^e année)
④ M-A	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\xrightleftharpoons{\text{Stokes}}$	$\oint_{P \in (C)} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \left(I_e(t) + \iint_{M \in (S)} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$ avec $I_e(t) = \iint_{M \in (S)} \vec{J}(M, t) \cdot d\vec{S}$ THEOREME D'AMPERE généralisé
④' M-A en régime stationnaire ou ARQS magnétique *	$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ * $\ \vec{J}\ \gg \left\ \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\ = \ \vec{J}_D\ $	$\xrightleftharpoons{\text{Stokes}}$	$\oint_{P \in (C)} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_e(t)$ → THEOREME D'AMPERE (cf ChEM2)

LOI DE FARADAY (Rappel)

① Conventions d'orientation :

- Orienter arbitrairement le circuit étudié.
- Définir une surface S s'appuyant sur le circuit.
- Déduire de la règle de la main droite le sens de la normale à la surface.
- Orienter la f.é.m. induite $e(t)$ comme le circuit.

② Expression de la f.é.m. induite :

On introduit le flux du champ magnétique à travers le circuit orienté : $\phi_B = \iint_S (\vec{B} \cdot \vec{n} dS)$.

La f.é.m. induite dans le circuit est liée à la variation du flux par : $e = - \frac{d\phi_B}{dt}$

c) Retour sur le principe de conservation de la charge électrique

⇒ Démonstration à connaître : A partir des équations de Maxwell Gauss et Ampère et de la relation $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0$ (à connaître) du § F de la fiche « Analyse vectorielle », retrouver l'équation locale de la conservation de la charge.

Rq : Les équations de Maxwell s'appuient sur une description volumique de charges et de courants qui correspond à la réalité physique des matériaux. Les champs EM associés à cette description sont définis et continus en tout point de l'espace. A l'inverse, une modélisation surfacique peut conduire à des discontinuités du champ EM. Pour en rendre compte, on donne des relations de passage, cf ChEM7.

B) Retour sur les champs statiques – Equations associées

1) Régimes liés à l'évolution temporelle

Du plus simple au plus complexe :

♦ Régime indépendant du temps : champs « statiques » (§ B)

- Les charges électriques sont fixes : **électrostatique** (ChEM1 et § B.2) ;
- Les charges se déplacent à vitesse constante (régime **stationnaire**) : **magnétostatique** (ChEM2 et § B.3).

En régime **stationnaire**, ρ , \vec{j} , \vec{E} et \vec{B} sont indépendants du temps et les champs **statiques** \vec{E} et \vec{B} peuvent être étudiés séparément (découplage).

♦ Régime lentement variable appelé régime **quasi-stationnaire ARQS** :

La durée de propagation Δt de l'onde EM est négligeable devant le temps caractéristique T de variation des sources de champ.

Cas particulier : **ARQS « magnétique »** : situation qui vérifie l'ARQS et telle que l'effet des charges est négligeable devant celui des courants. Dans ce cadre, toutes les propriétés des champs magnétostatiques demeurent vraies dans l'ARQS magnétique.

♦ Régime variable (§ A.2).

2) Equations locales du champ électrostatique – Equations de Poisson et de Laplace

a) Electrostatique

Cadre de **l'électrostatique**, plus restreint que celui du régime stationnaire : les charges électriques sont fixes d'où $\vec{j} = \vec{0}$.

Les équations locales vérifiées par le **champ électrostatique** sont donc :

Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} \vec{E}(\mathbf{M}) = \frac{\rho(\mathbf{M})}{\epsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} \vec{E}(\mathbf{M}) = \vec{0}$ ⇒ il existe $V(\mathbf{M})$ tel que $\vec{E}(\mathbf{M}) = -\vec{\operatorname{grad}}(V(\mathbf{M}))$ Avec $V(\mathbf{M})$ le potentiel électrostatique . En effet, $\operatorname{rot}(\vec{\operatorname{grad}}V) = \vec{0}$, cf fiche « Analyse vectorielle ».

⇒ Application : Donner la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday dans le cas statique : champ électrostatique \vec{E} à circulation conservative.

