TDEM5 – Ondes EM dans une région vide de charge et de courant

0 Exercices classiques vus en cours :

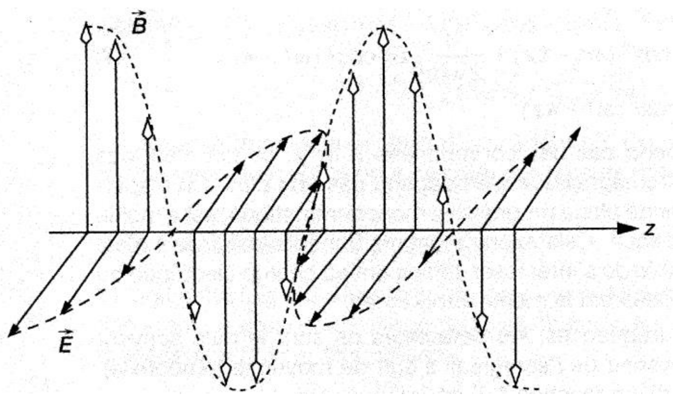
A.1 : Démonstration de l'équation de d'Alembert
B.1 : Vérification qu'une OPP est solution de l'équation de d'Alembert
D.1-2 : Démonstration de la relation de dispersion et de l'expression de la vitesse de phase
D.3 : Démonstration du caractère transverse et de la relation de structure des OPPM EM
E.1-2 : Démonstration de l'équipartition de l'énergie volumique électromagnétique et de l'expression du vecteur de Poynting pour une OPP
E.3 : Vérification de l'équation locale de Poynting et démonstration des valeurs moyennes de l'énergie volumique EM et du vecteur de Poynting pour des OPPM

Capacités exigibles	Ch EM5	Ex 1-2	Ex 3-5	Ex 6-7	Ex 8-9	Ex 10	Ex 11	Ex 12	TP
Equations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants. Etablir les équations de propagation à partir des équations de Maxwell.	●						●	●	
Onde plane dans l'espace vide de charge et de courant ; onde plane progressive et aspects énergétiques. Citer les solutions de l'équation de d'Alembert à une dimension. Décrire la structure d'une onde plane et d'une onde plane progressive dans l'espace vide de charge et de courant.	●	●	●		●	●		●	
Onde plane progressive monochromatique. Relation de dispersion. Expliquer le caractère idéal du modèle de l'onde plane monochromatique. Déterminer la relation de dispersion. Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications. Exprimer le vecteur de Poynting et l'énergie électromagnétique volumique associés à une onde plane progressive monochromatique. Effectuer une étude énergétique dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique.	●		●		●	●			
Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ou circulairement. Reconnaître une onde plane polarisée rectilignement ou circulairement. *Utiliser des polariseurs et étudier quantitativement la loi de Malus.*		●		●		●			11

<u>Données pour l'ensemble des exercices :</u>
◆ $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} et $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}

1 ✎ Caractéristiques d'une onde plane progressive

1) Sur la figure ci-contre est représentée, à un instant donné, l'allure du champ électromagnétique sur l'axe (Oz) d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide. Le champ électrique est contenu dans le plan horizontal et le champ magnétique dans le plan vertical.



Trouver la direction et le sens de propagation de cette onde.

2) Déterminer l'état de polarisation et la direction de propagation des ondes suivantes :

$$\overrightarrow{E_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2E_0\cos(\omega t - kx) \\ E_0\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0\cos(\omega t + kx) \\ E_0\sin(\omega t + kx) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{E_3} = \begin{pmatrix} 2E_0\cos(\omega t - kx + 2kz) \\ 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx + 2kz) \end{pmatrix}$$

3) On considère quatre champs électriques complexes :

$\underline{\overrightarrow{E_1}} = E_0 e^{i(ky+\omega t)} \overrightarrow{u_z}$ | $\underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} (\overrightarrow{u_x} + 2\overrightarrow{u_y})$ | $\underline{\overrightarrow{E_3}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} (\overrightarrow{u_x} + i\overrightarrow{u_y})$ | $\underline{\overrightarrow{E_4}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} (\overrightarrow{u_x} + 2i\overrightarrow{u_y})$

a) Pour chacun d'eux, préciser la direction de polarisation et la direction de propagation de l'onde associée.

b) En supposant que l'onde se propage dans le vide, donner le champ magnétique $\overrightarrow{B_2}$ correspondant au champ électrique $\overrightarrow{E_2}$.

