

Chapitre 04. Interférences à N ondes - Réseaux

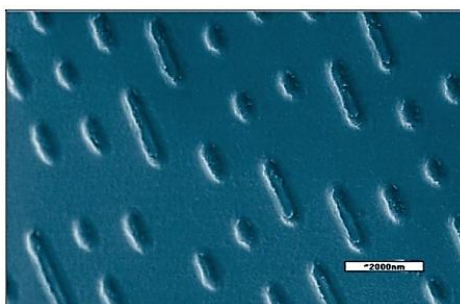


Photo de la surface d'un CD composée de lands (zone plate) et de pits (creux)

On remarque que la surface d'un CD ou d'un DVD décompose la lumière blanche et qu'elle apparaît colorée différemment selon l'orientation du disque.

La surface d'un tel disque est formée de petits motifs répétés, on peut ainsi l'assimiler à un réseau par réflexion et expliquer son aptitude à décomposer la lumière blanche par le phénomène d'interférences à N ondes.

INTRO :

Dans les chapitres précédents, on a étudié la superposition de deux ondes lumineuses. On s'intéresse ici à la **superposition de N ondes lumineuses** monochromatiques et cohérentes entre elles.

On considère un dispositif à division du front d'onde qui donne N sources secondaires : le **réseau**.

On identifie les caractéristiques de la figure d'interférences obtenue avec un réseau en la comparant à celle obtenue avec des trous / fentes d'Young vus au ChO2.

Le réseau est un des éléments constitutifs des spectroscopes : on s'intéressera à la détermination de la longueur d'onde d'une raie lumineuse avec un montage comprenant un réseau, un goniomètre et ses instruments, cf TP10F.

Buts de ce chapitre : établir la relation fondamentale des réseaux et étudier l'influence du nombre de motifs éclairés sur la figure d'interférences.

Prérequis :

MPSI : Optique géométrique ; Propagation d'un signal - Interférences.

MP : O1 Optique ondulatoire – Superposition d'ondes lumineuses ; O2/O3 Interférences par division du front d'onde / d'amplitude

Plan du chapitre :

A) Principe – Réseau optique	2
1) Observations.....	2
2) Définition et caractéristiques d'un réseau optique	2
3) Cadre de l'étude (conditions d'éclairage et d'observation)	3
B) Interférences à N ondes par un réseau en transmission	3
1) Différence de marche entre deux motifs consécutifs	3
2) Direction des franges brillantes – Relation fondamentale des réseaux	3
3) Vibration lumineuse complexe résultante	4
4) Eclairement résultant – Influence du nombre N de motifs éclairés	5
C) Application en spectroscopie	6
1) Principe – Réseau éclairé par une lumière polychromatique	6
2) Montage expérimental	6
Annexe : Exploitation de la représentation de Fresnel	7

A) Principe – Réseau optique

1) Observations

Les trous ou fentes d'Young étudiés au ChO2 n'impliquent que deux chemins optiques différents pour aller du point source au point d'observation, ceux passant par les deux fentes ou trous d'Young.

On éclaire maintenant à un **dispositif à N fentes permettant à N rayons lumineux d'interférer**.

Chaque **fente diffracte la lumière** et les rayons issus des différentes fentes interfèrent entre eux, cf Fig. 1.

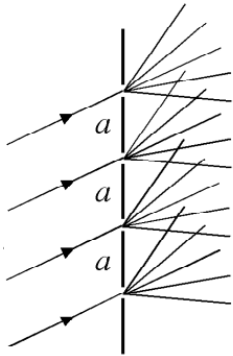


Fig. 1



Fig. 2 : Figures obtenues par passage d'un laser au travers de 1 à 6 fentes.
Plus le nombre de fentes éclairées est élevé, plus les taches brillantes sont lumineuses.

