

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur.**
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.**

Ex 1 : Glissement d'un anneau sur une tige

On considère une tige horizontale en rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical (Oz).

On introduit la demi-droite $[Ox')$ de même direction que la tige.

Un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k est enfilé sur la tige. Une de ses extrémités est fixée en O et l'extrémité mobile est reliée à un anneau qui peut glisser sans frottement sur $[Ox')$. Initialement, $OM = \ell_0$ et la vitesse de glissement de l'anneau le long de la tige est nulle.

On assimile l'anneau à un point matériel M de masse m .

On note R' le référentiel lié à la tige.

- 1) Etablir l'équation du mouvement de l'anneau dans le référentiel R' .
- 2) Discuter la nature du mouvement de l'anneau.

Ex 2 : Sonogramme

On enregistre, à l'aide d'un microphone, le son d'une note de musique tenue produite en sifflant avec la bouche.

On note $s_a(t)$ le signal obtenu. Le spectre d'amplitude du signal en sortie du microphone est donné sur la figure 8, l'échelle verticale étant graduée en décibels. L'amplitude du pic 1 vaut $a_1 = 100$ mV.

❑ 16 — Déterminer la fréquence f_1 du fondamental (pic 1) de cette note ainsi que l'amplitude a_2 du pic 2. On donne $10^{0,5} \approx 3,16$.

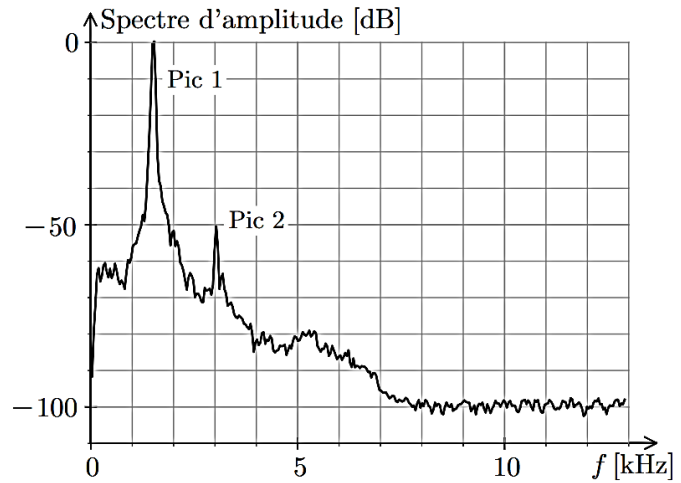


FIGURE 8 – Spectre d'amplitude d'un son sifflé tenu.

Les pics 1 et 2 sont assimilés à des composantes harmoniques et on néglige tout autre contenu spectral. On note T_a la durée totale de l'enregistrement et f_e la fréquence d'échantillonnage. La méthode d'analyse spectrale employée génère un spectre dont la résolution spectrale, notée δf , est l'inverse de la durée d'acquisition du signal.

❑ 17 — Calculer numériquement la plus petite valeur de f_e respectant la condition de Nyquist-Shannon, et la durée d'acquisition T_a donnant une résolution spectrale de 100 Hz.

Un sonogramme est une représentation graphique permettant de visualiser l'évolution des composantes harmoniques d'un son au cours du temps. Dans sa version simplifiée, c'est un diagramme à deux dimensions ayant en abscisse le temps et en ordonnée les fréquences. À un instant t donné, une composante harmonique de fréquence f est représentée par un point de coordonnées (t, f) .

Le sonogramme simplifié de $s_a(t)$ est représenté sur la figure 9a. Dans un sonogramme complet, on ajoute l'information sur l'amplitude des composantes harmoniques en grisant les points du diagramme à l'aide d'une échelle allant du blanc pour les faibles amplitudes (< -50 dB), au noir pour les fortes (> 0 dB). Le sonogramme complet de $s_a(t)$ est donné sur la figure 9b.

Pour construire un sonogramme, on calcule les spectres successifs du signal entre les dates nT_a et $(n+1)T_a$, n étant un entier positif ou nul et T_a , la durée des intervalles temporels d'acquisition.