⇒ Démonstrations à connaître :

- ① Etablir l'équation de Poisson : équation locale vérifiée par le potentiel électrostatique $V(\mathbf{M})$.
- ② En déduire l'équation de Laplace dans le cas d'un milieu vide de charge.

① **Equation de Poisson**

$$\Delta V(\mathbf{M}) + \frac{\rho(\mathbf{M})}{\epsilon_0} = 0$$

② Cas où $\rho(\mathbf{M}) = 0$: **équation de Laplace**

$$\Delta V(\mathbf{M}) = 0$$

① Solution de l'équation de Poisson (avec CL : $V(\infty) = 0$), cf ChEM1 : $V(\mathbf{M}) = \iiint_{P\epsilon(\mathcal{D})} \frac{\rho(\mathbf{P})d\tau}{4\pi\epsilon_0PM}$.

② Solution de l'équation de Laplace (avec CL données), cf annexe n°2 : résolution numérique.

b) Retour sur l'analogie électrostatique-gravitation – Equations locales pour la gravitation

	Electrostatique	Gravitation
Force d'interaction	$\overrightarrow{F_{\text{é}, O \rightarrow M}} = \frac{q_O q_M}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$	$\overrightarrow{F_{g, O \rightarrow M}} = -G m_O m_M \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$
Constante associée	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Source du champ	ρ densité volumique de charges	μ masse volumique
Champ	électrostatique \vec{E} : $\overrightarrow{F_{\text{é}, \rightarrow M}} = q_M \cdot \vec{E}(M)$	gravitationnel \vec{A} : $\overrightarrow{F_{g, \rightarrow M}} = m_M \cdot \vec{A}(M)$
Potentiel	Potentiel électrostatique V tel que : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$	Potentiel gravitationnel ϕ tel que : $\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$

Dans le cadre de la gravitation, on a :

① Equation de Poisson $\Delta\phi(M) = 4\pi G \mu(M)$	② Cas où $\mu(M) = \mathbf{0}$: équation de Laplace $\Delta\phi(M) = 0$
---	--

⇒ Exercice classique : justifier l'écriture de ces équations.

Rq : le potentiel gravitationnel ϕ est relié à l'énergie potentielle gravitationnelle d'un corps de masse m :

$$E_{p,grav} = m\phi \Leftrightarrow \overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_{p,grav}) = m\vec{A}$$

3) Equations locales du champ magnétostatique

Cadre de la **magnétostatique** (= cadre du régime **stationnaire**) : les **charges se déplacent à vitesse constante**.

Les équations locales vérifiées par le **champ magnétostatique** sont donc :

Maxwell-flux ou -Thomson	$\text{div } \vec{B}(M) = \mathbf{0}$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M)$

NB : Ces équations sont aussi valables dans le cadre de l'ARQS magnétique cf § B.1.

C) Bilans d'énergie et de puissance

1) Puissance volumique CEDEE par le champ EM aux porteurs de charges

a) Expression

Une particule chargée q (électron, ion...), animée d'une vitesse \vec{v} dans un milieu où règne un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) subit la **force de Lorentz** :

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On considère un milieu comportant n^* particules chargées mobiles (= porteurs de charges) du même type par unité de volume : n^* est la densité volumique de particules chargées (USI : m^{-3}).

On définit une **force électromagnétique volumique** (USI : $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$) :

$$\vec{f}_V = \frac{d\vec{f}}{d\tau}$$

On obtient $\vec{f}_V = n^* \vec{F}_L = \rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B}$

avec $\rho (= n^* q)$ la **densité volumique de charges mobiles** et $\vec{J} (= n^* q \vec{v} = \rho \vec{v})$ le **vecteur densité de courant volumique**.

Rq : si la matière contient différents types de porteurs de charges q_i : $\rho = \sum_i n_i^* q_i$ et $\vec{J} = \sum_i n_i^* q_i \vec{v}_i$

Le champ électromagnétique cède de l'énergie aux particules chargées.

La **puissance volumique** $P_V(M, t)$ cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges s'écrit :

$$P_V(M, t) = \frac{dP}{d\tau} = \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

USI : $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$

Rq - Rappel : la force magnétique ne travaille pas.