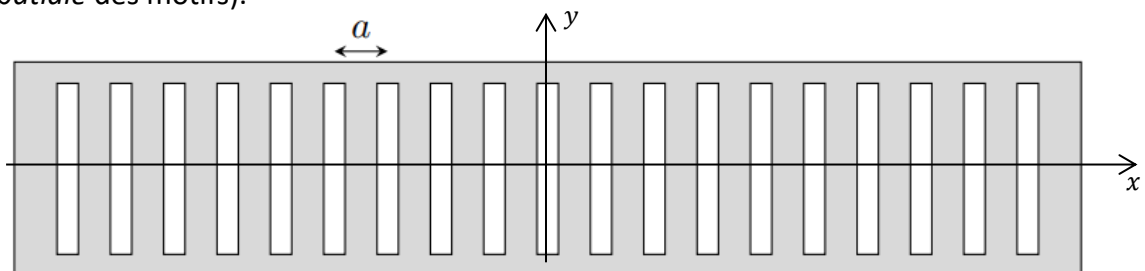
Plus il y a de fentes au travers desquelles la lumière peut passer, plus celle-ci se retrouve concentrée. Ces points d'intensité maximale coïncident avec la position des franges brillantes lors du passage de la lumière au travers de deux fentes.

2) Définition et caractéristiques d'un réseau optique

Un **RESEAU OPTIQUE** est un dispositif constitué d'une série de **motifs identiques, équidistants**, séparés par une distance a , permettant la réflexion ou la transmission d'ondes lumineuses.

La **distance a entre deux motifs consécutifs** est le **pas du réseau** (il s'agit de la *période spatiale* du réseau).

Les constructeurs de réseaux donnent n le **nombre de motifs par unité de longueur** : $n = \frac{1}{a}$ (il s'agit de la *fréquence spatiale* des motifs).



Un **réseau par transmission** est constitué d'un ensemble de **fentes allongées, très fines, identiques, parallèles et équidistantes**, séparées par un intervalle opaque. Ces fentes sont nommées **traits du réseau**.

ODG :

Qualité	n (m^{-1})	n (Lines Per Inch)	a (μm)	Largeur	N
moyenne		10^3	30	2 cm	~ 2000
Classique	$\sim 4 \cdot 10^5$	10^4	~ 3	3 cm	$\sim 10\,000$
Excellente	$\sim 4 \cdot 10^6$	10^5	$\sim 0,3$	4 cm	$\sim 40\,000$

En TP, vous utiliserez un réseau en transmission à 15 000 LPI (lines per inch) ≈ 600 traits/mm.

NB : La longueur des fentes étant très grande par rapport à leur largeur, il y a invariance par translation selon (Oy). Dans la suite, on se placera dans le plan $y = 0$.

3) Cadre de l'étude (conditions d'éclairage et d'observation)

Dans la suite, on étudie les interférences à N ondes dans les conditions suivantes :

① Le **réseau est éclairé par un faisceau de rayons parallèles**.

② On s'intéresse aux **interférences à l'infini**.

③ Les interférences sont générées par un réseau par **transmission** (on verra en TD un réseau par réflexion).

En pratique, ① et ② sont vérifiées en utilisant un collimateur et une lunette de visée à l'infini, cf § C.2.

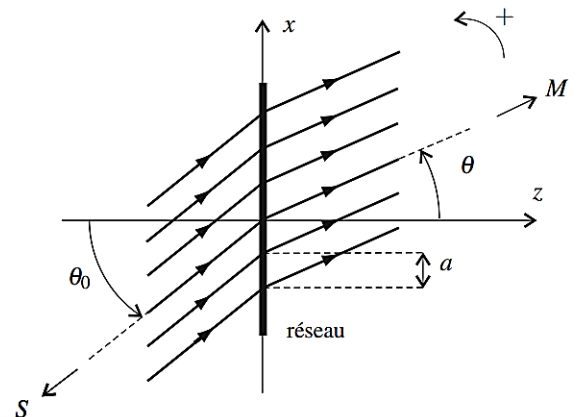
B) Interférences à N ondes par un réseau en transmission

1) Différence de marche entre deux motifs consécutifs

On éclaire le réseau par un faisceau de rayons parallèles d'angle d'incidence θ_0 issu d'une source ponctuelle S **monochromatique de longueur d'onde λ_0** .

Au niveau des fentes, il y a diffraction. Les sources secondaires sont notées S_j avec $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et on étudie les interférences à l'infini en M . Les rayons qui interfèrent en M sont parallèles entre eux et forment un **angle d'émergence θ** avec la normale au réseau.

Les angles d'incidence et d'émergence sont orientés. Sur la figure ci-contre, ils sont positifs.



