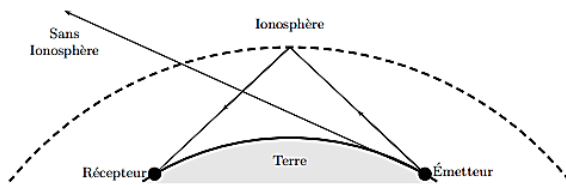


Chapitre EM6. Ondes électromagnétiques dans un plasma – Dispersion



En 1901, l'Italien G. Marconi réalisa la 1^{ère} transmission transatlantique d'un message par ondes radios de fréquence $f \approx 300$ kHz. Il reçut le prix Nobel en 1909. Cette prouesse est liée au fait que dans un milieu homogène, les ondes électromagnétiques se propagent en ligne droite. Or, sur les 6 000 km de traversée de l'océan, la courbure de la surface terrestre est telle que l'onde ne devrait jamais parvenir au récepteur. L'enregistrement du signal impose donc que l'onde se soit réfléchi. C'est sur la couche de l'atmosphère nommée « ionosphère » que la réflexion a lieu. Située entre 80 et 800 km d'altitude, l'ionosphère est constituée de gaz fortement ionisés à très faible pression entre 1 et 10^{-6} Pa, on parle de **plasma dilué**.

INTRO :

Dans ce chapitre, on discute la **possibilité de propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué**.

Un plasma est un gaz ionisé : il est constitué de cations et d'électrons et il est globalement neutre.

On considérera qu'il est aussi **localement neutre** i.e. que $\rho(\mathbf{M}, t) = 0$.

Par une étude mécanique en RSF des particules chargées constitutives du plasma, on montrera que :

$$\underline{j}(\mathbf{M}, t) = \underline{\gamma} \cdot \underline{E}(\mathbf{M}, t)$$

avec $\underline{\gamma}$ la conductivité électrique complexe du plasma.

On établira les différences avec la propagation dans le vide : **pulsation de coupure** reliée aux ondes évanescentes ; phénomène de **dispersion** et les conséquences sur la propagation d'un signal réel : **paquet d'ondes**, en introduisant la **vitesse de groupe**.

Buts de ce chapitre : Dans un plasma, établir la relation de dispersion $k(\omega)$, déterminer la vitesse de phase et de groupe d'une OPPM et définir le phénomène de dispersion, décrire la propagation d'un paquet d'ondes.

Prérequis :

1^{ère} année : Propagation de la lumière ; Régime Sinusoïdal Forcé ; Mécanique du point.

2^{ème} année : EM4 Electromagnétisme en régime variable ; EM5 Ondes EM dans le vide ; E1 Signaux périodiques : spectre.

Plan du chapitre :

A) Propagation d'une OPPM transverse dans un plasma dilué	2
1) Interaction onde EM-plasma – Vecteur densité de courant	2
2) Equation de propagation.....	3
3) Relation de dispersion – Pulsation plasma.....	4
4) Vitesse de phase – Phénomène de dispersion	6
B) Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif	7
1) Paquet d'ondes	7
2) Exemple de la somme de 2 OPPM de pulsations proches : doublet spectral	8
3) Généralisation – Vitesse de groupe.....	9
4) Propagation du paquet d'ondes dans un plasma dilué	10
Annexe n°1 : OPPM électromagnétique dans le plasma pour $\omega > \omega_p$ – Structure et énergie.....	11
Annexe n°2 : Paquet d'ondes quelconque se propageant selon $+uz$	12
Annexe n°3 : Paquet d'ondes Gaussien se propageant selon $+uz$	13

A) Propagation d'une OPPM transverse dans un plasma dilué

1) Interaction onde EM-plasma – Vecteur densité de courant

a) Modélisation du plasma

On considère un **plasma constitué d'ions positifs**, de charge $+e$ et de masse m_i , et **d'électrons**, de charge $-e$ et de masse m_e . Le plasma comporte autant d'ions que d'électrons, il est **globalement neutre** et on considère qu'il est aussi **localement neutre** ainsi les **densités volumiques** d'ions et d'électrons sont égales et uniformes, notées n^* (USI : m^{-3}).

On suppose n^* **suffisamment faible** : on parle de **plasma dilué / peu dense**. Ainsi, les interactions entre particules chargées du plasma sont négligées : mouvement des porteurs de charges sans frottement.

b) Expression du champ électromagnétique

On s'intéresse à la propagation selon \vec{u}_x dans le plasma d'une **pseudo^(*)-onde PPM électromagnétique transverse**.