⇒ **Démonstration à connaître** : Etablir l'expression de la force et de la puissance volumiques.

b) Cas d'un milieu ohmique

NB : Les milieux ohmiques seront étudiés en détail au ChEM7.

◆ Loi d'Ohm locale

Un milieu **conducteur** est dit **OHMIQUE** lorsque le vecteur densité de courant volumique est proportionnel au champ électrique :

$$\vec{J}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$$

Cette relation correspond à **la LOI D'OHM LOCALE**. Le coefficient de proportionnalité γ (parfois noté σ) est la **conductivité électrique** du milieu (USI : $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$; S : Siemens). ODG : $\gamma(Cu) \approx 6.10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

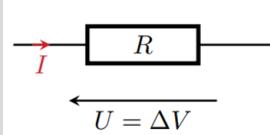
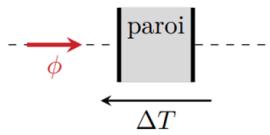
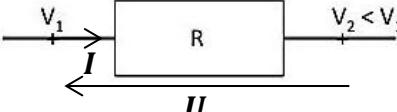
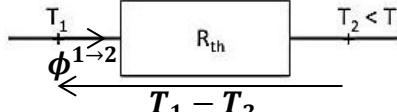
La loi d'Ohm traduit la mise en place d'un **courant de conduction** (déplacement de charges) sous l'action de \vec{E} .

Rq : Cette loi d'ohm est la conséquence à l'échelle mésoscopique du comportement des porteurs de charge à l'échelle microscopique. On l'obtient par une étude mécanique des porteurs de charge, cf ChEM7. Elle est vraie tant que les fréquences ne sont pas trop grandes : $f \ll 10^{14} \text{ Hz} = f_c$.

Ex de milieux ohmiques : métaux, solutions ioniques.

Retour sur l'analogie conductions thermique et électrique en régime stationnaire :

En régime stationnaire, on a $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$. La loi d'Ohm locale s'écrit donc : $\vec{j} = -\gamma \vec{\text{grad}} V$

Conduction électrique	Conduction thermique
	
① Cause :	
Différence de potentiel électrique V Tension : $U = \Delta V = V_1 - V_2$ $\vec{\text{grad}} V \neq \vec{0}$	Différence de température T $\Delta T = T_1 - T_2$ $\vec{\text{grad}} T \neq \vec{0}$
② Conséquence :	
Intensité électrique : $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$ \vec{j} vecteur densité de courant électrique.	Flux thermique : $\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$ \vec{j}_{th} vecteur densité de flux thermique.
③ Loi phénoménologique	
Loi d'Ohm locale en régime stationnaire : $\vec{j} = -\gamma \cdot \vec{\text{grad}} V$ γ conductivité électrique	Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \cdot \vec{\text{grad}} T$ λ conductivité thermique
④ En régime stationnaire ou dans l'ARQS, le long d'un tube de courant, on a conservation...	
... de I (loi des branches / des nœuds).	... du flux thermique en l'absence de sources.
⑤ En régime stationnaire ou dans l'ARQS, loi reliant ① et ②	
	
Loi d'Ohm globale en convention récepteur : $U = V_1 - V_2 = R \cdot I$ R résistance électrique	Loi de Fourier globale en convention récepteur : $T_1 - T_2 = R_{th} \cdot \phi^{1 \rightarrow 2}$ R_{th} résistance thermique

➲ Exercice classique : Par une étude en régime stationnaire, déterminer l'expression de la résistance électrique R d'un conducteur ohmique filiforme de longueur L , de section S et de conductivité électrique γ en utilisant la loi d'Ohm locale.

◆ Puissance volumique dissipée par effet Joule

La puissance volumique cédée par le champ au milieu ohmique s'écrit :

$$P_V(M, t) = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

$$\Leftrightarrow P_V(M, t) = \gamma E(M, t)^2 = \frac{j(M, t)^2}{\gamma}$$

Cette puissance est toujours positive (*), il s'agit de la **PUISANCE VOLUMIQUE JOULE**.