On considère deux sources secondaires consécutives : S_j et S_{j+1} . On introduit la **différence de marche** :

$$\delta_{j+1/j}(M) = (SM)_{j+1} - (SM)_j = [(SS_{j+1}) + (S_{j+1}M)] - [(SS_j) + (S_jM)]$$

➤ **Démonstration à connaître** : Montrer que $\delta_{j+1/j}(M) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$.

Démarche analogue à celle du § A.3 du ChO2 (trous d'Young avec observation dans le PFI d'une lentille).

On note que la différence de marche associée aux sources secondaires S_j et S_{j+1} ne dépend pas de j .

Cela est dû au fait que les fentes sont réparties périodiquement. Ainsi,

$$\forall j, (SM)_{j+1} - (SM)_j = \delta(M) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

2) Direction des franges brillantes – Relation fondamentale des réseaux

On cherche à déterminer les directions repérées par les angles θ_m où on obtient des **franges brillantes** i.e. des maxima d'intensité. Il s'agit des directions où les **interférences à N ondes sont constructives**.

On introduit $\Delta\varphi(M)$ le déphasage en M entre les ondes issues des sources secondaires consécutives S_j et S_{j+1} . On a $\Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$, or $\delta(M)$ ne dépend pas de j donc **$\Delta\varphi(M)$ est aussi indépendant de j** .

On considère une direction telle que les ondes issues des sources secondaires consécutives S_j et S_{j+1} sont en phase ($\Delta\varphi(M) = 0[2\pi]$). Les ondes issues de S_{j+1} et S_{j+2} sont donc aussi en phase. Par conséquent, les ondes issues de S_{j+2} et S_j sont également en phase, etc.

Si les ondes issues de deux motifs consécutifs du réseau sont en phase au point M d'observation, alors toutes les ondes issues de tous les motifs sont en phase en ce point M .

Pour déterminer la direction des maxima d'intensité en sortie du réseau, il suffit d'établir la condition d'interférences constructives entre deux motifs consécutifs.

RELATION FONDAMENTALE DES RESEAUX :

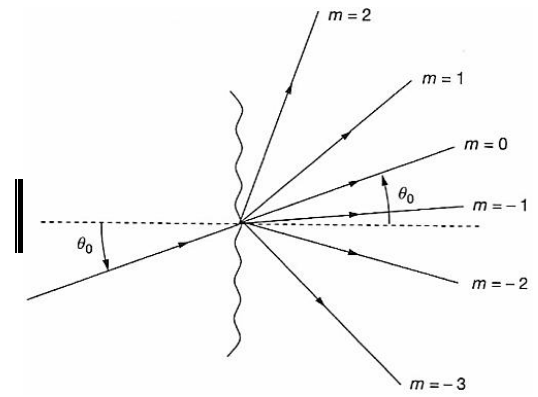
On éclaire un réseau en transmission par un faisceau de rayons parallèles d'angle d'incidence θ_0 issu d'une source ponctuelle S **monochromatique** de longueur d'onde λ_0 .

Les angles θ_m correspondant aux maxima de lumière vérifient :

$$\sin\theta_m - \sin\theta_0 = m \frac{\lambda_0}{a}$$

Avec $m \in \mathbb{Z}$ appelé **l'ordre de la raie**

NB : La direction de la **raie d'ordre 0** correspond à la **direction des rayons dans le cadre de l'optique géométrique** (absence de diffraction).



➔ **Démonstration à connaître** : Démontrer la formule des réseaux.

Démarche : Utiliser la condition d'interférence constructive entre les rayons issus de 2 sources secondaires consécutives.

Cf animation : <https://physique-chimie.ac-normandie.fr/spip.php?article199>

Rq : $|\sin\theta_m| \leq 1$ ainsi le nombre d'ordres visibles est limité.

3) Vibration lumineuse complexe résultante

On éclaire N fentes d'un réseau en transmission.

On note $\underline{s}_j(M, t)$ la notation complexe de la vibration lumineuse à t au point quelconque M d'observation issue de la source secondaire S_j pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$\underline{s}_j(M, t) = s_0 \cdot e^{i(\omega t - \varphi_j(M))}$$

Rq : Comme pour les trous d'Young, on mène le calcul sans tenir compte de la variation de l'amplitude en fonction de la direction d'émergence due à la diffraction.