Son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(x, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot x)}$$

Avec :

ω la pulsation de l'émetteur de l'onde ;

$\underline{\vec{k}} = \underline{k} \vec{u}_x$ le vecteur d'onde avec \underline{k} le nombre d'onde angulaire qui, dans le plasma, peut être complexe^(*) : $\underline{k} = \underline{k}' - i\underline{k}''$ qu'on cherche à déterminer au § A.3 ;

$\underline{\vec{E}}_0 \perp \underline{\vec{k}}$ puisque l'onde est transverse.

De même, on écrit :

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot x)}$$

Rappel ChEM5 : Avec cette représentation complexe, le vecteur symbolique nabla s'écrit : $\vec{\nabla} = -i\underline{k} \vec{u}_x$.

Rq : En notation complexe, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $-i\underline{k} \vec{u}_x \cdot \underline{\vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

L'onde étant transverse, $\underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$ ainsi on vérifie que le plasma est localement neutre : $\underline{\rho} = 0$ et que la densité volumique des électrons est égale à celle des ions.

c) Mouvement des particules chargées constitutives du plasma

Sous l'action du champ électromagnétique, les particules chargées du plasma vont se mettre en mouvement. Cependant, puisque $m_i \gg m_e$, la vitesse des ions est négligeable par rapport à celle des électrons et on s'intéresse seulement au mouvement des électrons.

Par ailleurs, les **électrons** sont supposés être **non relativistes** i.e. que leur vitesse est très inférieure à c , célérité de la lumière dans le vide.

☞ Exercice classique : Par une étude mécanique d'un électron, établir l'équation du mouvement.

i) Approximations à justifier : le poids, les forces de frottements et la composante magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant la composante électrique de la force de Lorentz.

ii) Montrer que le vecteur vitesse \vec{v} d'un électron situé en M vérifie l'équation : $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \cdot \vec{E}(M, t)$.

⇒ Le champ électrique varie sinusoidalement en fonction du temps à la pulsation ω . D'après l'équation ci-dessus, l'électron a un mouvement d'oscillation de même pulsation ω que le champ.

Pour un électron non relativiste, $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \cdot \vec{E}(M, t)}$

d) Vecteur densité de courant – Conductivité électrique complexe du plasma

Dans le plasma où se propage une **pseudo-onde PPM électromagnétique**, la représentation complexe du **vecteur densité de courant** s'écrit :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}}$$

Avec $\underline{\gamma} = -i \frac{n^* e^2}{m_e \omega}$ la **conductivité électrique complexe du plasma**.

☞ **Exercice classique** : Etablir cette relation.

i) Exprimer le vecteur densité de courant \vec{j} dû au mouvement des électrons en fonction de e , \vec{v} et n^* .

ii) En RSF, on introduit $\underline{\vec{j}}(x, t) = \underline{\vec{j}}_0 e^{i(\omega t - \underline{k} \cdot \underline{x})}$. Exprimer $\underline{\vec{v}}(x, t)$ avec l'équation du mouvement établie au § c transposée en notations complexes puis conclure sur $\underline{\vec{j}}(x, t)$.

Rq : Si on avait tenu compte du mouvement des ions, on aurait :

$$\underline{\gamma} = -i \frac{n^* e^2}{\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right)$$

Avec $m_i \geq m_{\text{nucléon}} \approx 2000 \cdot m_e$, on a effectivement : $\underline{\gamma} \approx -i \frac{n^* e^2}{m_e \omega}$.

Conséquences :

La conductivité électrique complexe est un imaginaire pur de partie imaginaire négative : $\underline{\gamma} = -i \frac{n^* e^2}{m_e \omega}$.

→ Le déphasage de \vec{j} par rapport à \vec{E} vaut $-\frac{\pi}{2} \text{ rad}$: \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase.

→ La puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges est nulle. Le **plasma est un milieu non absorbant**. En effet :

$$\begin{aligned} P_V &= \vec{j} \cdot \vec{E} \\ \Rightarrow \langle P_V \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*) = \frac{1}{2} |\underline{\vec{E}}|^2 \text{Re}(\underline{\gamma}) = 0 \end{aligned}$$

Ceci est cohérent avec l'hypothèse d'absence de frottements dans un plasma dilué.