(*) Dans un milieu ohmique, le champ électromagnétique fournit toujours de la puissance aux porteurs de charges : c'est l'**effet Joule**.

➲ Exercice classique : On considère un conducteur ohmique filiforme de longueur L , de section S et de conductivité électrique γ parcouru par des courants uniformément répartis en volume. On note i le courant qui parcourt le conducteur. Déterminer l'expression de la puissance Joule reçue par ce conducteur.

2) Bilan d'énergie : énergie EM volumique et vecteur de Poynting

a) Définitions

D'après § C.1.a, le champ électromagnétique est capable de céder de l'énergie à la matière. Il possède donc une énergie appelée **énergie électromagnétique**.

La répartition de l'énergie électromagnétique dans l'espace est donnée par **l'énergie électromagnétique volumique**, notée $u_{em}(M, t)$.

De plus, cette énergie est susceptible de se déplacer. On décrit le déplacement d'énergie par le **vecteur densité de courant d'énergie**, appelé **vecteur de Poynting**, noté $\vec{\Pi}(M, t)$.

Expressions admises et **à connaître** :

♦ **Energie électromagnétique volumique u_{em}** :

$$u_{em}(M, t) = \frac{\epsilon_0 E(M, t)^2}{2} + \frac{B(M, t)^2}{2\mu_0} = u_e(M, t) + u_m(M, t)$$

Avec $u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ terme d'origine **électrique** et $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ terme d'origine **magnétique**.

SI : J.m^{-3}

♦ **Vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$** :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0}$$

SI : W.m^{-2}

Le **vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$** est un vecteur dont :

- la direction indique la **direction de propagation de l'énergie électromagnétique** i.e. **de l'onde électromagnétique**
- la norme est homogène à une **puissance surfacique ou flux surfacique** :

La puissance électromagnétique élémentaire traversant la surface $d\vec{S}$ autour de M à t est :

$$d\mathcal{P}(t) = \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

→ Le **flux du vecteur de Poynting** à travers la surface **fermée Σ , orientée vers l'extérieur**, correspond à la **puissance rayonnée par le champ** à travers Σ :

$$P_{sortant} = \iint_{M \in \Sigma} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

Rq : Démonstrations (non exigibles) des expressions de $u_{em}(M, t)$ et de $\vec{\Pi}(M, t)$: cf annexe n°3.

Cas particulier des ondes électromagnétiques visibles (= lumière) :

Dans le cadre de l'optique géométrique, la direction du rayon lumineux est donnée localement par la direction du vecteur de Poynting « moyen » (moyenne temporelle).

$\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une intensité lumineuse, cf Ch01.

b) Ordres de grandeur

Source	Soleil	LASER Hélium-Néon *	Téléphone portable en communication
flux surfacique moyen $\langle \ \vec{\Pi}\ \rangle$	10^3 W.m^{-2} au niveau de la Terre	10^3 W.m^{-2}	$0,5 \text{ W.m}^{-2}$ contre le téléphone

* La puissance d'un laser Hélium-Néon, utilisé en TP, est de l'ordre de 1 mW. Le diamètre du faisceau est de l'ordre du millimètre. On en déduit ainsi le flux surfacique = puissance surfacique.

c) Bilan d'énergie électromagnétique sous forme intégrale

On considère une surface de contrôle Σ fermée et fixe quelconque. On note \mathcal{V} le volume délimité par Σ . L'énergie électromagnétique contenue à l'intérieur de Σ à l'instant t est :

$$U_{em}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} u_{em}(M, t) d\tau$$

Cette énergie varie dans le temps, pour deux raisons :

- l'énergie électromagnétique se déplace et traverse la surface Σ ;
- le champ cède de l'énergie aux charges du volume \mathcal{V} .

On va exprimer les deux puissances correspondantes :

- La puissance électromagnétique traversant Σ vers l'extérieur ou **puissance rayonnée par le champ à travers Σ vers l'extérieur** correspond au flux du vecteur de Poynting :

$$P_{sortant} = \oint_{P \in \Sigma} \vec{P}(P, t) \cdot \vec{dS}$$

La surface fermée Σ est orientée vers l'extérieur.