On a obtenu le déphasage en M entre les ondes issues des sources secondaires consécutives S_j et S_{j+1} :

$$\forall j, \Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = 2\pi \frac{a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))}{\lambda_0}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \underline{s}_2(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) \cdot e^{-i\Delta\varphi(M)} \\ \underline{s}_3(M, t) &= \underline{s}_2(M, t) \cdot e^{-i\Delta\varphi(M)} = \underline{s}_1(M, t) \cdot e^{-i2\Delta\varphi(M)} \\ &\dots \end{aligned}$$

On généralise :

$$\forall j, \underline{s}_j(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \cdot e^{-i(j-1)\Delta\varphi(M)}$$

NB : On parle de *phases en progression arithmétique* : $\forall j, \varphi_j(M) = \varphi_1(M) - \Delta\varphi(M) + j\Delta\varphi(M)$

En un point d'observation à l'infini M quelconque, la **vibration lumineuse complexe résultante** s'écrit :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) \cdot \exp\left(-i \frac{(N-1)\Delta\varphi(M)}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{N \cdot \Delta\varphi(M)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right)}$$

➔ **Démonstration à connaître** : Démontrer l'expression de la vibration lumineuse complexe résultante.

Démarche : La vibration résultante s'écrit : $\underline{s}(M, t) = \sum_{j=1}^N \underline{s}_j(M, t)$; on utilise l'expression de $\underline{s}_j(M, t)$; on reconnaît la somme des N 1^{ers} termes d'une **suite géométrique** ; on factorise pour faire apparaître le rapport de \sin .

4) Éclairement résultant – Influence du nombre N de motifs éclairés

En un point d'observation à l'infini M quelconque, l'éclairement résultant s'écrit :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N \cdot \Delta\varphi(M)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right)}$$

avec $\mathcal{E}_0 = K \cdot s_0^2$ où $K = \text{cste}$

L'éclairement au niveau d'une frange brillante (maximum principal d'éclairement) vérifie :

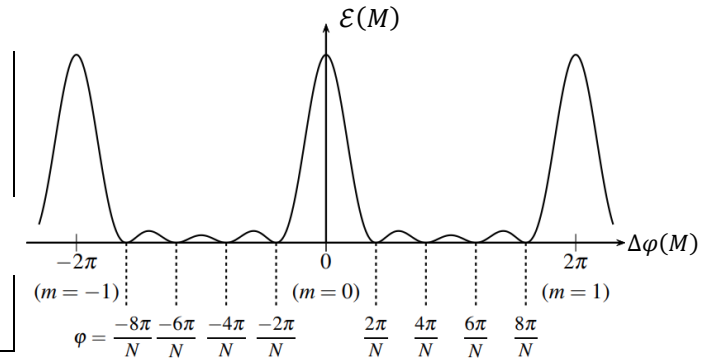
$$\mathcal{E}_{\max} = N^2 \mathcal{E}_0$$

On a donc

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_{\max} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N \cdot \Delta\varphi(M)}{2}\right)}{N^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi(M)}{2}\right)}$$

La demi-largeur des maxima d'éclairement de la courbe d'éclairement en fonction du déphasage vérifie :

