TDEM4 – Electromagnétisme en régime variable

0 Exercices classiques vus en cours :

A.1 & A.2.c : Démonstration de l'équation locale de conservation de la charge
A.2.b : Formulation intégrale des équations de Maxwell
B.2.a : Démonstration des équations de Poisson et de Laplace
C.1.a : Expression de la force volumique et de la puissance volumique cédée par le champ aux charges
C.1.b : Expression de la résistance d'un conducteur ohmique filiforme et de la puissance Joule qu'il reçoit
C.2.c/d : Bilan d'énergie EM sous forme intégrale/locale

Capacités exigibles	Ch EM4	Ex 1,3	Ex 2,7	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 8	Ex 9
Principe de conservation de la charge : formulation locale. Etablir l'équation locale de la conservation de la charge en coordonnées cartésiennes dans le cas 1D.	●							
Equations de Maxwell : formulations locale et intégrale. Associer l'équation de Maxwell-Faraday à la loi de Faraday. Citer, utiliser et interpréter les équations de Maxwell sous forme intégrale. Associer qualitativement le couplage spatio-temporel entre champ électrique et champ magnétique au phénomène de propagation. Vérifier la cohérence des équations de Maxwell avec l'équation locale de la conservation de la charge.	●	●	●	●		●	●	●
Cas des champs statiques : équations locales. Etablir les lois locales des champs statiques à partir des équations de Maxwell.	●		●			●		●
Equation de Poisson et équation de Laplace de l'électrostatique. Etablir les équations de Poisson et de Laplace de l'électrostatique. Exprimer par analogie les équations de Poisson et de Laplace dans le cas de la gravitation. **MPI :** Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation résoudre numériquement l'équation de Laplace à une ou deux dimensions, les conditions aux limites étant fixées.	●					●		
Force électromagnétique volumique. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charge. Etablir et utiliser l'expression de la puissance volumique cédée par le champ EM aux porteurs de charge.	●				●		●	
Loi d'Ohm locale ; puissance volumique dissipée par effet Joule. Analyser les aspects énergétiques dans le cas particulier d'un milieu ohmique.				●	●		●	
Energie EM volumique. Vecteur de Poynting. Bilan d'énergie. Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (flux solaire, laser,…). Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée. Effectuer un bilan d'énergie sous forme locale et intégrale. Interpréter chaque terme de l'équation locale de Poynting, celle-ci étant fournie.	●		●			●		

Données pour l'ensemble des exercices :

- $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} et $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}

- En coordonnées **cylindriques** : $M(r,\theta,z)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z$

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

- En coordonnées **sphériques** : $M(r,\theta,\varphi)$ et $\vec{a}(M) = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2a_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(\sin(\theta)\,a_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

1 Une solution des équations de Maxwell (régime variable)

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases}\vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_x \\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\vec{e}_y\end{cases}$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

1 - Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

2 - Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

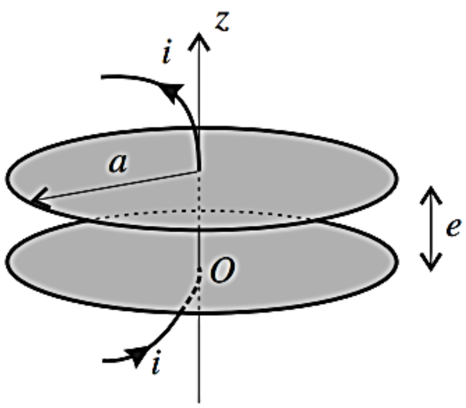
3 - Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4 - En déduire une équation différentielle vérifiée par f. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z{=}0,t{=}0) = E_0\,\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

5 - En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

2 Bilan d'énergie d'un condensateur plan dans le cadre de l'ARQS électrique

Un condensateur plan est constitué par deux disques conducteurs de rayon a, distants de e, d'axe Oz. Il est inséré dans un circuit parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.



1) Exprimer la charge $q(t)$ portée par l'armature inférieure du condensateur en admettant que sa moyenne temporelle est nulle. Dans l'ARQS, en déduire la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, en convention récepteur par rapport au courant $i(t)$.
2) Déterminer l'expression du champ électrique en assimilant les disques à des plans infinis en considérant que tout se passe comme en électrostatique.
3) Montrer qu'il existe un champ magnétique non nul entre les armatures. Calculer ce champ en appliquant le théorème d'Ampère généralisé à un cercle quelconque d'axe (Oz).
4) En déduire le vecteur de Poynting. On appelle S la surface délimitant le condensateur (cylindre de rayon a et hauteur e). Calculer le flux Φ_Π sortant de S. Conclure.
<u>Rappel ChEM1</u> : $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$

3 Profil de masse volumique au sein de la Terre (« électrostatique ») *(d'après oral PT)*

On reprend un exercice rencontré au TDEM1.