2) Equation de propagation

Equations de Maxwell en **régime variable** dans un **plasma dilué et localement neutre** ($\rho = 0$ et $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\vec{E}}$):

Maxwell-Gauss	$\text{div } \underline{\vec{E}}(M, t) =$
Maxwell-flux ou -Thomson	$\text{div } \underline{\vec{B}}(M, t) =$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}}(M, t) =$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{B}}(M, t) =$

Dans un plasma dilué et localement neutre, le champ $\underline{\vec{E}}$ vérifie l'équation **linéaire** aux dérivées partielles :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

☞ **Exercice classique** : Compléter les équations de Maxwell ci-dessus et établir l'équation de propagation en utilisant la méthode décrite au ChEM5 p.2.

3) Relation de dispersion – Pulsation plasma

a) Démonstration

Dans le plasma, \underline{k} vérifie la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$$

Avec ω_p la **PULSATION PLASMA** : $\omega_p = \sqrt{\frac{n^* e^2}{m_e \epsilon_0}}$

⇒ Démonstration à connaître : établir cette relation en utilisant la méthode A décrite au ChEM5 p.8.

Rq : Une relation de dispersion de la forme : $\underline{k}^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2)$ est appelée relation de Klein-Gordon.

b) Interprétation – Pulsation de coupure

La pulsation plasma joue un rôle déterminant pour la propagation :

- Si $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2 < 0$ donc \underline{k} est un imaginaire pur : $\underline{k} = -ik''$ avec $k'' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\delta}$

Pour une onde polarisée rectilignement selon \vec{u}_y , on a :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{i\omega t} e^{-x/\delta} \cdot \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_y$$

Si $\omega < \omega_p$, on a une **décroissance exponentielle de l'amplitude selon la direction de propagation de l'onde**. L'onde est **stationnaire et spatialement amortie** : on parle d'**ONDE EVANESCENTE**.

⇒ Si $\omega < \omega_p$, l'onde ne peut pas se propager dans le plasma : **domaine réactif du plasma**.

- Si $\omega > \omega_p$, $\underline{k}^2 > 0$ donc \underline{k} est réel : $\underline{k} = k'$

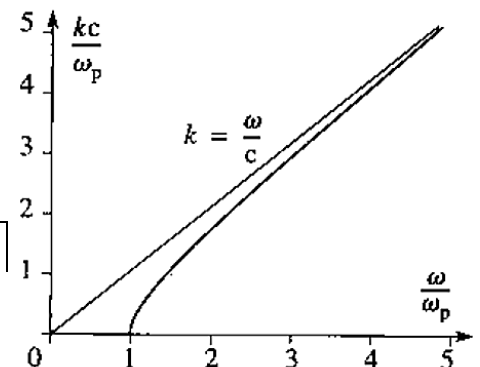
$$k' = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \stackrel{\text{def}}{=} k$$

Pour une onde polarisée rectilignement selon \vec{u}_y , on a :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \vec{u}_y$$

⇒ Si $\omega > \omega_p$, on obtient une « vraie » onde progressive : **domaine de transparence du plasma**.



Bilan : Vis-à-vis des ondes électromagnétiques, le plasma agit comme un **filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p** .

Aspect énergétique :

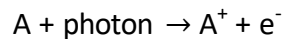
Grâce à l'équation de Maxwell-Faraday, on peut déterminer le champ \vec{B} à partir du champ \vec{E} .

- Pour l'onde évanescente, on a \vec{B} et \vec{E} en quadrature de phase.
- Pour l'onde progressive, on a \vec{B} et \vec{E} en phase.

Ainsi, $\langle \vec{I} \rangle = \vec{0}$ pour une onde évanescente et $\langle \vec{I} \rangle \neq \vec{0}$ pour une onde progressive. Ainsi, **contrairement à une onde progressive, une onde évanescente ne transporte aucune énergie dans le plasma**.

c) Cas de l'ionosphère – ODG de ω_p

L'ionosphère est la partie de la haute atmosphère (80 à 800 km d'altitude en plusieurs couches) où les gaz sont ionisés par le rayonnement UV et X provenant du Soleil. On peut représenter le phénomène d'ionisation par la réaction d'équation :