- La puissance perdue par le champ électromagnétique à l'intérieur de Σ est la **puissance qu'il cède aux charges** :

$$P_{cédée} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau$$

Le bilan de puissance (en W) pour le système considéré est :

$$\frac{dU_{em}}{dt} = -P_{sortant} - P_{cédée}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\iiint_{M \in \mathcal{V}} u_{em}(M, t) d\tau \right) = - \oint_{P \in \Sigma} \vec{P}(P, t) \cdot \vec{dS} - \iiint_{M \in \mathcal{V}} \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau$$

Rq : Bilan analogue à celui de l'énergie interne cf chapitre sur les transferts thermiques.

d) Bilan d'énergie électromagnétique sous forme locale (= équation de Poynting)

♦ En exploitant le théorème d'Ostrogradski, on déduit du bilan sous forme intégrale (cf c) un bilan de puissance volumique appelée **équation locale de Poynting** :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{P}) - \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

⇒ **Exercice classique** : Etablir l'équation locale de Poynting en géométrie **unidimensionnelle cartésienne** par une démarche analogue à celle du bilan d'énergie interne avec un terme source.

Cette équation n'est pas à connaître mais il faut **savoir en interpréter chaque terme**.

- le terme $\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$ traduit la variation de la quantité d'énergie présente, c'est le « terme de **stockage** ». La variation temporelle de u_{em} a deux origines :
 - le terme $\operatorname{div}(\vec{P})$ correspond au déplacement d'énergie, c'est le « terme de **transfert** » : perte par **rayonnement** ;
 - le terme $-P_V = -\vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$ correspond à la production ou la consommation locale d'énergie, c'est le « terme de **source** » : **puissance cédée aux charges du milieu**.

- ♦ Ce type d'équation locale se retrouve dans d'autres situations :
 - pour l'énergie thermique (cf chapitre sur les transferts thermiques)

En géométrie unidimensionnelle cartésienne, on obtient :

$$\underbrace{Sdx \frac{\partial u}{\partial t} dt}_{dU} = - \underbrace{\frac{\partial j_{th}}{\partial x} dx Sdt}_{\delta Q_{cond^o}} + \underbrace{\mathbb{P}_V S dx dt}_{\delta Q_{source}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{stockage} = - \underbrace{\frac{\partial j_{th}}{\partial x}}_{transfert} + \underbrace{\mathbb{P}_V}_{source}$$

- pour la charge (cf § A.1),

Dans le cas de la charge, le bilan traduit la conservation de la charge.

En géométrie unidimensionnelle cartésienne, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

Généralisation à trois dimensions :

$$\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0$$

- ♦ Cas particulier d'une région vide de charge et de courant :

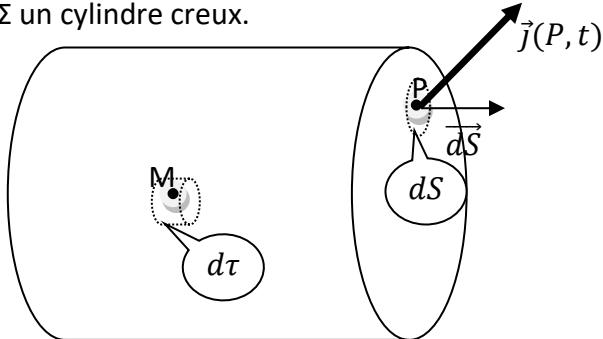
$$\vec{j}(M, t) = \vec{0} \text{ soit } \frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi}(M, t) = 0$$

→ il y a **conservation de l'énergie électromagnétique dans un milieu vide de charge et de courant.**

Annexe n°1 : Conservation de la charge – Démonstration du cas 3D par un bilan

Considérons un volume τ quelconque, fixe et indéformable, à l'intérieur d'un milieu où existent des charges électriques. On note Σ la surface fermée qui délimite ce volume.

Ex : τ est un cylindre plein et Σ un cylindre creux.