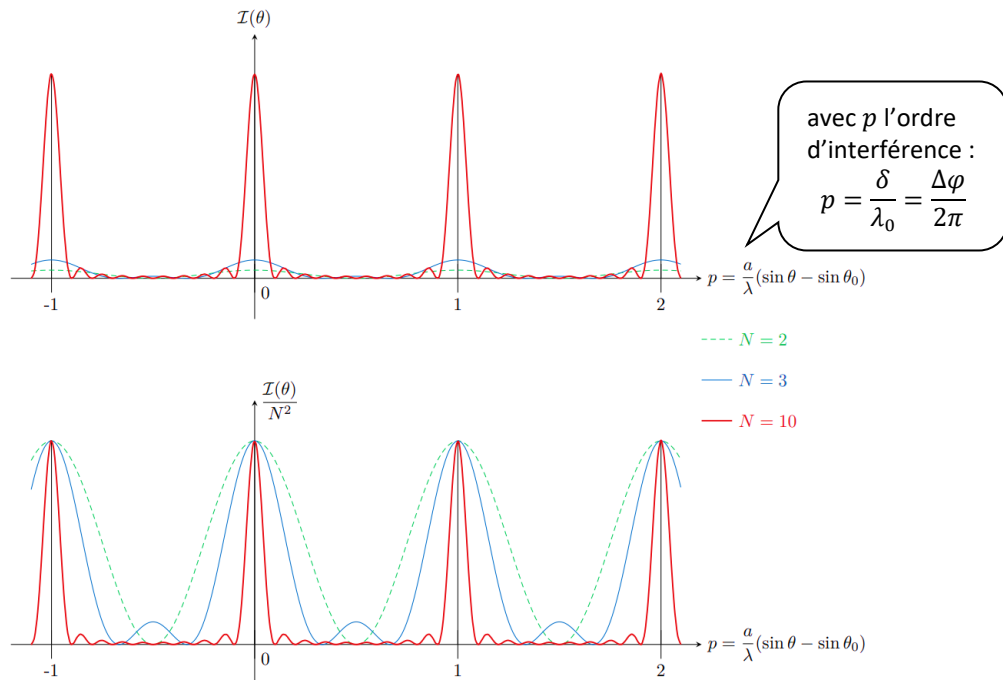
$$\delta\varphi_{1/2} = \frac{2\pi}{N}$$



➔ Démonstrations à connaître : Démontrer les résultats ci-dessus.

Démarche : En fonction de la vibration scalaire complexe, l'éclairement s'écrit (cf ChO1) : $\mathcal{E}(M) = K \cdot |\underline{s}(M, t)|^2$ et on l'étudie pour $\Delta\varphi(M) \in [0, 2\pi[$ étant donné la périodicité de la fonction $\mathcal{E}(\Delta\varphi(M))$. On exprime \mathcal{E}_{\max} en étudiant la frange brillante d'ordre 0 ; on cherche le plus petit déphasage $\delta\varphi_{1/2}$ pour lequel l'éclairement s'annule autour de la frange brillante d'ordre 0.

Analyse du résultat :



Bilan : Les raies brillantes (ordre d'interférences entier) sont d'autant plus lumineuses et d'autant plus étroites que le nombre N de motifs éclairés est élevé.

Cf animation : <https://physique-chimie.ac-normandie.fr/spip.php?article199>

Rq : Ces deux observations sont cohérentes avec la conservation de l'énergie : la « quantité de lumière » totale sur l'écran ne dépend pas du nombre de traits éclairés du réseau. Si les franges brillantes sont plus étroites, il est logique qu'elles soient aussi plus lumineuses.

C) Application en spectroscopie

1) Principe – Réseau éclairé par une lumière polychromatique

D'après la relation fondamentale des réseaux :

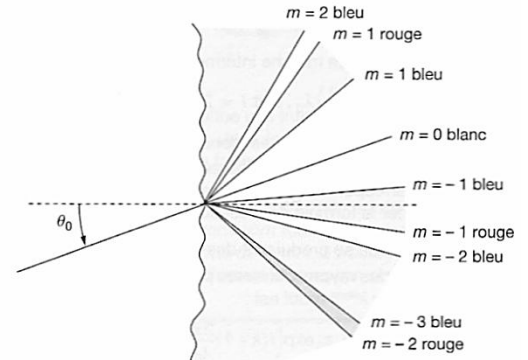
$$\sin\theta_m - \sin\theta_0 = m \frac{\lambda_0}{a}$$

les **directions des raies brillantes repérées par les angles θ_m dépendent de la longueur d'onde** : un réseau peut donc être utilisé pour **séparer spatialement** les différentes composantes spectrales d'une lumière incidente (pouvoir dispersif du réseau).

Pour chaque ordre $m \neq 0^*$, on obtient le **spectre de la lumière incidente**.

*Seul l'ordre $m = 0$ est non dispersif : $\forall \lambda_0, \theta_{m=0} = \theta_0$.

Cf animation : <https://physique-chimie.ac-normandie.fr/spip.php?article199>



2) Montage expérimental

On réalise un spectroscope (étude des spectres de sources lumineuses polychromatiques) à l'aide d'un réseau et d'un **goniomètre**, cf TP.