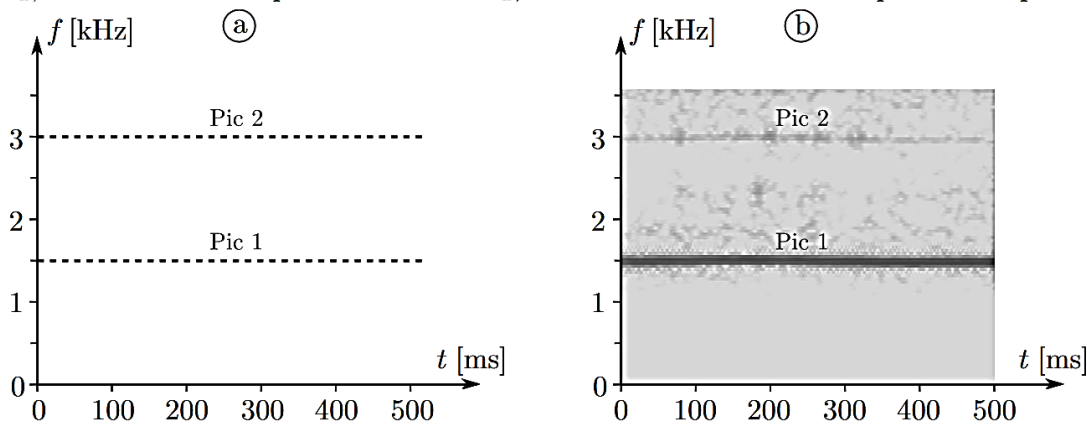


FIGURE 9 – Sonogramme d'un son sifflé tenu a) simplifié b) complet.

❑ 18 — On note τ la durée totale de l'enregistrement sonore. La résolution spectrale δf du sonogramme dépend-elle de T_a ou de τ ? Combien de pixels (rectangles élémentaires composant le sonogramme) comporte un sonogramme de fréquence maximale f_M et de durée τ ? Effectuer l'application numérique lorsque $f_M = 3,5$ kHz et $\tau = 500$ ms.

On produit un nouveau son sifflé, $s_b(t)$, mais cette fois, de hauteur décroissante (donc vers les sons graves). Ce son possède encore deux composantes harmoniques, mais la fréquence f'_1 du fondamental décroît au cours du temps de manière affine : $f'_1(t) = f_1 \times (1 - t/\tau_d)$, $\tau_d > 0$ étant une constante temporelle.

❑ 19 — Quelle condition doit vérifier τ_d afin que l'on puisse suivre l'évolution temporelle de la fréquence du fondamental sur le sonogramme? Construire le sonogramme simplifié de $s_b(t)$ dans l'intervalle temporel $[0; 0,5 \tau_d]$. On prendra soin de mentionner sur le graphique toutes les informations connues.

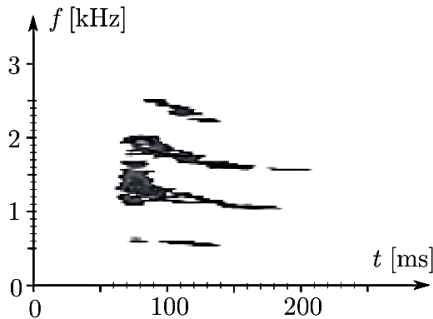


FIGURE 10 – Sonogramme du quetzal

Le chant d'un oiseau est plus riche en harmoniques que le sifflement précédent.

Le sonogramme d'un quetzal *jeune* est représenté sur la figure 10 extraite de Lubman, D., J. Acoust. Soc. Am. 112 (5), 2008.

❑ 20 — Déterminer la durée approximative τ_q du chant du quetzal puis mesurer, à la date $t = 130$ ms, la fréquence $f_{q,1}$ du fondamental du chant ainsi que celles $f_{q,i}$ (i entier) des autres harmoniques visibles sur le sonogramme.