La charge contenue dans le volume τ à l'instant t s'écrit : $Q(t) = \iiint_{M \in \tau} \rho(M, t) d\tau$ avec $\rho(M, t)$ la densité volumique de charges réparties dans le volume élémentaire $d\tau$ autour du point M .

La conservation de la charge permet d'écrire que la variation de la charge Q au cours du temps $\frac{dQ}{dt}$ est due au flux de charges à travers la surface fermée Σ noté $\oint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P, t) \vec{dS}$ avec $\vec{j}(P, t)$ le vecteur densité de courant volumique en un point P de la surface Σ .

En considérant le vecteur surface élémentaire \vec{dS} autour de P dirigé vers l'extérieur, $\oint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P, t) \vec{dS} = I_{sortant}$ correspond au flux sortant donc au courant sortant du volume τ par la surface Σ .

Ainsi :

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + I_{sortant} = 0}$$

(équation INTEGRALE de conservation de la charge électrique)

Le volume τ étant fixe : $\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (\iiint_{M \in \tau} \rho(M, t) d\tau) = \iiint_{M \in \tau} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$

Finalement, le principe de conservation de la charge s'écrit : $\iiint_{M \in \tau} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = - \oint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P, t) \vec{dS}$

En utilisant le **théorème d'Ostrogradski** :

$$\oint_{P \in \Sigma} \vec{j}(P, t) \vec{dS} = \iiint_{M \in \tau} \operatorname{div} \vec{j}(M, t) d\tau$$

Ainsi : $\iiint_{M \in \tau} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau = - \iiint_{M \in \tau} \operatorname{div} \vec{j}(M, t) d\tau$ soit $\iiint_{M \in \tau} \left(\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) \right) d\tau = 0$

Ce résultat étant valable pour tout volume τ , on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(M, t) = 0}$$

(équation LOCALE de la conservation de la charge électrique)

Annexe n°2 : Résolution numérique de l'équation de Laplace (Cf CCINP PC Modélisation 2017)

On présente ici une méthode de résolution numérique pour déterminer une solution à l'équation de Laplace, les conditions aux limites étant données.

♦ Mise en équation – Méthode des différences finies :

On se place dans le cadre de l'**électrostatique** et on considère une **région de l'espace vide de charge**.

On a donc **l'équation de Laplace** :

$$\Delta V(M) = 0$$

La résolution analytique de cette équation aux dérivées partielles est en général difficile.

On se restreint ici à un **problème à 2 dimensions** que l'on étudie en **coordonnées cartésiennes** (x,y).

L'équation étudiée s'écrit donc :

$$\boxed{\Delta V(M) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0}$$

On veut résoudre cette équation sur un domaine de l'espace correspondant à un carré de côté L .

Comme pour l'équation de diffusion 1D, on se propose d'utiliser la **méthode des différences finies**.

On procède à une discrétisation / maillage du carré en $n \times n$ cellules .

On note :

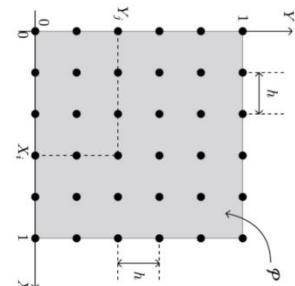
$$h = \frac{L}{n}$$

le pas de discrétisation selon (Ox) et (Oy).

Les nœuds du maillage sont repérés par les indices i selon (Ox) et j selon (Oy).

Ainsi, le potentiel V est décrit par les éléments d'un tableau de taille $(n + 1) \times (n + 1)$, on a :

$$V(x_i, y_j) = V(i \cdot h, j \cdot h) = V[i][j]$$



Les inconnues du problème sont les $(n + 1) \times (n + 1)$ valeurs $V[i][j]$ que l'on cherche à déterminer à partir de l'**équation de Laplace** et de **conditions aux limites données** (cf exemple ci-après).

Les conditions aux limites correspondent aux valeurs du potentiel sur les « bords » du carré (cas des CL de Dirichlet) et sur d'éventuelles électrodes situées au sein du carré : $V[i][j]$ est connu pour $i = 0$ ou n ou $j = 0$ ou n et pour les nœuds du maillage correspondant aux positions des éventuelles électrodes.