Aide : dans chaque cas, donner l'expression réelle du champ électrique à partir de la notation complexe.

2 ✎ Expression d'une onde électromagnétique polarisée *(d'après oral CCINP)*

On considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale se propageant dans le vide dans la direction et le sens d'un axe z'z. Écrire l'expression du champ électromagnétique en notation complexe lorsqu'elle possède les polarisations suivantes.

1- La polarisation est rectiligne suivant la direction de l'axe x'x.

2- La polarisation est rectiligne suivant la direction de la bissectrice du plan xOy.

3- La polarisation est circulaire droite.

3 Etude d'une onde sphérique

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques

$$\vec{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\vec{e}_\theta \qquad \text{avec} \qquad k = \frac{\omega}{c}.$$

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1 - Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.

2 - On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3 - Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

4 - Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

4 ✎ Etude d'une OPPM

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est de la forme

$$\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y \qquad \text{avec} \qquad E_x = E_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{K}{3}(2x+2y-z) - \omega t\right)\right].$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

1 - Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.

2 - Exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.

3 - Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.

4 - À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.

5 - Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.

6 - Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.

7 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

5 Onde associée à un LASER

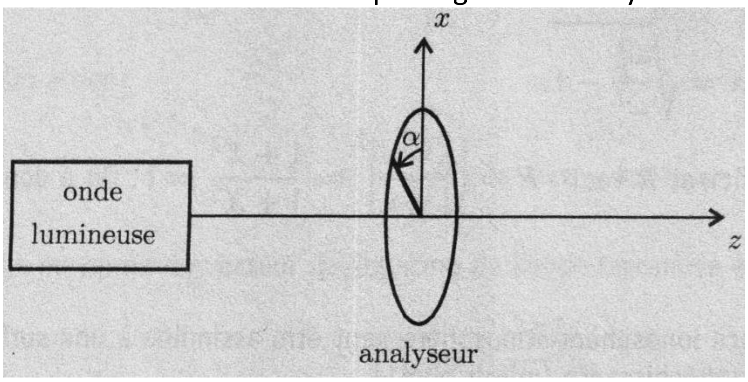
On considère un faisceau laser de puissance moyenne $\langle P \rangle = 1\,mW$ et de section $s = 4\,mm^2$ *(type de laser utilisé en TP)* modélisé par une onde électromagnétique monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 532\,nm$ se propageant dans le vide dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(k(z - ct) + \varphi_0)\overrightarrow{e_x}$$

1. Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur sens physique. Décrire l'état de polarisation. En écrivant la relation de dispersion, montrer que l'on peut écrire de façon équivalente $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_0)\overrightarrow{e_x}$. Exprimer la vitesse de phase de l'onde, commenter.
2. Préciser la couleur et la pulsation de l'onde lumineuse.
3. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ associé à cette onde.
4. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique E_0 en fonction de $\langle P \rangle$, s, de la célérité de la lumière dans le vide et de ε_0. Donner sa valeur numérique.

6 ✎ Polarisation

On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle $\vec{u}$ le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\overrightarrow{u_x}, \vec{u})$.



1) On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z)\overrightarrow{u_x}$$

Déterminer l'intensité lumineuse I de l'onde en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0 *: il s'agit de la loi de Malus.* Rappel : $I = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\|$.

2) On considère une onde polarisée circulairement dont le champ électrique se met sous la forme :

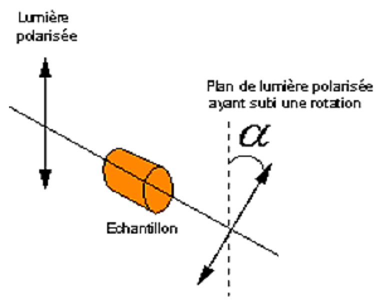
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'éclairement de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur. Commenter.