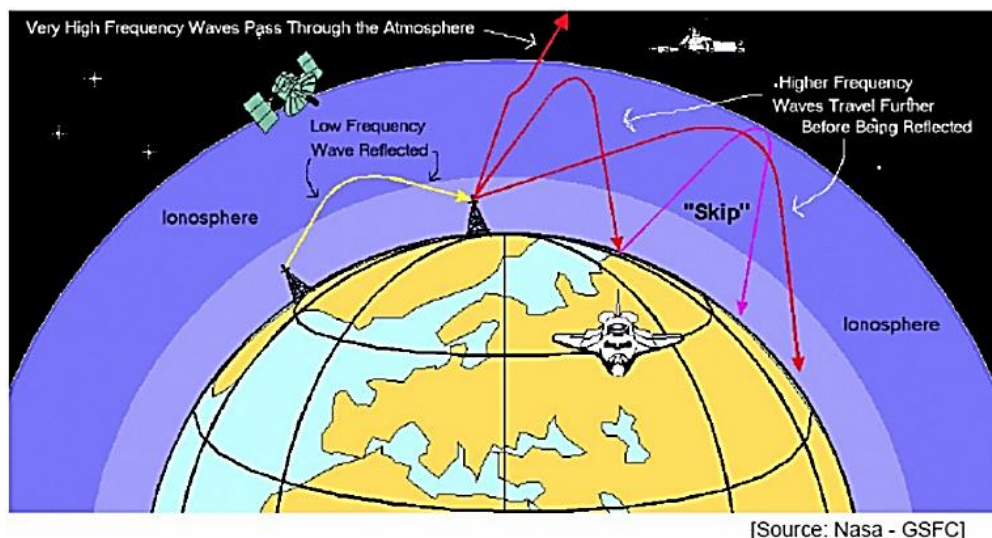
Avec A une molécule ou un atome

La densité volumique d'électrons n^* au sein de l'ionosphère dépend fortement du flux solaire. Au maximum, on a $n^* = 10^6 \text{ cm}^{-3}$.

➡ Exercice classique :

- En utilisant la valeur maximale de la densité volumique d'électrons n^* dans l'ionosphère, déterminer la valeur de la fréquence plasma de l'ionosphère.
- Vérifier la cohérence de cette valeur avec :
 - l'expérience de G. Marconi, cf p.1 ;
 - les valeurs de fréquence des communications entre un satellite et le sol : $\sim 100 \text{ MHz}$; de la télévision par satellite et du système GPS : $\sim 10 \text{ GHz}$.

ODG à retenir : Pour l'ionosphère, $f_p \approx 10 \text{ MHz}$.



4) Vitesse de phase – Phénomène de dispersion

♦ Pour une pseudo-OPPM, $\underline{k} = k' - ik''$ et on introduit la **VITESSE DE PHASE** v_φ :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$$

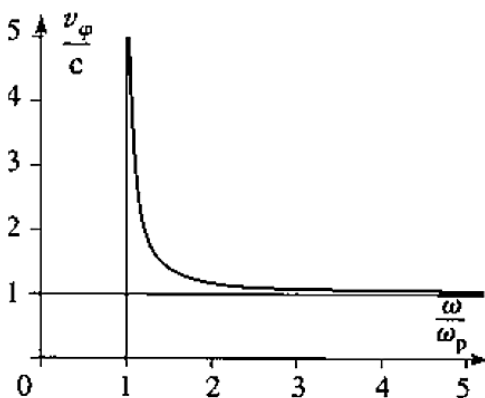
Elle correspond à la **vitesse de propagation (de la phase) de la pseudo-OPPM**.

Pour une OPPM de pulsation $\omega > \omega_p$ se propageant dans un plasma, on a :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

☞ Exercice classique : Etablir ce résultat en exploitant la relation de dispersion.

Allure de la courbe et commentaires :



- Pour $\omega \gg \omega_p$, $v_\varphi \approx c$: les variations du champ EM sont très rapides, les électrons du plasma ne peuvent donc pas les suivre. Les interactions onde-plasma sont négligeables et on retrouve les propriétés de propagation dans le vide, d'où $v_\varphi \approx c$.

- On a $v_\varphi \geq c$.

Rappel ChEM5 : Une OPPM est un modèle idéalisé qui n'existe pas dans la réalité, une onde réelle est une superposition d'OPPM.