Rappel : La méthode des différences finies repose sur des développements de Taylor :

$$V(x \pm h, y) \approx V(x, y) \pm h \cdot \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y)$$

On en déduit une expression approchée de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$:

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y) \approx \frac{V(x + h, y) + V(x - h, y) - 2 \cdot V(x, y)}{h^2}$$

Sous « format discrétisé », cela donne :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{V[i + 1][j] + V[i - 1][j] - 2 \cdot V[i][j]}{h^2}$$

De la même façon :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{V[i][j + 1] + V[i][j - 1] - 2 \cdot V[i][j]}{h^2}$$

Ainsi :

$$\Delta V(x_i, y_j) \approx \frac{V[i + 1][j] + V[i - 1][j] + V[i][j + 1] + V[i][j - 1] - 4 \cdot V[i][j]}{h^2}$$

Etant donné l'équation de Laplace, on a :

$$V[i+1][j] + V[i-1][j] + V[i][j+1] + V[i][j-1] - 4 \cdot V[i][j] \approx 0$$

Ce qui correspond à un système d'équations reliant $V[i][j]$ aux 4 « points » voisins :

$$V[i][j] \approx \frac{V[i+1][j] + V[i-1][j] + V[i][j+1] + V[i][j-1]}{4}$$

♦ Structure du code – **Algorithme de Jacobi** :

① On **initialise** le tableau des valeurs de potentiel :

- prise en compte les conditions aux limites ;
- affectation de valeurs quelconques (nulles par exemple) à tous les autres éléments du tableau.

② On parcourt le domaine en écrivant que la valeur du potentiel sur le nœud (i, j) est fonction de la valeur des potentiels des nœuds $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j+1)$ et $(i, j-1)$.

Par **récurrence**, on fait alors évoluer les valeurs contenues dans les cellules, en veillant à **maintenir les conditions aux limites inchangées**.

Si on **itère** ce processus un nombre de fois suffisant, la valeur du **potentiel en chaque nœud converge vers sa valeur réelle** : les valeurs $V[i][j]$ sont inchangées entre 2 itérations successives dès lors que le potentiel respecte l'équation de Laplace.

③ En pratique, on **itère tant que l'écart** * des valeurs $V[i][j]$ entre 2 itérations successives ($k-1$ et k) reste **supérieur** à une certaine **tolérance** et tant que l'on n'a pas dépassé un nombre d'itérations maximal.

* *On calcule l'écart quadratique moyen :*

$$e = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i,j} (V_k[i][j] - V_{k-1}[i][j])^2}$$

Exemple : On veut déterminer le potentiel électrostatique entre les armatures d'un condensateur plan. On se ramène à une étude 2D en supposant la longueur des armatures infinie selon la direction perpendiculaire au plan de la figure. On a :

$V = \pm 5$ V sur les armatures

$V = 0$ V aux bords du domaine de calcul

♦ Résultats :

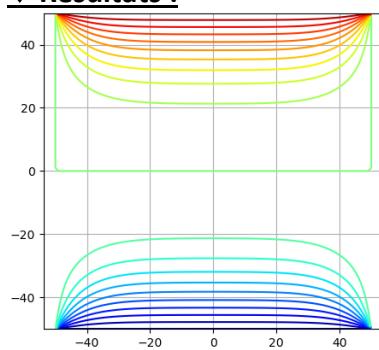


Figure (a)

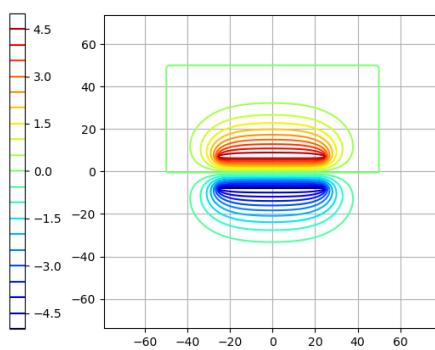


Figure (b)

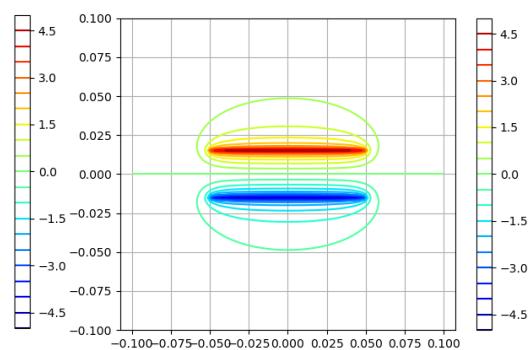


Figure (c)

Figure (a) Résultat du code donné p.15 : Résolution sur un carré tel que les bords haut et bas correspondent aux armatures du condensateur.