Revenons sur les conditions d'éclairage et d'observation :

- ① Le **réseau est éclairé par un faisceau de rayons parallèles** : on utilise une fente-source, parallèle aux fentes du réseau, située dans le plan focal objet d'une lentille. En TP, on utilisera un **collimateur**.
- ② On s'intéresse aux **interférences à l'infini** : on observe les interférences dans le plan focal image d'une lentille. En TP, on utilisera une **lunette de visée à l'infini**.



➡ **A savoir refaire** : Sur un schéma (vue de dessus), représenter les principaux éléments constitutifs d'un goniomètre ainsi que le réseau, la source de lumière et l'œil de l'observateur. On représentera la marche de 2 rayons lumineux issus de la source, traversant le dispositif {goniomètre + réseau} et atteignant l'œil.

En déplaçant la lunette de visée autour du goniomètre, on observe :

- Dans la direction de la lumière incidente : l'image géométrique de la fente source qui est blanche (ordre $m = 0$) ;
- De part et d'autre en s'éloignant du centre, des spectres correspondant aux ordres $\pm 1, \pm 2 \dots$ dans lesquels le violet est le plus proche du centre et le rouge le plus éloigné du centre.

Pour un ordre donné, **plus la longueur d'onde est grande, plus elle apparaît déviée par le réseau**.
Les **longueurs d'onde sont d'autant plus séparées que l'ordre est élevé**.

Comme pour un prisme, la longueur d'onde d'une raie d'ordre m se détermine à partir de la **dévi**ation $D_m = \theta_m - \theta_0$. Le vernier du goniomètre permet de mesurer précisément les déviations des différentes raies. Une méthode efficace est celle du **minimum de déviation**, cf TD et TP.

NB : Pour le **prisme**, la déviation se calcule dans le cadre de **l'optique géométrique** (réfraction avec l'indice du prisme (milieu dispersif) qui dépend de la longueur d'onde, cf TDO1) alors que pour le **réseau**, la déviation est liée aux phénomènes de **diffraction** et **d'interférences**.

Rq : Dans certains cas, on rencontre du **recouvrement d'ordres** : les raies les plus déviées de l'ordre m sont davantage déviées que les raies les moins déviées de l'ordre $m + 1$, cf ordres -2 et -3 de la figure p.6.
 Si le nombre N de traits éclairés n'est pas assez grand, les raies peuvent ne pas être assez fines pour être séparées dans les premiers ordres : on dit alors qu'elles ne sont **pas résolues** par le réseau.
 L'analyse spectrale de la lumière sera convenable si le réseau sépare correctement la lumière dans un ordre donné et si deux ordres différents ne se recouvrent pas.

Annexe : Exploitation de la représentation de Fresnel

On peut trouver les résultats du § B par un raisonnement géométrique utilisant la construction de Fresnel.

Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe : considérons une vibration lumineuse de la forme $\underline{s} = s_0 \exp(-i\theta)$, que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\underline{s} = s_0 \cos \theta - i s_0 \sin \theta .$$

On choisit de représenter cette grandeur complexe par un vecteur \vec{s} dans le plan (Oxy) défini par :

$$\vec{s} = \text{Re}(\underline{s}) \vec{u}_x + \text{Im}(\underline{s}) \vec{u}_y = s_0 \cos \theta \vec{u}_x - s_0 \sin \theta \vec{u}_y .$$

Ce vecteur est appelé **vecteur de Fresnel**. Comme le montre la figure 10.5, ce vecteur fait un angle $-\theta = \arg(\underline{s})$ avec le vecteur \vec{u}_x .

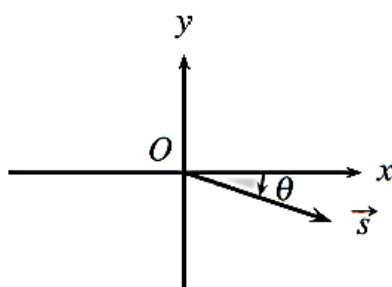


Figure 10.5 – Représentation de Fresnel d'une grandeur complexe.

Représentation de la vibration lumineuse résultante : pour représenter la vibration lumineuse résultante $\underline{s}(M)$, nous représentons chacune des vibrations lumineuses $\underline{s}_m(M)$ par un vecteur de Fresnel. En faisant l'addition vectorielle de ces N vecteurs, on obtient le vecteur de Fresnel associé à la vibration lumineuse résultante $\underline{s}(M, t)$.