Ex 3 : Chaîne électronique de mesure de la température

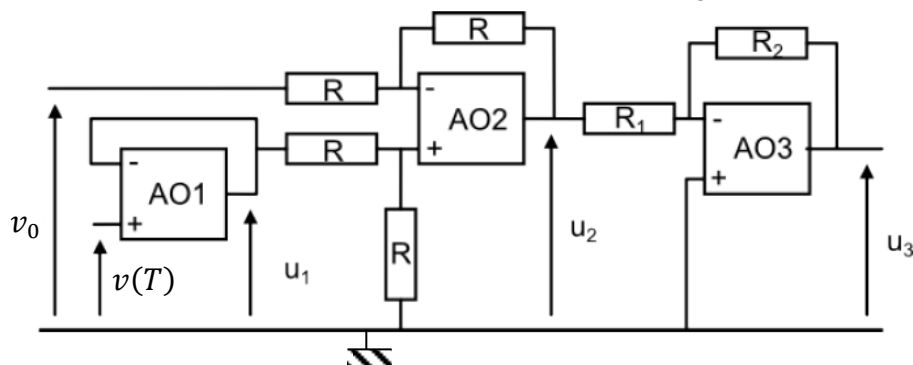
On construit une chaîne électronique avec trois Amplificateurs Linéaires Intégrés, ALI, (cf figure ci-après). Les trois ALI sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Dans ce cadre, pour les deux entrées de chaque ALI, on a des courants nuls : $i^+ = i^- = 0$ et entre les entrées de chaque ALI, on a une différence de potentiel nulle : $\varepsilon = V^+ - V^- = 0$.

La tension $v(T)$ est fournie par un capteur de température. Cette tension est seulement fonction de la température T et elle est donnée avec précision par :

$$v(T) = v_0 - aT, \text{ avec } v_0 = 0,7 \text{ V et } a = 2 \text{ mV} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}.$$

Les résistances ont pour valeurs $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$.

1. Quelle relation existe-il entre u_1 et $v(T)$. Comment s'appelle le montage de l'ALI1 ?
2. Exprimer u_2 en fonction de u_1 et v_0 . En déduire le nom que l'on pourrait attribuer à un tel montage ? Donner ensuite u_2 en fonction de la température T .
3. Exprimer u_3 en fonction de u_2 puis u_3 en fonction de la température T .
4. Justifier l'emploi d'un millivoltmètre pour mesurer la tension u_3 à température "ambiante".



Ex 4 : Quelques propriétés chimiques des ions hypochlorite dans l'eau de Javel

Données :

- constante d'acidité à 298 K du couple HClO/ClO^- : $K_a = 10^{-7,5}$;
- produit ionique de l'eau à 298 K : $K_e = 10^{-14}$;
- à 298 K, on prendra $\frac{RT}{F} \cdot \ln(10) \approx 0,06 \text{ V}$.

Document n° 1 - Stabilité des ions hypochlorite

La décomposition de l'eau de Javel avec formation de dioxygène O_2 est favorisée par l'ajout de sels métalliques qui catalysent cette réaction, par une diminution du pH, une augmentation de la force ionique et une augmentation de la température. Cette décomposition, produisant un gaz, conduit dans des récipients fermés à une augmentation de la pression au-dessus du liquide et est donc à éviter pour des raisons de sécurité. L'eau de Javel est donc vendue dans des contenants en plastique étanches à la lumière et non contaminés par des ions métalliques.

En l'absence de catalyseurs, la décomposition de l'ion hypochlorite en ion chlorate ClO_3^- (aq) est beaucoup plus rapide que l'oxydation de l'eau (d'un facteur 10, ce qui correspond approximativement à 95 % de la perte d'ions hypochlorite ClO^-). Les ions chlorate ClO_3^- (aq.) présents dans le milieu ne possèdent aucune propriété bactéricide.

Document n° 2 - Superposition de diagrammes potentiel - pH

La figure 6 (page 4) est la superposition des droites relatives au couple $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ et d'un diagramme simplifié de l'élément chlore, c'est-à-dire dans une situation chimique sans présence d'ions chlorate. Les seules espèces à envisager sont donc celles des couples du tableau 2 (page 5) pour lesquelles on indique la valeur du potentiel standard E° par rapport l'E.S.H. (Electrode Standard à Hydrogène).

La figure 7 (page 5) superpose au diagramme simplifié du chlore précédent les segments de droites traduisant les lois de Nernst de deux couples où intervient l'ion chlorate conformément aux données du tableau 3 (page 5).

