Camille Vernet

TP 19. Pendule pesant.

I. Description du système.

1) $a = 12,3$ cm $\quad b = 37$ cm

II. Etude théorique

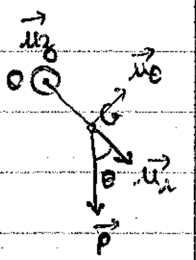
1). Moment d'inertie

a) Eq° du mvt.

2) Syst {pendule pesant = solide}
Réf terrestre galiléen
BdF : $\vec{P}$ poids
actions de liaison de la liaison pivot d'axe (Oz).
↳ supposée parfaite.
frott. de l'air négligés.

le pendule a un mvt de rotat° autour de (Oz) fixe ds R

$\Rightarrow$ LMC : $\dfrac{d\sigma_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}^{ext}$



or $\sigma_{(Oz)} = J_{(Oz)}\,\omega = J_{(Oz)}\,\dot{\theta}$

et $\mathcal{M}_{(Oz)}^{ext} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) + \underbrace{\mathcal{M}_{(Oz)}(\text{liaison pivot parfaite})}_{=0}$

$= (\vec{OG} \wedge \vec{P})\cdot\vec{u_z} = \vec{u_z}\cdot(d\,\vec{u_r} \wedge (mg\cancel{\cos\theta\,\vec{u_r}} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta})$

$= \vec{u_z}\cdot(-d\,mg\sin\theta\,\vec{u_z})$

$= -d\,m\,g\sin\theta$

ainsi $J_{(Oz)}\,\ddot{\theta} + mg\,d\sin\theta = 0$

$J_{(Oz)}$: moment d'inertie ; m : masse totale ; d → OG avec G centre d'inertie

3) dans le cas des petits angles, $\sin\theta \simeq \theta$

$\Rightarrow J_{(Oz)}\,\ddot{\theta} + mg\,d\,\theta = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

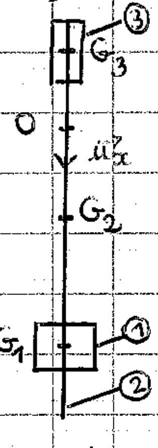
avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{m\,g\,d}{J_{(Oz)}}}$

4) On a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_{(Oz)}}{mgd}}$

$$\Leftrightarrow \quad J_{(Oz)} = mgd\,\frac{T_0^2}{(2\pi)^2}$$

avec $m = m_1 + m_2 + m_3$ et $d = OG$

b) Centre d'inertie

5). 

on a $m\vec{OG} = m_1\vec{OG_1} + m_2\vec{OG_2} + m_3\vec{OG_3}$

$$= m_1\left(b + \frac{h_1}{2}\right)\vec{u}_x + m_2\left(\frac{h_2}{2} - a\right)\vec{u}_x - m_3\left(a - \frac{h_3}{2}\right)\vec{u}_x$$

$$\Leftrightarrow \vec{OG} = \frac{1}{m}\cdot\left(m_1\left(b + \frac{h_1}{2}\right) + m_2\left(\frac{h_2}{2} - a\right) + m_3\left(\frac{h_3}{2} - a\right)\right)\vec{u}_x$$

ainsi $d = \frac{1}{m}\left(m_1\left(b + \frac{h_1}{2}\right) + m_2\left(\frac{h_2}{2} - a\right) + m_3\left(\frac{h_3}{2} - a\right)\right)$

$\Leftrightarrow$ $d = 29{,}1$ cm

rq : sans ③ $d = 32{,}5$ cm

c). Moment d'inertie : valeur théorique.

6). $J_{(Oz)\,th} = J_{(Oz)\,1} + J_{(Oz)\,2} + J_{(Oz)\,3}$

$$= J_{(G_1z)} + m_1\left(b + \frac{h_1}{2}\right)^2$$

$$+ J_{(G_2z)} + m_2\left(\frac{h_2}{2} - a\right)^2$$

$$+ J_{(G_3z)} + m_3\left(a - \frac{h_3}{2}\right)^2$$

Soit $J_{(Oz)\,th} = m_1\left[\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} + \left(b + \frac{h_1}{2}\right)^2\right] + m_2\left[\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} + \left(\frac{h_2}{2} - a\right)^2\right]$

$$+ m_3\left[\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} + \left(a - \frac{h_3}{2}\right)^2\right]$$

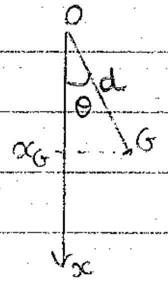
$J_{(Oz)th} = 0,025\ m^2.kg$

rq : sans ③ $J_{(Oz)th} = 0,024\ m^2.kg$

2) Aspects énergétiques

7) E_c d'un solide en rotat° autour d'un axe fixe / à R

$$E_c = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2$$



$$E_p = E_{p\,pes} = -mg\,x_G + cste$$
$$= -mgd\cos\theta + cste$$

On veut que $E_p(\theta = 0) = 0$

$$\Leftrightarrow -mgd + cste = 0$$
$$\Leftrightarrow cste = mgd$$

soit $E_p = \underbrace{mgd}_{0,617\ J}(1 - \cos\theta)$.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} J_{(Oz)} \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos\theta).$$

III. Acquisition de θ(t).

1). Réglages préliminaires

2). Acquisit° n° 1 : mesure de T_0

3). Acquisit° n°2 : effet des frottements

IV. Exploitat° des résultats.

1). Valeurs théorique et exp du moment d'inertie.

8). $J_{(Oz)th} = 0,025\ m^2.kg.$

9). $10\,T_0 = 12,9\,s \Rightarrow T_0 = 1,29\,s$

rq : pendule simple
- masse $= m_1$
- $L = b$
- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 1,22\,s$
  ↳ 6% écart

10). $d = 29,1\ cm$

11). $J_{(Oz)exp} = mgd\,\dfrac{T_0^2}{4\pi^2} = 0,026\ m^2.kg$

Ecart relatif entre valeur th et exp = 4%
$\rightsquigarrow$ les deux résultats concordent

2) Trajectoire de phase

12) les oscillations du pendule s'amortissent au cours du temps : ampl. des oscillat° $\downarrow$ qd $t \nearrow$ du fait de la f^{ce} de frottements non négligeables.

$\theta(t)$ est de la forme oscillation amorti exponentiellem^t

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)\, \exp(-t/\tau)$$

$\rightsquigarrow$ modèle à définir sous logger pro.

13)
$$\begin{cases} A = (817 \pm 2)\ \text{mrad} \\ \omega = (4{,}576 \pm 0{,}0003)\ \text{rad}\cdot s^{-1} \\ \varphi = (+3{,}237 \pm 0{,}003)\ \text{rad} \\ \tau = (29{,}6 \pm 0{,}2)\ s \end{cases}$$

14)  spirale $\rightsquigarrow$ oscillateur amorti
$\dot{\theta}$ en f° de θ

3) Evolut° de Em

15) Em $\downarrow$ au cours du temps : lié aux frott !