On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre O, de rayon $R_T = 6{,}4 \cdot 10^3$ km et de masse totale $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ vérifie la relation

$$\oiint_\Sigma \vec{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -4\pi\mathcal{G}\, M_{\text{int}}$$

où M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée Σ, et $\mathcal{G} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ est la constante de gravitation.

1 - À quel résultat d'électrostatique cette relation est elle similaire ? Préciser les analogues de $\vec{g}$, $\mathcal{G}$ et M_{int}.

2 – Quel est l'équivalent gravitationnel de l'équation de Maxwell-Gauss ?

Le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure 1.

3 – Justifier que $\vec{g}(M) = -g(r)\overrightarrow{u_r}$ dans la base sphérique ayant pour centre le centre de la Terre. Déduire de la question 2, la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre.

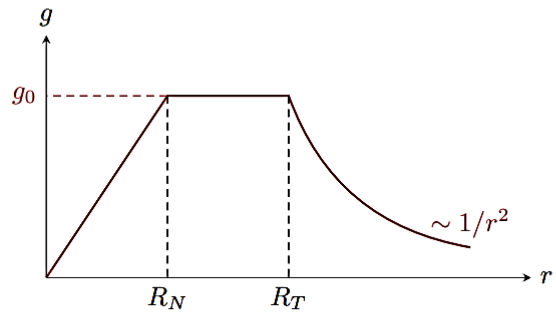


Figure 1 – Évolution du champ de pesanteur au sein de la Terre.

Avec $g(r) = \|\vec{g}(r)\|$ et g_0 la norme du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

4 Décharge d'un cylindre *(d'après oral PT)*

Considérons deux cylindres de même axe (Oz), de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. Le cylindre de rayon R_1 porte initialement une charge Q_0 en surface. Pour $t < 0$, l'espace entre les cylindres est assimilé au vide. À $t = 0$ on introduit entre les deux cylindres un fluide de conductivité γ, qui entraîne la décharge du cylindre de rayon R_1. On note $Q(t)$ la charge portée par ce cylindre.

1 - Déterminer la direction du champ électrique $\vec{E}$ et déterminer la variable dont dépend sa norme.

2 - Montrer que le champ magnétique est nul.

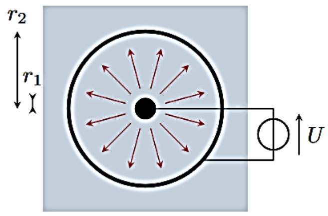
3 - Exprimer $\vec{E}$ en fonction de $Q(t)$.

4 - En utilisant une équation de Maxwell, déterminer une équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. En déduire un temps caractéristique de décharge.

5 - Que se serait-il passé si c'était le cylindre de rayon R_2 qui avait été initialement chargé ?

5 Chute ohmique dans un électrolyseur

L'électrolyse est un processus fondamental en chimie. Parmi ses multiples applications, citons la métallurgie (production de métaux à partir de minerais) ou la production de dihydrogène « vert » à partir d'énergies renouvelables. Cette technique étant très consommatrice en énergie, l'optimisation du rendement est essentielle. On modélise dans cet exercice l'un des phénomènes affectant le rendement énergétique d'électrolyse, la chute ohmique, dans un électrolyseur cylindrique.



L'électrode de travail et la contre-électrode d'un électrolyseur sont constituées de deux cylindres coaxiaux de rayons $r_1 < r_2$ plongeant sur une hauteur h dans une solution électrolytique de conductivité σ supposée uniforme et constante. Une tension $U = V(r_1) - V(r_2) > 0$ est imposée entre les deux électrodes. On suppose le régime stationnaire atteint. La densité de courant dans la solution s'écrit alors sous la forme

$$\vec{j} = j(r)\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad j(r) > 0\,.$$

1 - Exprimer le courant traversant un cylindre de rayon r compris entre r_1 et r_2. En déduire l'expression de $j(r)$ en fonction de I, r et h, puis celle du champ électrique $\vec{E}$ au sein de la solution électrolytique.

2 - Établir l'expression de la résistance R de la portion de solution comprise entre les deux électrodes.

3 - Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule dans la solution en fonction du courant I d'électrolyse.