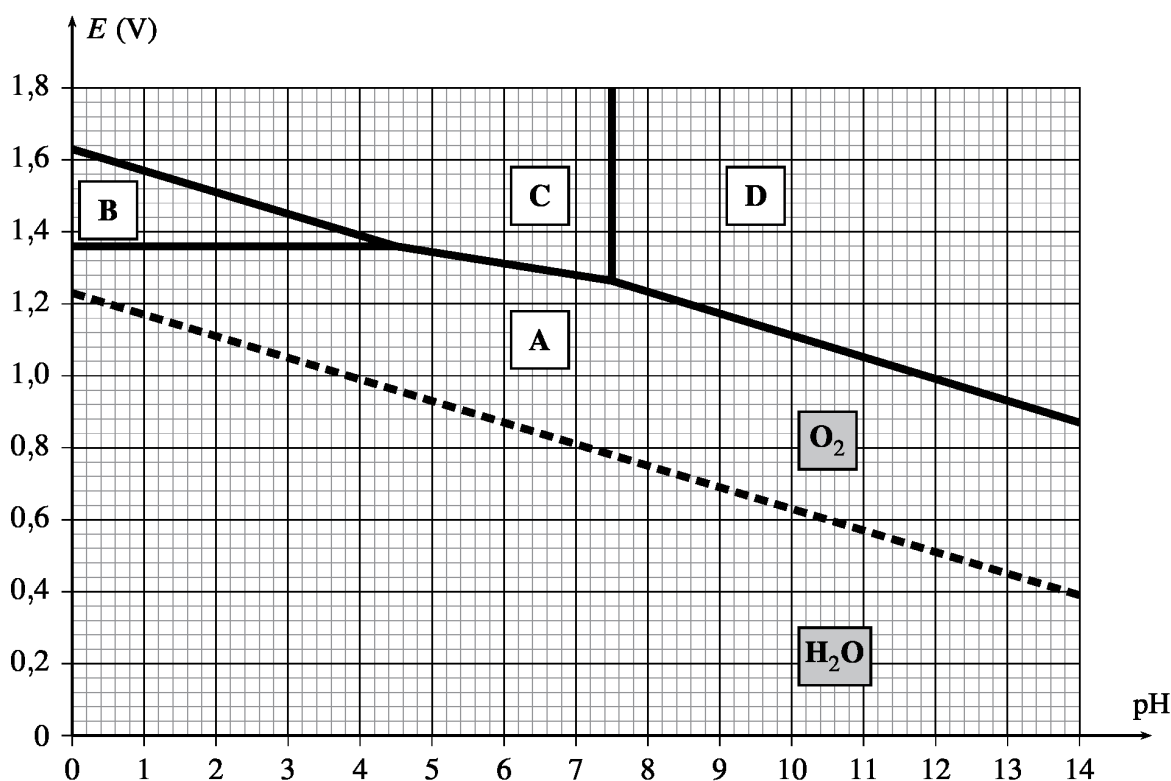


FIGURE 6 – Superposition des diagrammes potentiel-pH du chlore simplifié et de l'eau. La concentration des espèces dissoutes est de 1 mol.L^{-1} .

