

TDEM4 – Electromagnétisme en régime variable

0 Exercices classiques vus en cours :

A.1 & A.2.c : Démonstration de l'équation locale de conservation de la charge

A.2.b : Formulation intégrale des équations de Maxwell

B.2.a : Démonstration des équations de Poisson et de Laplace

C.1.a : Expression de la force volumique et de la puissance volumique cédée par le champ aux charges

C.1.b : Expression de la résistance d'un conducteur ohmique filiforme et de la puissance Joule qu'il reçoit

C.2.c/d : Bilan d'énergie EM sous forme intégrale/locale

Capacités exigibles	Ch EM4	Ex 1	Ex 2,5	Ex 3	Ex 4	Ex 6	Ex 7	Ex 8
Principe de conservation de la charge : formulation locale. Etablir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas 1D.	•							•
Equations de Maxwell : formulations locale et intégrale. Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.	•	•	•	•	•	•	•	
Cas des champs statiques : équations locales. Etablir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.	•		•		•	•	•	•
Equation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique. Etablir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation. MPI : <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation résoudre numériquement l'équation de Laplace à une ou deux dimensions, les conditions aux limites étant fixées.	•				•			•
Force électromagnétique volumique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. Etablir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ EM aux porteurs de charge.	•					•		
Loi d'Ohm locale ; puissance volumique dissipée par effet Joule. Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.						•		
Energie EM volumique. Vecteur de Poynting. Bilan d'énergie. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser,...). Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant fournie.	•	•	•		•			

Données pour l'ensemble des exercices :

♦ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

♦ En coordonnées **cylindriques** : $M(r, \theta, z)$ et $\vec{a}(M) = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_z \vec{e}_z$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

♦ En coordonnées **sphériques** : $M(r, \theta, \varphi)$ et $\vec{a}(M) = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\varphi \vec{e}_\varphi$

$$\text{div } \vec{a}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin(\theta) a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

1 ✎ Une solution des équations de Maxwell (régime variable)

On cherche une solution des équations

de Maxwell dans le vide sous la forme :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= f(z)e^{-t/\tau}\vec{e}_x \\ \vec{B}(M, t) &= g(z)e^{-t/\tau}\vec{e}_y,\end{aligned}$$

pour tout point M et tout instant t . Cette solution présente l'intérêt physique d'être un signal réaliste, puisque limité dans le temps.

1. Montrer que les expressions précédentes satisfont les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. En utilisant les équations de Maxwell, trouver les équations satisfaites par les fonctions f et g .
3. On impose que f est paire, et que

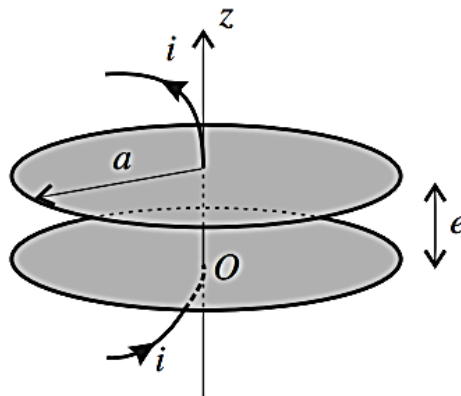
$$\vec{E}(O, 0) = E_0\vec{e}_x.$$

En déduire les expressions des champs électrique et magnétique.

4. Calculer le vecteur de Poynting associé à cette solution.

2 Bilan d'énergie d'un condensateur plan dans le cadre de l'ARQS électrique

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a , distants de e , d'axe Oz . Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



- 1) Exprimer la charge $q(t)$ portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle. Dans l'ARQS, en déduire la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, en convention récepteur par rapport au courant $i(t)$.
- 2) Déterminer l'expression du champ électrique en assimilant les disques à des plans infinis en considérant que tout se passe comme en électrostatique.
- 3) Montrer qu'il existe un champ magnétique non nul entre les armatures. Calculer ce champ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle quelconque d'axe (Oz) .
- 4) En déduire le vecteur de Poynting. On appelle S la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon a et hauteur e). Calculer le flux Φ_{Π} sortant de S . Conclure.

Rappel ChEM1 : $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$

3 Profil de masse volumique au sein de la Terre (« électrostatique ») (d'après oral PT)

On propose une autre méthode de résolution pour cet exercice déjà rencontré au TDEM1.

On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre O , de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de masse totale $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg. Le champ de pesanteur \vec{g} vérifie la relation

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi\mathcal{G} M_{\text{int}}$$

où M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ , et $\mathcal{G} = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ est la constante de gravitation.

1 - À quel résultat d'électrostatique cette relation est elle similaire ? Préciser les analogues de \vec{g} , \mathcal{G} et M_{int} .

2 - Quel est l'équivalent gravitationnel de l'équation de Maxwell-Gauss ?

Le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure 1.

3 - Justifier que $\vec{g}(M) = -g(r)\vec{u}_r$ dans la base sphérique ayant pour centre le centre de la Terre. Dédire de la question 2, la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre.