6 Capteur capacitif de niveau de liquide (électrostatique)

Le niveau de liquide contenu dans une cuve peut être mesuré en temps réel à l'aide de capteurs capacitifs. On se propose d'étudier l'un de ces capteurs, appelé sonde à tube de masse, utilisable pour mesurer le niveau d'un liquide non conducteur (solvant organique, huile...). Il se présente comme une longue tige cylindrique de même hauteur que la cuve et de rayon beaucoup plus faible, voir figure 2. Le capteur est constitué de deux cylindres métalliques coaxiaux formant un condensateur dont la capacité dépend directement du niveau de liquide dans la cuve. Le cylindre intérieur est un cylindre plein, alors que le cylindre extérieur est creux et percé d'orifices permettant au fluide de pénétrer dans l'espace entre les deux cylindres. Le cylindre extérieur est électriquement relié à la terre.

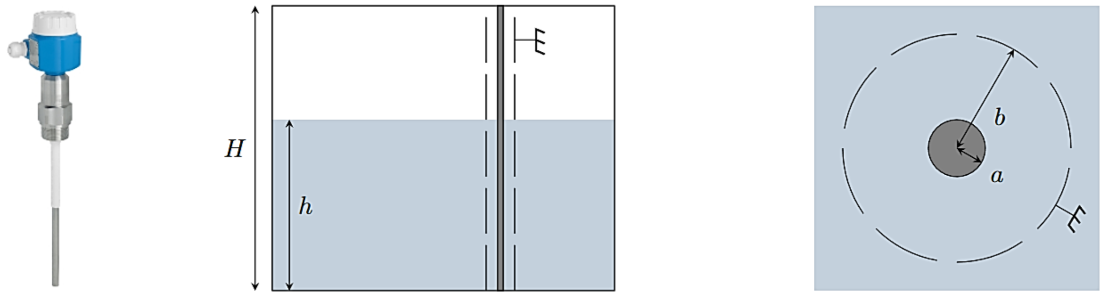


Figure 2 – Sonde à tube de masse.

Hypothèses pour l'ensemble de l'exercice :

- ▷ les orifices ne modifient pas les propriétés électromagnétiques du cylindre extérieur, qui sont identiques à celles d'un cylindre creux non percé ;
- ▷ les effets de bords aux limites de la cuve et à l'interface entre le liquide et l'air sont négligeables ;
- ▷ les propriétés électromagnétiques du fluide sont analogues à celles du vide à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par celle du liquide $\varepsilon_0\varepsilon_r$, où ε_r (sans dimension) est la constante diélectrique du liquide.

Donnée : en coordonnées cylindriques,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,.$$

1 - Justifier que le potentiel V dans l'espace contenu entre les deux cylindres ne dépend que de la distance r à l'axe des cylindres.

2 - En déduire l'expression du potentiel dans l'espace entre les deux cylindres en fonction du potentiel V_0 auquel est porté le cylindre central.

3 - Déterminer le champ électrique régnant entre les deux cylindres.

4 - Exprimer l'énergie électrostatique stockée entre les deux cylindres en fonction notamment de h et H.

5 - Montrer que la mesure de la capacité C du condensateur formé par les deux cylindres permet de déterminer le niveau h de liquide contenu dans la cuve.

7 ✐ Inductance d'un câble coaxial (magnétostatique) *(d'après CCINP 2015)*

Dans un repère cartésien $\left(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z\right)$, un câble coaxial, considéré comme infiniment long et placé dans un milieu de perméabilité magnétique μ_0, est formé de deux armatures cylindriques de même axe $z'z$ (figure 1). L'armature intérieure (l'âme) est un cylindre creux de rayon a ; l'armature extérieure (la gaine) est un cylindre creux de rayon b. Le courant continu d'intensité I qui circule dans l'âme dans le sens de $\vec{e}_z$ revient avec la même intensité dans la gaine selon $-\vec{e}_z$; ce câble constitue ainsi un circuit fermé.

A un point M de l'espace, on associera les coordonnées cylindriques (ρ,ϕ,z) et la base orthonormée directe cylindrique $\mathcal{B}_{cyl}=\left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\phi,\vec{e}_z\right)$.

I.1.a) Exploiter les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer l'orientation du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble ainsi que les variables dont il peut dépendre en un point M quelconque de l'espace.

I.1.b) Donner la valeur de $\vec{B}(M)$ pour un point M intérieur à l'âme $(\rho<a)$ ou extérieur à la gaine $(b<\rho)$. Justifier.

I.1.c) Dans la base $\mathcal{B}_{cyl}$, exprimer le champ magnétostatique $\vec{B}(M)$ créé par ce câble en tout point M situé à la distance ρ $(a<\rho<b)$ de son axe.