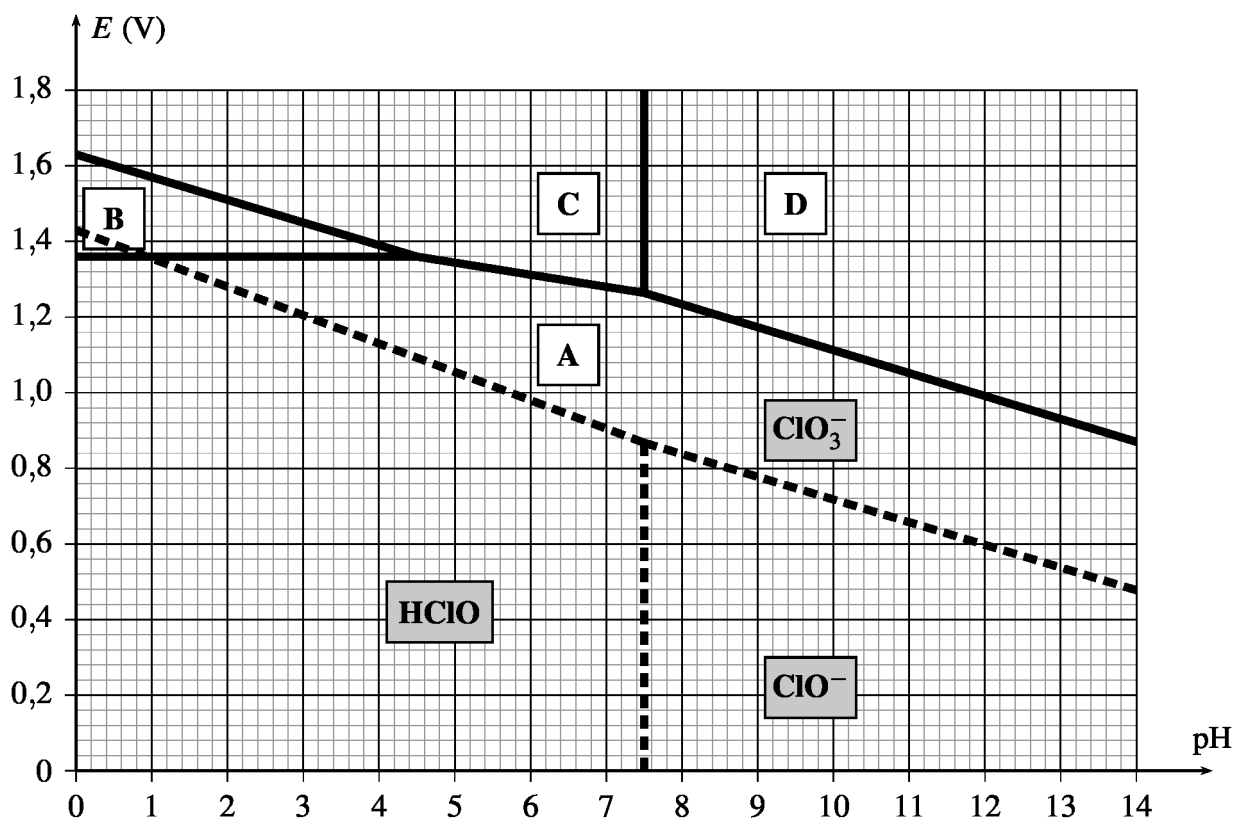


FIGURE 7 – Superposition des diagrammes potentiel-pH du chlore simplifié et des deux couples faisant intervenir les ions chlorate. La concentration des espèces dissoutes est de 1 mol.L^{-1} .

Couples	$\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	Cl_2/Cl^-	HClO/Cl_2	HClO/Cl^-	ClO^-/Cl^-
$E^\circ(\text{V/E.S.H.})$	1,23	1,36	1,63	1,49	1,73

TABEAU 2 – Potentiel standard des couples d'oxydoréduction.

Couples	$\text{ClO}_3^-/\text{HClO}$	$\text{ClO}_3^-/\text{ClO}^-$
$E^\circ(\text{V/E.S.H.})$	1,43	1,32

TABEAU 3 – Potentiel standard des couples d'oxydoréduction.

Fabrication de l'eau de Javel

L'eau de Javel est commercialisée sous deux niveaux de dilution dans des bouteilles à 2,6 % de chlore actif (masse volumique $\rho_1 = 1,03 \text{ g.cm}^{-3}$) et dans des berlingots à 9,6 % de chlore actif (masse volumique $\rho_2 = 1,15 \text{ g.cm}^{-3}$). On définit le pourcentage de chlore actif par la masse de dichlore formé (suite à une acidification du mélange équimolaire d'ions hypochlorite et chlorure) pour 100 g de solution.

II.4.a. Indiquer, pour chacun des domaines (A, B, C, D) présents dans les diagrammes potentiel - pH du document n° 2, l'espèce chimique correspondante.

II.4.b. Préciser alors le principe de fabrication de l'eau de Javel à partir du dichlore Cl_2 . Écrire l'équation de la réaction mise en jeu pour une mole de dichlore Cl_2 notée (2).

II.4.c. Calculer alors la concentration molaire volumique en ions hypochlorite dans les solutions à 2,6 % et 9,6 %.

II.4.d. Pourquoi est-il nécessaire de refroidir le mélange réactionnel ?

On donne $\Delta_r H_2^\circ(298 \text{ K}) = -103 \text{ kJ.mol}^{-1}$.

II.4.e. Écrire l'équation des réactions, notées (3) et (4), responsables de la décomposition des ions hypochlorite. On utilisera les plus petits coefficients stœchiométriques entiers dans les réactions (3) et (4).

II.4.f. Calculer les constantes d'équilibre K_3° et K_4° des deux réactions de décomposition des ions hypochlorite ClO^- .

Ex 5 : Stabilisateur d'image

Un des problèmes récurrents et que connaissent tous les photographes, professionnels ou amateurs, est le "bougé" qui se produit lorsqu'une photographie est prise alors que le photographe est en mouvement. Le résultat est une image floue. Une des possibilités pour éviter ce phénomène consiste à augmenter la vitesse (diminuer la durée d'exposition) ce qui n'est pas toujours possible.