Figure (b) Résultat du code donné sur Cahier de Prépa : Résolution sur un carré tel que le condensateur est situé au centre.

Figure (c) Résultat du code donné sur Cahier de Prépa pour le ChEM1 : chaque armature est décomposée en $N = 100$ charges ponctuelles et on applique le théorème de superposition.

♦ Implémentation sous Python pour obtenir la figure (a) :

Implémentation de l'algorithme de Jacobi pour résoudre l'équation de Laplace dans le cas du condensateur dont les armatures sont les bords haut et bas de la région étudiée.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

## Parametres du probleme en USI
L = 50      # 1/2 cote du carre etudie en m
# Valeurs du potentiel sur les bords en V
V0 = 0
Vmoins = -5
Vplus = 5

## Discretisation de l'espace
# Nombre de cellules selon chaque direction
# et pas d'espace en USI
n = 100
h = L/n

## Tableau des potentiels
# Création, affectation des CL
V = np.zeros((n+1,n+1))
for i in range(n+1):
    V[i][n] = V0
    V[i][0] = V0
    V[0][i] = Vmoins
    V[n][i] = Vplus

## Algorithme de Jacobi
def ecart(V1,V2):
    diff = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            diff += (V1[i][j] - V2[i][j])**2
    e = np.sqrt(diff/(n**2))
    return e

def iteration_jacobi():
    oldV = V.copy()
    for i in range(1,n):
        for j in range(1,n):
            V[i][j] = (oldV[i+1][j] +
oldV[i-1][j] + oldV[i][j+1] + oldV[i][j-1])/4
    e = ecart(V,oldV)
    return e

def jacobi(eps,kmax):
    e = 2*eps
    k = 0      # compteur d'itérations
    while e > eps and k<kmax:
        e = iteration_jacobi()
        k += 1
    return k

## Maillage de l'espace
# Listes des xi et des yj
xlist = np.linspace(-L,L,n+1)
ylist = np.linspace(-L,L,n+1)
# Matrice correspondant au maillage de
# l'espace 2D
X, Y = np.meshgrid(xlist,ylist)

## Appel de la fonction pour resoudre et
# trace des equipotentielles
N = jacobi(1e-3,1e3)
print(N)
plt.contour(X,Y,V,20,cmap='jet') # trace les
# equipotentielles
plt.colorbar() # echelle de correspondance
# couleur-valeur de V
plt.axis('equal') # repere norme
plt.grid()
plt.show()
```

Annexe n°3 : Expressions de u_{em} et $\vec{\Pi}$

A l'aide des équations de Maxwell, nous pouvons exprimer la puissance volumique $P_V = \vec{j} \cdot \vec{E}$ cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges.

L'équation de Maxwell-Ampère permet d'exprimer $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

La puissance volumique s'écrit alors : $P_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$

D'après la formule (non exigible) : $div(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{rot} \vec{b}$ il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (-div(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{E}) - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = -div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E}$$

Cette dernière peut s'écrire : $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) = -div\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) - \vec{j} \cdot \vec{E}$

En comparant à l'équation locale du bilan d'énergie électromagnétique obtenue au § C.2.d :

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}(M, t)}{\partial t} = -div \vec{\Pi}(M, t) - \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)}$$

- **l'énergie électromagnétique volumique est** $u_{em} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$
- **le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique est** $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$: **vecteur de Poynting**

Rq : John Henry Poynting (1852-1914) est un physicien anglais qui a notamment travaillé sur les ondes électromagnétiques.