7 Polarimètre

Une espèce chimique X en solution est optiquement active (c'est le cas du sucre) si la solution est transparente à une onde électromagnétique plane progressive polarisée rectilignement, mais si sa traversée s'accompagne d'une rotation du plan de polarisation contenant $(\vec{E}, \vec{B})$ d'un angle α proportionnel à la concentration $[X]$ et à la longueur L de la solution traversée (loi de Biot).

➲ Proposer un dispositif permettant de mesurer α et donner l'intérêt expérimental de cette mesure.



8 ✎ Onde stationnaire solution de l'EDA

A. Caractère harmonique de la solution stationnaire de l'EDA

On cherche une solution stationnaire de l'équation de d'Alembert à une dimension sous la forme :

$$s(x,t) = F(t) \cdot K(x)$$

1) Montrer que l'EDA s'écrit sous la forme de l'égalité d'une fonction de x seul à une fonction de t seul (méthode de séparation des variables) et en déduire que ces deux quantités sont égales à une même constante.
2) En analysant l'équation portant sur $F(t)$, montrer que le signe de cette constante est fixé et qu'on peut mettre l'équation portant sur $K(x)$ sous la forme : $\frac{d^2K}{dx^2} + k^2K(x) = 0$
3) Finir la résolution et conclure.

B. Vecteur de Poynting pour une onde électromagnétique stationnaire harmonique

Une onde électromagnétique stationnaire dans le vide a pour champ électrique :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 cos(\omega t) sin(kz)\overrightarrow{u_y}$$

1) Déterminer le champ magnétique (champ magnétostatique nul).
2) En déduire le vecteur de Poynting. Calculer sa valeur moyenne et conclure.

9 Superposition d'ondes planes – Interférences *(d'après oral CCS)*

On étudie la structure de l'onde résultant de la superposition dans le vide de deux ondes électromagnétiques planes de même pulsation ω, de même amplitude E_m, polarisées rectilignement suivant Oy. Elles se propagent selon deux directions, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, contenues dans le plan Oxz et telles que $(\vec{u}_z, \vec{u}_1) = \theta$ et $(\vec{u}_z, \vec{u}_2) = -\theta$.

1- Établir l'expression du champ électrique résultant $\vec{E}$. Quelle est sa vitesse de phase v_φ ? L'onde est-elle plane ?

2- Déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}$.

3- Calculer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting et étudier l'éclairement d'une surface perpendiculaire à $\langle \vec{R} \rangle$.

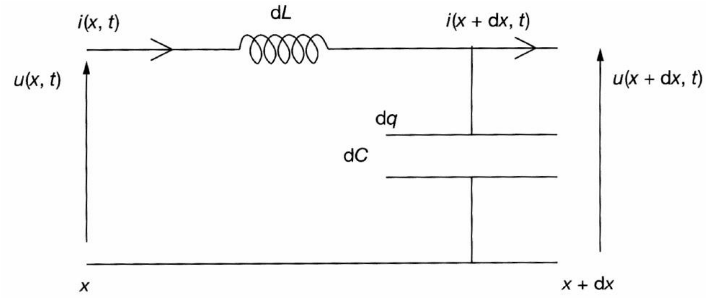
10 Impulsion du champ électromagnétique

On considère une onde plane, progressive, harmonique se propageant suivant (Oz), dont le champ électrique a la forme suivante : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}$

1. Quelle est la polarisation de cette onde ? Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ associé.
2. Retrouver la relation de dispersion. On prendra $k > 0$ pour la suite. Quel est alors le sens de propagation de l'onde ?
3. Calculer la valeur moyenne de la densité d'énergie électromagnétique véhiculée par l'onde.
4. La grandeur $\vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$ est appelée impulsion volumique du champ électromagnétique. Quelle est sa dimension ?
5. La modélisation quantique du champ électromagnétique fait appel à la notion de photon, particule élémentaire de masse nulle dont l'énergie et la quantité de mouvement sont directement reliées aux propriétés de l'onde qu'il compose : $E = \hbar\omega$ et $p = \frac{E}{c}$
   (a) Retrouver ces deux expressions à partir de la relation de De Broglie $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ et de l'expression relativiste de l'énergie $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.
   (b) Quelle densité particulaire n de photons peut être associée à cette onde ?
   (c) En déduire la valeur de l'impulsion volumique de l'onde, et comparer à $\vec{p}$. Commenter.