Le premier système stabilisateur d'image a été inventé par Garrett Brown en 1972 et ne s'appliquait qu'aux caméras. Il était donc destiné aux professionnels du cinéma. À partir des années 2000, différents systèmes furent adaptés aux appareils photos.

Cette partie s'intéresse au fonctionnement d'un appareil capable de mesurer les mouvements que le photographe communique (volontairement ou non) au boîtier de l'appareil photo lors d'une prise de vue.

V.1 - Étude d'un oscillateur mécanique

On considère un oscillateur mécanique (**figure 3**) constitué d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'extrémité supérieure est fixée sur la face supérieure horizontale d'une boîte. À l'extrémité inférieure du ressort est accrochée une plaque de masse m .

Ce système peut constituer un accéléromètre. Il pourra donc mesurer les accélérations de la boîte (qui modélise un appareil photo par exemple). On négligera d'éventuels mouvements autres que celui de translation verticale.

On supposera le référentiel terrestre galiléen et on note g la norme de l'accélération de la pesanteur.

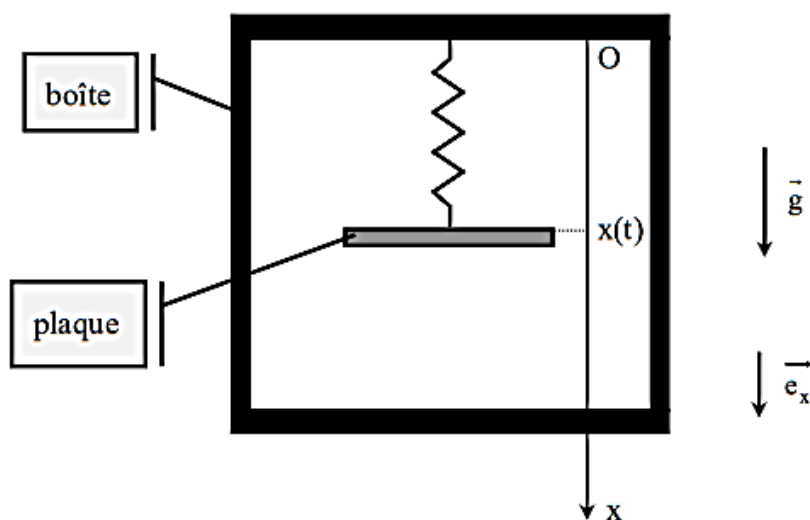


Figure 3 - Schéma simplifié d'un accéléromètre

Q22. En supposant que la boîte et la plaque sont immobiles, exprimer la longueur x_{eq} du ressort à la position d'équilibre dans ces conditions, en fonction de m , g , k et ℓ_0 .

Par la suite, on étudie le mouvement de la plaque par rapport à la boîte dans le cas où celle-ci est elle-même en mouvement par rapport au référentiel terrestre. On note $\vec{a} = a(t)\vec{e}_x$ l'accélération de la boîte par rapport au sol (lié au référentiel terrestre).

On note alors $x(t)$ la position instantanée de la plaque comptée par rapport à O, dans le référentiel lié à la boîte.

Au cours de son mouvement dans la boîte, la plaque est soumise également à des frottements visqueux, modélisables par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$ est la vitesse de la plaque par rapport à la boîte et α un coefficient strictement positif.

Q23. a) La boîte constitue-t-elle un référentiel galiléen ?

b) Écrire la deuxième loi de Newton appliquée à la masse dans le référentiel de la boîte.

Q24. Montrer que $x(t)$ obéit à une équation différentielle du type $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$ où $f(t)$

est une fonction du temps avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{k \cdot m}$ et $f(t)$ à exprimer.

On considère que la boîte est soumise à une accélération sinusoïdale $a(t) = A_m \cos(\omega t)$ d'amplitude A_m , de pulsation ω et de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$. On admet avoir atteint le régime sinusoïdal forcé et que le déplacement par rapport à la position d'équilibre est de la forme $X(t) = x(t) - x_{eq} = \text{Re}\{X_m \exp(j(\omega t + \phi))\}$ avec $j^2 = -1$. X_m est un réel positif ou nul.