La vitesse de phase n'a donc aucune réalité physique i.e. qu'elle ne correspond pas à la vitesse de propagation de l'énergie, cf § B.3 et annexe 1. L'inégalité $v_\varphi \geq c$ n'est donc pas incohérente !

♦ Un milieu tel que v_φ **dépend de la pulsation ω** de l'OPPM considérée est un milieu **DISPERSIF**.

Dans un milieu dispersif, une **onde physique réelle**, somme d'OPPM, **va se déformer au cours de sa propagation** : on parle de **phénomène de DISPERSION**, cf détails au § B.3.

Le **vide** est un **milieu non dispersif** ($\forall \omega, v_\varphi = c$, cf ChEM5).

Le **plasma** est un **milieu dispersif**.

Rq :

- Pour un milieu transparent, on peut introduire $n = \frac{c}{v_\varphi}$ l'indice du milieu. Dans le plasma, pour $\omega > \omega_p$, $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < 1$. Pour un milieu dispersif, n dépend de la pulsation ω de l'OPPM considérée → Analogie avec les milieux optiques dispersifs tels que n dépend de la longueur d'onde dans le vide λ_0 de la radiation considérée.
- Le caractère dispersif du plasma est relié à la non linéarité de la relation de dispersion.

B) Propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif

On va étudier l'influence du phénomène de dispersion sur la propagation des **ondes réelles qui sont des superpositions d'ondes monochromatiques**. Le milieu dispersif (par exemple un plasma dans son domaine de transparence $\rightarrow \underline{k} = k' \stackrel{\text{def}}{=} k$) est caractérisé par la relation de dispersion $k(\omega)$, supposée connue.

On note $s(x, t)$ une composante quelconque du champ \vec{E} de l'onde étudiée se propageant selon $+\vec{u}_x$.

1) Paquet d'ondes

DEFINITION :

On appelle **PAQUET D'ONDES** la **superposition d'un nombre fini ou infini d'OPPM** de pulsations proches d'une **pulsation moyenne ω_0** : les OPPM sommées ont des pulsations :

$$\omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$$

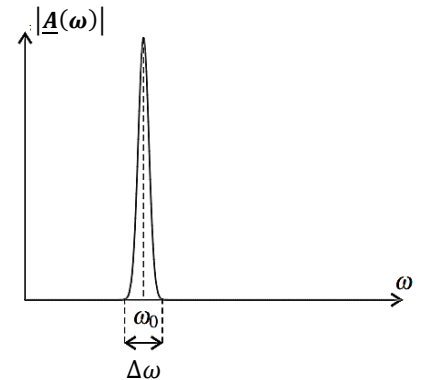
avec $\Delta\omega$ la **largeur spectrale** de l'onde telle que $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Le signal correspondant à un paquet d'ondes se propageant selon $+\vec{u}_x$ s'écrit :

$$s(x, t) = \text{Re} \left(\int_{\omega=0}^{\infty} \underline{A}(\omega) \cdot e^{i(\omega \cdot t - k(\omega) \cdot x)} \cdot d\omega \right)$$

Où la fonction d'amplitude $\underline{A}(\omega) \approx 0$

pour $\omega < \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et pour $\omega > \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$.



Le paquet d'ondes est un **signal à durée limitée** dans le temps, durée Δt d'autant plus élevée que la largeur spectrale $\Delta\omega$ est faible. On admet que :

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 2\pi$$

Rq : Cette relation est cohérente avec le cas limite d'une onde monochromatique : on a $\Delta t \rightarrow \infty$ puisque $\Delta\omega = 0$.

NB : Notion de paquet d'ondes semblable à la notion de train d'ondes en optique.

2) Exemple de la somme de 2 OPPM de pulsations proches : doublet spectral

On considère d'abord le cas simple d'un paquet d'ondes contenant deux OPPM de même amplitude s_0 et de pulsations $\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Le signal correspondant s'écrit :

$$s(x, t) = s_0 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t - k(\omega_1) \cdot x) + s_0 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t - k(\omega_2) \cdot x + \varphi)$$

➡ Exercice classique :

i) Représenter le spectre de cette onde en repérant ω_0 et $\Delta\omega$.

ii) On rappelle la relation de trigonométrie à connaître : $\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

On pose $k_0 = k(\omega_0)$ et $\Delta k = \Delta\omega \cdot \frac{dk}{d\omega}(\omega_0)$, à l'aide de DL₁ en $\Delta\omega$, montrer que :

$$s(x, t) = 2s_0 \left[\cos\left(\omega_0 \cdot t - k_0 \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t - \frac{\Delta k}{2} \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Variation rapide $\omega_0 \gg \Delta\omega$
→ « porteuse »