Au § B.1, on a obtenu la différence de marche en M entre les ondes issues des sources secondaires consécutives S_m et S_{m+1} :

$$\forall m, (SM)_{m+1} - (SM)_m = \delta(M) = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0))$$

On a alors le déphasage en M entre ces ondes :

$$\forall m, \Delta\varphi(M) = 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$$

Par la suite, pour alléger les notations, on notera ce déphasage φ .

$$\Rightarrow \underline{s}_{m+1}(M, t) = \underline{s}_m(M, t) \cdot e^{-i\varphi}$$

Autrement dit, le vecteur \vec{s}_{m+1} forme un angle $-\varphi$ avec le vecteur \vec{s}_m .

On représente les N vecteurs bout à bout en faisant une rotation de $-\varphi$ en passant d'un vecteur au suivant. On obtient la construction représentée sur la figure ci-dessous.

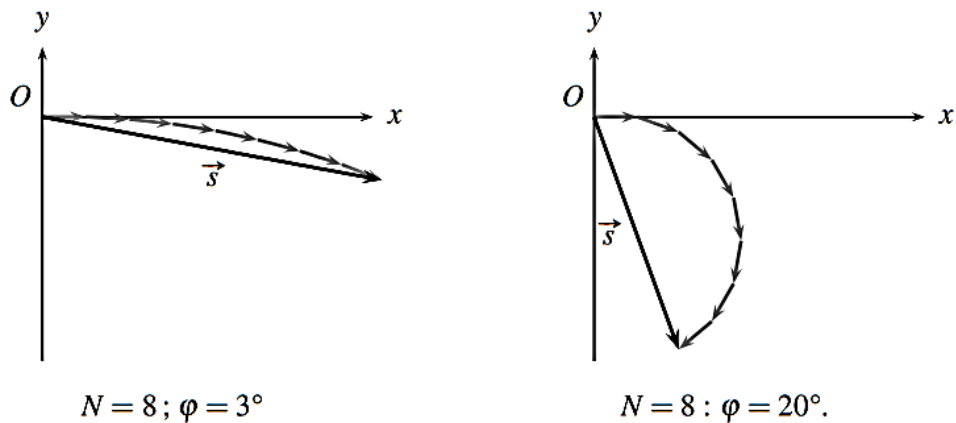


Figure 10.6 – Construction de Fresnel de la vibration lumineuse résultante pour $N = 8$.

Interférences totalement constructives : on obtient des interférences totalement constructives lorsque le vecteur \vec{s} a une norme maximale : cela correspond à la situation où $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Tous les vecteurs de Fresnel \vec{s}_m sont alors colinéaires et alignés selon l'axe (Ox) . Dans ce cas, l'intensité vibratoire $I(M)$ est maximale.

Interférences totalement destructives : on obtient des interférences totalement destructives lorsque le vecteur \vec{s} a une norme nulle : cela correspond à la situation où, en plaçant les vecteurs \vec{s}_m bout à bout, on effectue un nombre entier de tours comme le montre la figure 10.7.

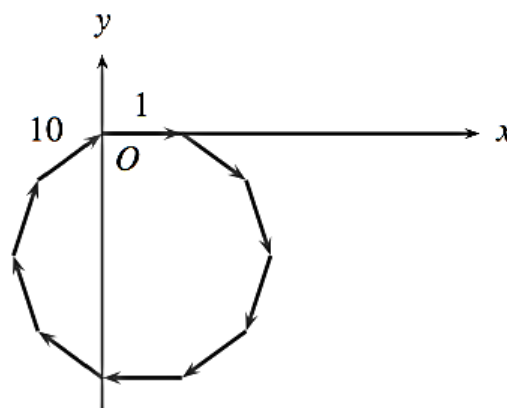


Figure 10.7 – Construction de Fresnel correspondant à l'annulation de la vibration lumineuse résultante pour $N = 10$.

Dans cette situation, $N\varphi = 2q\pi$ où $q \in \mathbb{Z}$ avec q différent de zéro et de tout multiple de N , pour éviter de retomber sur la condition d'interférences totalement constructives où φ est un multiple de 2π .