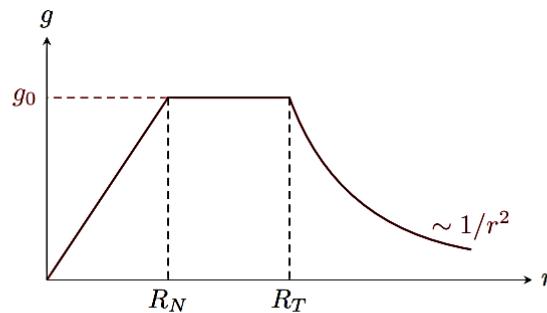


Figure 1 – Évolution du champ de pesanteur au sein de la Terre.

Avec $g(r) = \|\vec{g}(r)\|$ et g_0 la norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

4 Capteur capacitif de niveau de liquide (électrostatique)

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs. On se propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile...). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible, voir figure 2. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

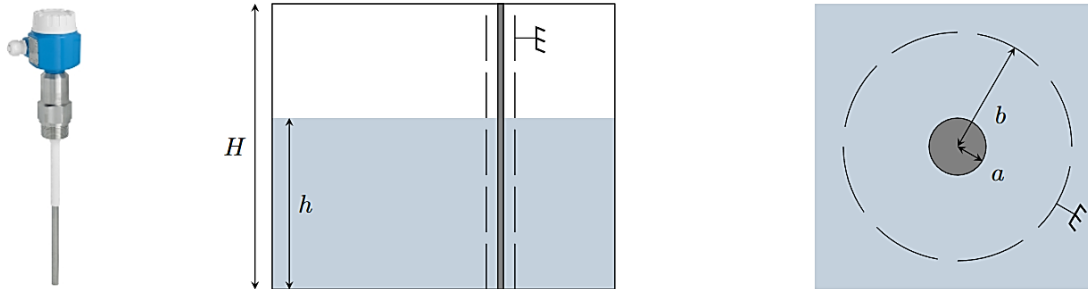


Figure 2 – Sonde à tube de masse.

Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- ▷ les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- ▷ les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- ▷ les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ϵ_0 par celle du liquide $\epsilon_0 \epsilon_r$, où ϵ_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.

Donnée : en coordonnées cylindriques,

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

- 1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.
- 2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.
- 3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.
- 4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H .
- 5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

5 Inductance d'un câble coaxial (magnétostatique) (d'après CCINP 2015)

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0 , est formé de deux armatures cylindriques de même axe $z'z$ (figure 1). L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre creux de rayon a ; l'armature extérieure (la gaine) est un cylindre creux de rayon b . Le courant continu d'intensité I qui circule dans l'âme dans le sens de \vec{e}_z revient avec la même intensité dans la gaine selon $-\vec{e}_z$; ce câble constitue ainsi un circuit fermé.

A un point M de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) et la base orthonormée directe cylindrique $\mathcal{B}_{cyl} = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$.

I.1.a) Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.

I.1.b) Donner la valeur de $\vec{B}(M)$ pour un point M intérieur à l'âme ($\rho < a$) ou extérieur à la gaine ($b < \rho$). Justifier.

I.1.c) Dans la base \mathcal{B}_{cyl} , exprimer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble en tout point M situé à la distance ρ ($a < \rho < b$) de son axe.

I.2.a) Calculer le flux de $\vec{B}(M)$ à travers la surface rectangulaire $(PQRS)$ correspondant à une longueur l du câble, représentée sur la figure 1 et orientée dans le sens de $+\vec{e}_\phi$.

I.2.b) Rappeler l'expression générale qui lie le flux de $\vec{B}(M)$ à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble en fonction de μ_0, l, a et b .

I.2.c) Application numérique pour un câble standard : calculer L si : $l = 1$ m, $a = 1$ mm, $b = 3$ mm.

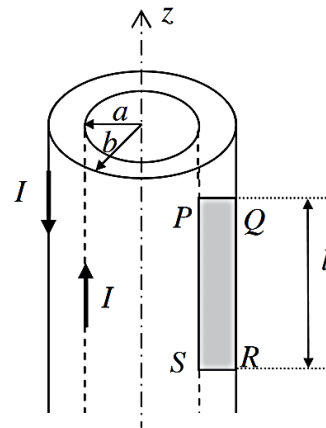


Figure 1 - Représentation schématique d'un câble coaxial. Surface rectangulaire $(PQRS)$ comprise entre l'âme et la gaine.

On se propose de retrouver le résultat précédent par une approche énergétique.

I.3.a) Déterminer l'énergie magnétique E_m stockée dans un tronçon de câble de longueur l .

I.3.b) Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans une bobine en fonction de son inductance propre et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble.

6 Courants de Foucault dans un cylindre (ARQS magnétique)

On place un cylindre conducteur d'axe (Oz), de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$.