Variation lente
→ « enveloppe »

On peut réécrire $s(x, t)$ sous la forme :

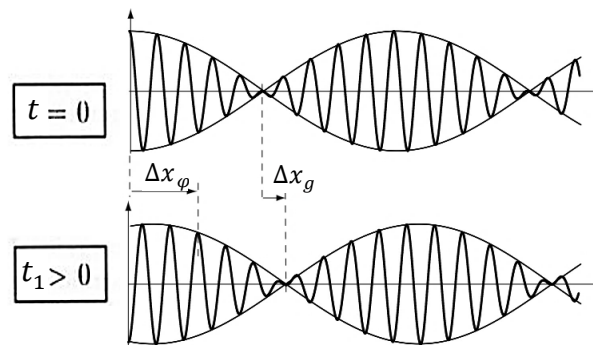
$$s(x, t) = 2s_0 \left[\cos\left(\omega_0 \cdot \left(t - \frac{k_0}{\omega_0} \cdot x\right) + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot \left(t - \frac{dk}{d\omega}(\omega_0) \cdot x\right) + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

$$\Leftrightarrow s(x, t) = 2s_0 \left[\cos\left(\omega_0 \cdot \left(t - \frac{x}{v_\varphi(\omega_0)}\right) + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot \left(t - \frac{x}{v_g(\omega_0)}\right) + \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

Avec $v_\varphi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k_0}$ la **vitesse de phase** d'une onde monochromatique de pulsation ω_0 ;

$v_g(\omega_0) = \frac{d\omega}{dk}(\omega_0) = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}(\omega_0)}$ la **vitesse de groupe** : elle correspond à la **vitesse de propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes**.

Représentation graphique de $s(x, t)$ en fonction de x à deux instants $t = 0$ et $t_1 > 0$:



$$v_\varphi = \frac{\Delta x_\varphi}{t_1}$$

et $v_g = \frac{\Delta x_g}{t_1}$

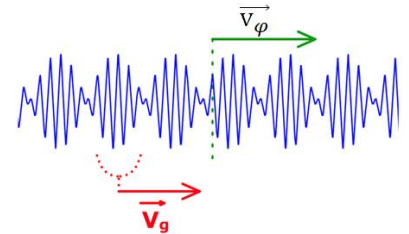
3) Généralisation – Vitesse de groupe

On admet que les résultats obtenus pour la somme de 2 OPPM se généralisent à un paquet d'ondes quelconque, cf annexes 2 et 3.

♦ On définit la **VITESSE DE GROUPE** :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}}$$

♦ Un paquet d'ondes se met sous la forme d'une **onde moyenne** (la **porteuse**) de pulsation ω_0 se propageant à la **vitesse de phase** $v_\varphi(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$ dont l'amplitude est modulée par une **enveloppe** se propageant à la **vitesse de groupe** $v_g(\omega_0) = \frac{d\omega}{dk}(\omega_0)$.



NB :

- Pour une pseudo-OPPM avec $\underline{k} = k' - ik''$, on a $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ et $v_g = \frac{d\omega}{dk'}$.
- La **vitesse de groupe** s'identifie généralement à la **vitesse de propagation de l'énergie / de l'information**, cf annexe 1 pour le plasma. Le principe de relativité d'Einstein impose que la vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide : $v_g < c$.

Les vitesses de phase et de groupe sont a priori différentes et le **paquet d'ondes se propage en se déformant**. En effet, chacune des composantes monochromatiques du groupe « chemine » avec sa propre vitesse.

Dans un milieu dispersif, on observe l'**étalement du paquet d'ondes** : l'enveloppe s'élargit et son amplitude diminue, cf figure ci-dessous.

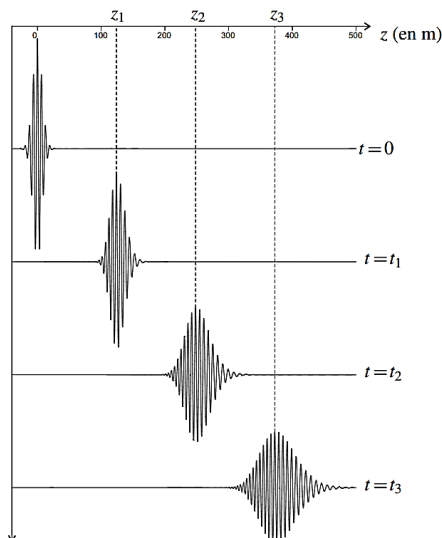


Figure 19.8 – Propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu dispersif.