11 ✎ Câble coaxial sans perte *(EDA vérifiée par un signal électrique)*

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs métalliques de même axe : un cylindre plein, l'âme, et une tresse métallique coaxiale reliée à la masse, qui constitue un blindage protecteur contre les influences électromagnétiques extérieures. L'âme et la tresse sont séparées par un matériau diélectrique isolant. Le signal électrique (la tension) est appliqué entre les deux conducteurs à une extrémité du câble. Pour tenir compte des phénomènes de propagation dans un câble coaxial, on modélise une portion de câble de longueur élémentaire dx par le schéma ci-dessous, comportant une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$ et une capacité élémentaire $dC = \Gamma dx$:



On traite cette portion de câble de faible dimension dx dans l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

1) Rappeler en quoi consiste l'ARQS (cf 1^{e} année), à quoi doit-on comparer dx pour vérifier la validité de l'ARQS.
2) Etablir deux équations différentielles couplées reliant l'intensité $i(x,t)$ et la tension $u(x,t)$. En déduire que ces grandeurs sont solutions d'une équation de d'Alembert unidimensionnelle et exprimer la célérité c correspondante.

12 **Produire de la musique avec des fils d'araignée *(EDA pour une onde mécanique) (d'après CCMP 2022)***

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée *Nephila pilipes*, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien sûr inférieure à sa tension de rupture T_r, mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ de masse linéique μ, autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note $z(x,t)$ le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre $z = 0$. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée : $\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\widehat{e}_x + T_z(x,t)\widehat{e}_z$.

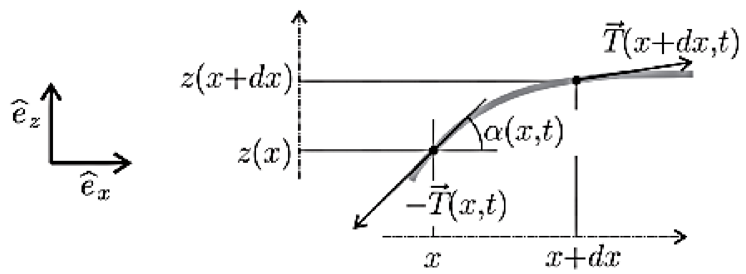


FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

- La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle $\alpha(x,t)$ que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\frac{\partial z}{\partial x}| \ll 1$;
- On néglige les effets de la pesanteur.

❑ – **15.** On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. Exprimer la longueur de portion de fil ds, $\cos[\alpha(x,t)]$ et $\sin[\alpha(x,t)]$ en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.
En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x.
Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

❑ – **16**. Montrer que le déplacement du fil $z(x,t)$ vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,. \qquad (1)$$

On exprimera c en fonction de T et μ. Que représente cette grandeur physique ?

❑ – **17**. Montrer que des fonctions de la forme $z(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g.

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoidal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des amplitudes complexes.

❑ – **18**. Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x,t)$.
En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises.
Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

❑ – **19**. Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est $\mu = 0{,}5\,\mathrm{mg \cdot m^{-1}}$, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?
Sachant que la tension T_c au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 newtons, que pouvez vous conclure ?

13 Enregistrement de signaux associés à une onde sonore

Une onde sonore sinusoïdale est émise par un haut-parleur.
On utilise un oscilloscope et on observe, sur les voies 1 et 2, les tensions délivrées par deux microphones, l'un fixé en O et l'autre que l'on peut déplacer, on note x l'abscisse du point M où se trouve le 2e micro. Lorsque les 2 microphones sont placés en O, on observe à l'oscilloscope la figure 2.

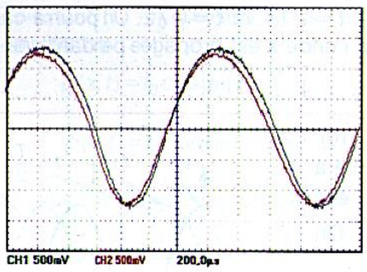


Figure 2.