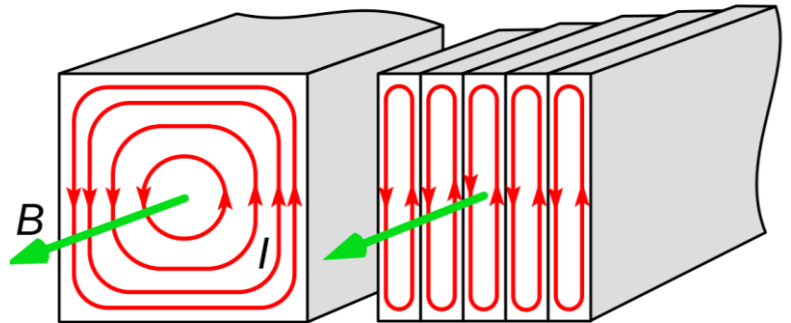
On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans la cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord.

1) On admet que $\vec{E}(t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$ (les variables r, θ et z correspondent aux coordonnées cylindriques). Montrer que $E(r, t) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2}$.

2) Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

3) Au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L, de section $S'_0 = \frac{S_0}{N}$ et tels que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment (cf figure).

Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule ?



7 Pince ampèremétrique (ARQS magnétique)

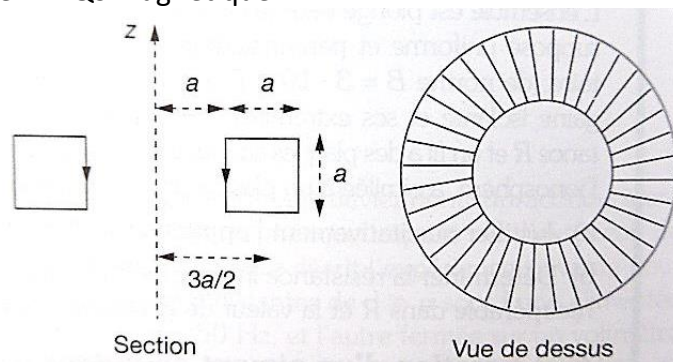
Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a = 1 \text{ cm}$, d'axe (Oz) et de rayon moyen $\frac{3a}{2}$, sur lequel on a bobiné régulièrement $N = 10^4$ spires carrées de côté a en série.

Ce circuit, de résistance $R = 0,2 \Omega$, est fermé sur un ampèremètre de résistance $r = 0,3 \Omega$.

Par ailleurs, un fil infini confondu avec l'axe (Oz) est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$, de fréquence $f = 50 \text{ Hz}$.

Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur du courant dans les spires en régime sinusoïdal forcé.

On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.



1) Soit \vec{B} le champ magnétique total créé par la spire et le fil. Justifier que $\vec{B} = B(r, z) \vec{u}_\theta$ et déterminer $\vec{B}(P)$ en un point P situé dans la section d'une spire carrée de tore.

2) En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires. Donner les expressions du coefficient d'inductance propre L du tore et le coefficient d'inductance mutuelle M entre le tore et le fil.

3) Calculer le rapport $\frac{i_m}{I_0}$ dans les conditions de l'étude. Indiquer l'intérêt d'un tel dispositif.

8 Diode à vide (électrostatique)

Une diode à vide est formée de deux électrodes planes parallèles, la cathode C et l'anode A, de surface S et séparées d'une distance d . La cathode est maintenue à un potentiel nul ($V_C = 0$) mais elle est chauffée. Par effet thermoélectronique, elle libère des électrons ayant une vitesse faible (prise nulle pour la suite). Ces électrons sont dirigés vers l'anode qui est portée au potentiel $V_A > 0$. On admet que les lignes de courant ainsi créées sont perpendiculaires aux deux plaques. La zone située entre les électrodes contient donc des électrons qui ont été émis sans vitesse initiale par la cathode.

On néglige tout effet de bord et on ne s'intéresse qu'à l'espace inter-électrodes dans lequel on considère que la charge volumique ρ , le potentiel V , la vitesse v et l'intensité électrique I ne sont des fonctions que de x .

1. Retrouver l'équation reliant le potentiel V et la densité de charge ρ .
2. Par des arguments numériques, montrer que le poids des électrons peut être négligé devant la force électrostatique.
3. Calculer la vitesse des électrons en x en fonction du potentiel $V(x)$.
4. Déterminer l'expression de l'intensité $I(x)$ traversant une surface d'aire S située à une distance $x < d$ de la cathode et parallèle à celle-ci. Exprimer le résultat en fonction de $\rho(x)$, S et $v(x)$.
5. Montrer que l'intensité ne dépend pas de x .
6. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par V . On fera apparaître le paramètre $a = \frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}}$.
7. Intégrer cette équation pour déterminer $V(x)$. On supposera que le champ et le potentiel sont nuls en $x = 0$.
8. En déduire la relation entre l'intensité I et le potentiel V_A de l'anode (loi de Child-Langmuir).