Figure 19.8 : Détails sur le paquet d'ondes gaussien, cf annexe 3

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

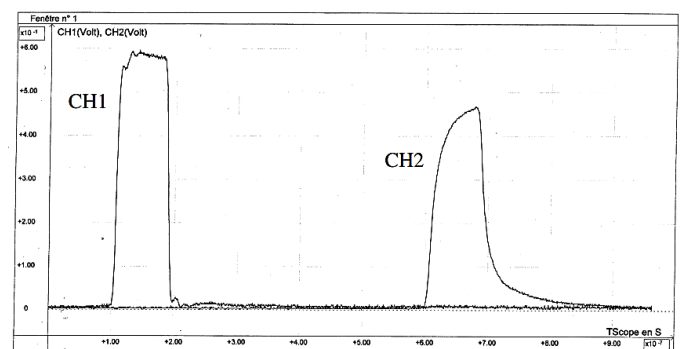


Figure 19.9 – Propagation d'une impulsion dans un câble de transmission.

Figure 19.9 : À l'entrée d'un câble coaxial, on envoie un signal pulse rectangulaire. Le signal est observé à la sortie du câble de longueur 100 m. On visualise à l'oscilloscope le signal d'entrée (voie CH1) et le signal de sortie (voie CH2) (axe des abscisses en 10^{-7} s).

➔ Analyse graphique : Commenter les signaux CH1/2 et déterminer la vitesse de groupe du signal.

4) Propagation du paquet d'ondes dans un plasma dilué

On rappelle la relation de dispersion vérifiée dans un plasma pour $\omega > \omega_p$:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

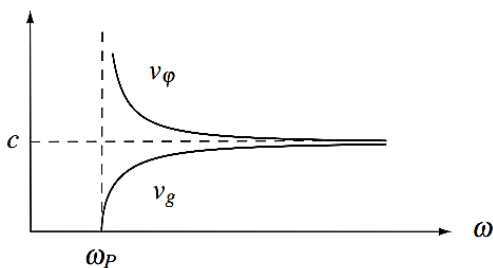
➡ Exercice classique : On considère un paquet d'ondes de pulsation moyenne ω_0 et de largeur spectrale $\Delta\omega \ll \omega_0$ qui se propage dans un plasma.

i) Déterminer l'expression de la vitesse de groupe $v_g(\omega_0)$.

ii) Vérifier que $v_g < c$.

iii) Montrer que $v_g \cdot v_\phi = c^2$. Retrouver cette relation en différenciant la relation de dispersion écrite sous la forme $k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$. → *Ce calcul est le moyen le plus efficace pour arriver à l'expression de la vitesse de groupe.*

Allure des courbes et commentaires :



- Dans un plasma, on a donc $v_g \leq c \leq v_\phi$: l'enveloppe se propage moins vite qu'une unique OPPM.

- Dans un plasma, on a v_g qui dépend de ω : $v_g(\omega)$ croissante.

- Pour $\omega \gg \omega_p$, $v_g \approx c \approx v_\phi$: des pulsations très élevées correspondent à des variations du champ EM très rapides que les électrons du plasma ne peuvent pas suivre.

On peut alors négliger les interactions onde-plasma et on retrouve les propriétés de propagation dans le vide :

Pour $\omega \gg \omega_p$, **le plasma est non dispersif** ($v_\phi \approx c$) **et le signal se propage à** $v_g \approx c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ **sans déformation.**

Rq : La relation $v_g \cdot v_\phi = c^2$ est vérifiée pour toute relation de dispersion de type Klein-Gordon.

Annexe n°1 : OPPM électromagnétique dans le plasma pour $\omega > \omega_p$ – Structure et énergie

L'équation de Maxwell-Faraday donne : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{v_\phi} \vec{u} \wedge \vec{E}$. avec \vec{u} vecteur unitaire qui donne la direction et le sens de propagation.