I.2.a) Calculer le flux de $\vec{B}(M)$ à travers la surface rectangulaire $(PQRS)$ correspondant à une longueur l du câble, représentée sur la figure 1 et orientée dans le sens de $+\vec{e}_\phi$.

I.2.b) Rappeler l'expression générale qui lie le flux de $\vec{B}(M)$ à l'inductance propre (ou coefficient d'auto-inductance) et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble en fonction de μ_0, l, a et b.

I.2.c) Application numérique pour un câble standard : calculer L si : $l = 1$ m, $a = 1$ mm, $b = 3$ mm.

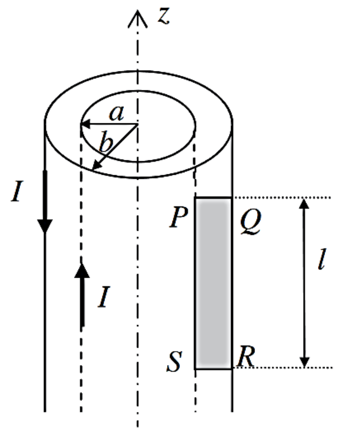


Figure 1 - Représentation schématique d'un câble coaxial. Surface rectangulaire $(PQRS)$ comprise entre l'âme et la gaine.

On se propose de retrouver le résultat précédent par une approche énergétique.

I.3.a) Déterminer l'énergie magnétique E_m stockée dans un tronçon de câble de longueur l.

I.3.b) Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans une bobine en fonction de son inductance propre et en déduire l'inductance L d'une longueur l du câble.

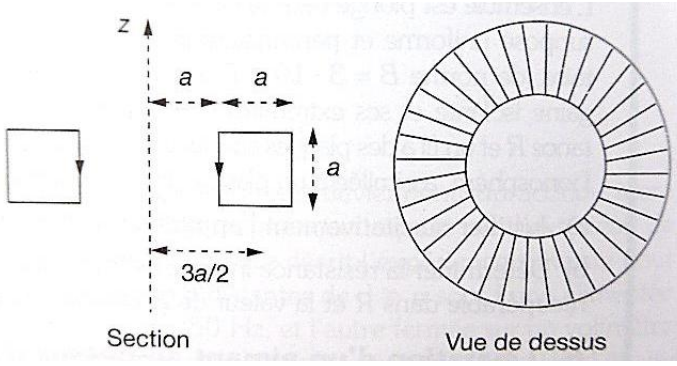
8 Effet Joule dans un cylindre (*d'après oral CCINP MP*)

Un cylindre conducteur (plein) de conductivité électrique σ, de rayon a, de longueur ℓ est placé à l'intérieur d'un solénoïde de très grande longueur. L'axe du cylindre est confondu avec celui du solénoïde, on le note (Oz). Le solénoïde est parcouru par un courant de fréquence $f = 50\ Hz$ qui créé un champ magnétique : $\vec{B} = B_0 cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}$.

1) Justifier la présence d'un champ électrique à l'intérieur du cylindre. Comment s'appelle ce phénomène ? Par quelle équation de Maxwell est-il régi ?
2) Justifier que ce champ électrique est orthoradial.
3) Déterminer l'expression de ce champ électrique.
4) Donner l'expression de la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule dans le conducteur (en un point situé à une distance r de l'axe (Oz)).
5) En déduire la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans tout le conducteur.

9 Pince ampèremétrique (ARQS magnétique)

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté a = 1 cm, d'axe (Oz) et de rayon moyen $\frac{3a}{2}$, sur lequel on a bobiné régulièrement N = 10^4 spires carrées de côté a en série.
Ce circuit, de résistance R = 0,2 Ω, est fermé sur un ampèremètre de résistance r = 0,3 Ω.
Par ailleurs, un fil infini confondu avec l'axe (Oz) est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$, de fréquence f = 50 Hz.
Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur du courant dans les spires en régime sinusoïdal forcé.
On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique.



1) Soit $\vec{B}$ le champ magnétique total créé par la spire et le fil. Justifier que $\vec{B} = B(r,z)\overrightarrow{u_\theta}$ et déterminer $\vec{B}(P)$ en un point P situé dans la section d'une spire carrée de tore.
2) En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires. Donner les expressions du coefficient d'inductance propre L du tore et le coefficient d'inductance mutuelle M entre le tore et le fil.
3) Calculer le rapport $\frac{i_m}{I_0}$ dans les conditions de l'étude. Indiquer l'intérêt d'un tel dispositif.