On montre alors que X_m vaut :
$$\frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}.$$

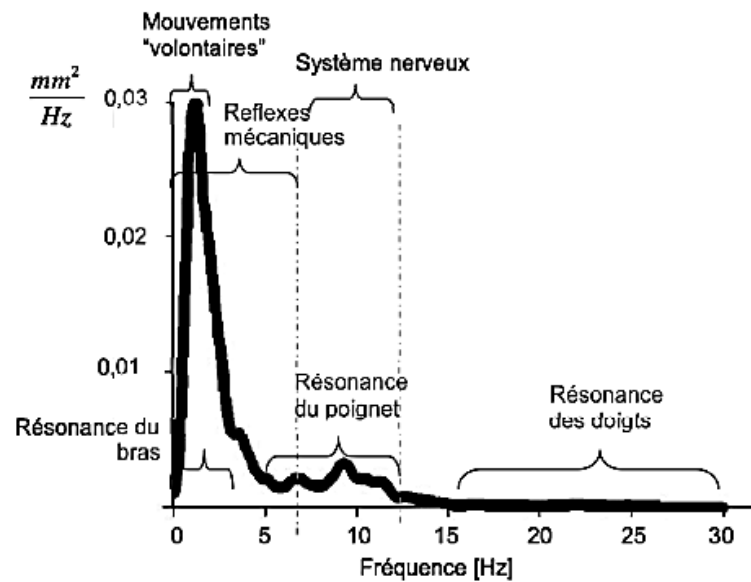
Q25. a) Montrer qu'il existe un domaine de fréquences pour lesquelles la réponse $X(t)$ est proportionnelle à l'accélération $a(t)$.

b) Établir la relation entre $X(t)$ et $a(t)$ en fonction de k et m dans ce domaine de fréquences.

Q26. Le **document 8** est une synthèse de l'analyse spectrale du tremblement de la main (pour un être humain) ainsi que de ses origines. Il représente la répartition fréquentielle de l'amplitude des mouvements. L'unité de l'axe des ordonnées n'a pas d'importance pour la compréhension du graphique.

Pour un accéléromètre fonctionnant selon le principe décrit dans cette sous-partie **V.1**, on suppose que $Q = 5$ et $\omega_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. À l'aide de ces valeurs et du document, indiquer si la condition évoquée en **Q25** est remplie pour cet accéléromètre.

Document 8 - Analyse spectrale du tremblement humain



Source : *Contribution à des architectures de stabilisation d'images basées sur la perception visuelle et la physiologie du tremblement humain*, Fabien Gavant (2012, Thèse de doctorat, Université de Grenoble)

Ex 6 : Supports : adhérence ou pas ?

Le sujet s'intéresse à différents cas de frottements secs qui induisent des types de mouvement relatif possible dans certaines conditions pour un couple solide1-solide2. Ces propriétés viennent du choix du support pour un mobile donné.

La **partie I** est une question de cours à propos des lois de Coulomb dont les réponses attendues permettront aux candidats de mieux exploiter les parties II, III et IV qui peuvent néanmoins être traitées de manière indépendante.

Les **parties II** et **III** présentent des exemples de mesures de coefficients de frottement solide.

La **partie IV** développe une modélisation simple du phénomène de « slip-stick ».

Partie I - Lois de Coulomb relatives au glissement

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction.

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\|\vec{T}\|$ est inférieure à la quantité $f_s \|\vec{N}\|$ dans laquelle $\|\vec{N}\|$ représente la norme de la composante normale $\vec{N}$ de la réaction : $\|\vec{T}\| \leq f_s \|\vec{N}\|$.
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\vec{T}\| = f_g \|\vec{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = 0$.

- Q1.** a) Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact.
b) Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?
- Q2.** Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.
- Q3.** Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

Partie II - Mesure du coefficient de frottement dynamique

On utilise le dispositif représenté sur la **figure 1**. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S'.

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t=0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t=0) = H_0$.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S, sachant que le solide 2 touche S'avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (**figure 1**), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

- Q4.** Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.
- Q5.** La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient N , T , F , g , α , M , l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1 et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.
- Q6.** Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\vec{T}$.
- Q7.** On s'intéresse à la première phase du mouvement.
- Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase.
 - Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α , f_g et g .
 - Quelle est la durée t_1 de cette première phase ?
 - Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?
- Q8.** On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
- Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t , t_1 , V_1 , X_0 , H_0 , g et f_g .
 - Exprimer f_g en fonction de α , H_0 et D .
- Q9.** Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.