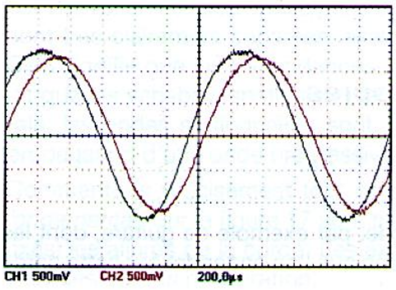


Figure 3.

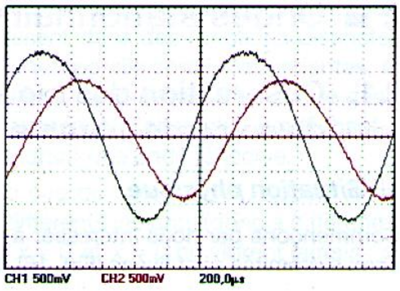


Figure 4.

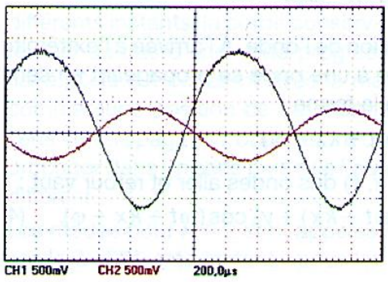


Figure 5.

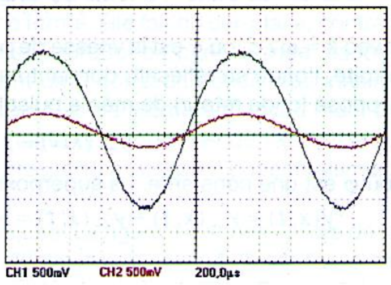


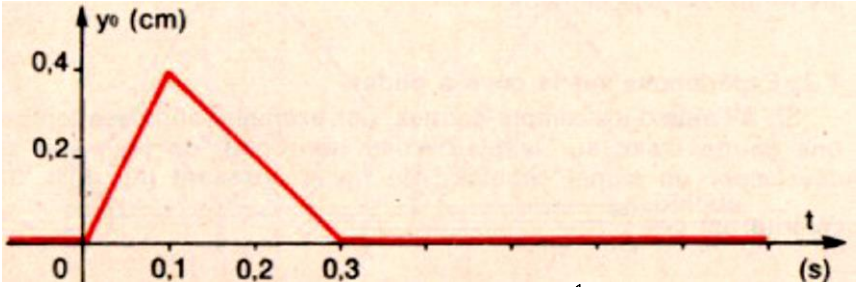
Figure 6.

Les graphes des figures 3, 4, 5 et 6 représentent les tensions délivrées par le microphone en O (voie 1) et le 2e microphone (voie 2) situé respectivement en 4 points d'abscisses x_3 ; x_4 ; x_5 = 21 cm et x_6.

➲ En émettant une hypothèse sur le déplacement du 2e micro, déterminer la vitesse de propagation c de l'onde sonore.

14 Onde progressive quelconque – Déformation d'une corde

Soit O, l'extrémité d'une corde souple au repos. A l'instant t = 0, ce point amorce un mouvement dont l'élongation y_0 est représentée en fonction du temps par la figure ci-dessous.



1. La célérité d'un signal le long de cette corde étant de c = 10 m.s^{-1}, quelle est la longueur d de la déformation qui se propage le long de cette corde ?
2. Représenter l'allure de la corde en fonction de x à l'instant t = 0 ; t = 0,1 s ; t = 0,3 s et t = 0,5 s.

15 Détermination de la tension d'une corde

La célérité de propagation d'un mouvement vibratoire le long d'une corde (de masse linéique µ) tendue par la tension T est $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. On fait vibrer une corde fixée à ses deux extrémités à la fréquence f = 100 Hz. Pour une certaine tension T de la corde, on observe des fuseaux nets. La distance entre deux nœuds consécutifs est d = 20 cm.

➲ Calculer la tension T sachant que µ = 2,0 g.m^{-1}.