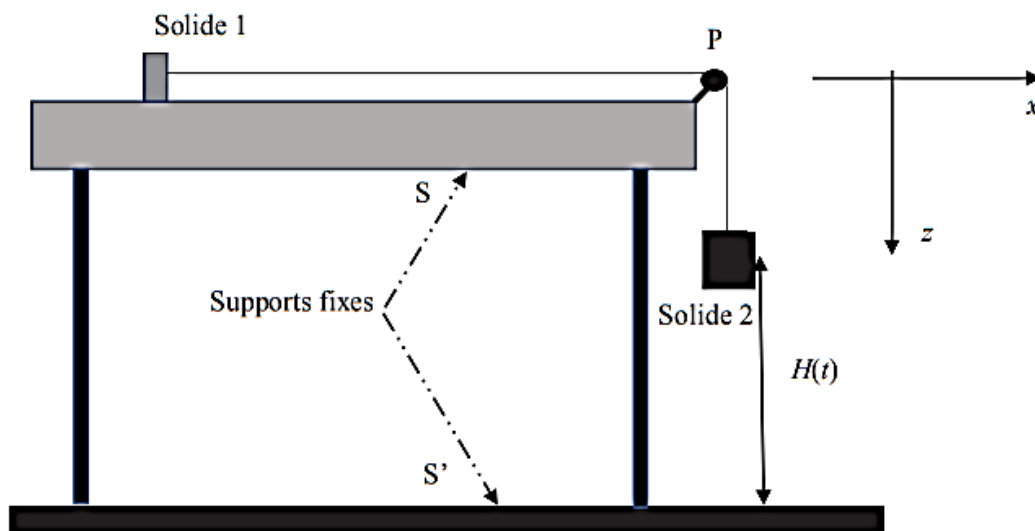


Figure 1 - Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

- Q10.** On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40,0$ cm. La masse du solide 1 vaut $M = 50$ g et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60$ g. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à $\langle D \rangle = 1,50$ m.

Partie III - Mesure du coefficient de frottement statique

- Q11.** On pose maintenant le solide 1 sur le support S qui fait un angle θ avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la **figure 2**. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle θ en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur $\theta = \theta_{lim}$ le solide 1 se met à glisser. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement f_s .

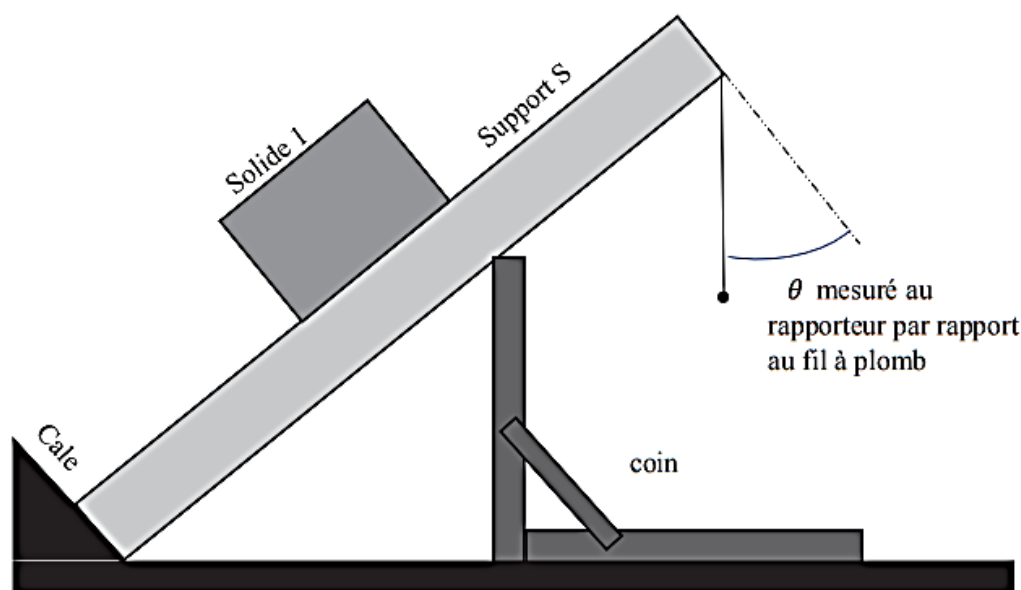


Figure 2 - Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

- Q12.** On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de θ_{lim} est de l'ordre de $29,5^\circ$. En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.

-- FIN DE L'ENONCE --