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\vec{E} = \frac{c^2 \omega}{\omega_p^2 - \omega^2} \vec{k} \wedge \vec{B} = -\frac{\omega}{k^2} \vec{k} \wedge \vec{B} = v_\phi \vec{B} \wedge \vec{u}.$$

En prenant la partie réelle, k étant réel, on trouve les mêmes relations entre les champs réels.

$$\vec{B} = \frac{1}{v_\phi} \vec{u} \wedge \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{E} = v_\phi \vec{B} \wedge \vec{u}. \quad (19.5)$$

Ces relations expriment la structure de l'OPPM électromagnétique dans le plasma. Elles sont analogues aux relations de structure pour l'OPP dans le vide, c étant remplacée par la vitesse de phase dans le plasma. Cependant, alors que les relations de structure sont valables pour toutes les OPP dans le vide, elles sont valables **uniquement pour les OPPM** dans le plasma.

En notation complexe, on a :

$$\langle \underline{a} \cdot \underline{b} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{a} \cdot \underline{b}^*)$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Pi} \rangle &= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}\left(\vec{E} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}^*\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \text{Re}\left(\left(\vec{E} \cdot \vec{E}^*\right) \vec{k} - \underbrace{\left(\vec{k} \cdot \vec{E}\right) \vec{E}^*}_{=0}\right) = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |\vec{E}|^2 \vec{k}. \end{aligned}$$

La densité volumique d'énergie du champ électromagnétique est, en valeur moyenne :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \text{Re}\left(\epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^*\right) = \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{k^2}{4\mu_0 \omega^2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right).$$

La densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons est : $\langle u_c \rangle = n^* \left\langle \frac{1}{2} m_e v^2 \right\rangle$.

Or $\vec{v} = i \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}$. On en déduit :

$$\langle u_c \rangle = \frac{n^* e^2}{4m_e \omega^2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

L'énergie volumique moyenne totale est donc :

$$\langle u \rangle = \langle u_{em} \rangle + \langle u_c \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 \left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2,$$

en utilisant la relation de dispersion. Par analogie avec ce que nous avons vu au chapitre précédent, on définit la vitesse de propagation de l'énergie \vec{v}_e par

$$\vec{v}_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 \omega} \vec{k} = \frac{c^2}{\omega} \vec{k}.$$

Il s'agit de la vitesse de groupe, cf § B.3.

Dans un plasma, la vitesse de groupe correspond donc à la vitesse de propagation de l'énergie i.e. de l'information.

Annexe n°2 : Paquet d'ondes quelconque se propageant selon $+\vec{u}_z$

On considère un paquet d'ondes quelconque en notation complexe :

$$\underline{s}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i(\omega t - k(\omega)z) d\omega,$$

où l'on restreint le domaine d'intégration à l'intervalle sur lequel la fonction d'amplitude est non nulle. Cette expression peut également se mettre sous la forme :

$$\underline{s}(z, t) = \exp i(\omega_0 t - k_0 z) \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i((\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)z) d\omega,$$

où $k_0 = k(\omega_0)$. C'est le produit de l'onde moyenne $\exp i(\omega_0 t - k_0 z)$ par la fonction :

$$\mathcal{J}(z, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp i((\omega - \omega_0)t - (k(\omega) - k_0)z) d\omega.$$

La grandeur $\omega - \omega_0$ varie dans l'intervalle $\left[-\frac{\Delta\omega}{2}, \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$ donc les variations temporelles de $\mathcal{J}(z, t)$ sont lentes devant celles de l'onde moyenne. Ainsi $\mathcal{J}(z, t)$ « enveloppe » les oscillations de l'onde moyenne.

La pulsation ω restant proche de ω_0 , on peut effectuer un développement limité de $k(\omega)$ au voisinage de ω_0 , en se limitant, dans un premier temps, au premier ordre :

$$k(\omega) = k_0 + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}.$$

L'expression de $\mathcal{J}(z, t)$ devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(z, t) &= \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \underline{A}(\omega) \exp \left(i(\omega - \omega_0) \left(t - z \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right) \right) d\omega \\ &= \mathcal{J} \left(0, t - z \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right). \end{aligned}$$

L'enveloppe de l'onde $\mathcal{J}(z, t)$ se propage à la vitesse $v_g(\omega_0) = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}} = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$, qui

est la vitesse de groupe. À cet ordre d'approximation, la fonction $\mathcal{J}(z, t)$ se propage sans se déformer.

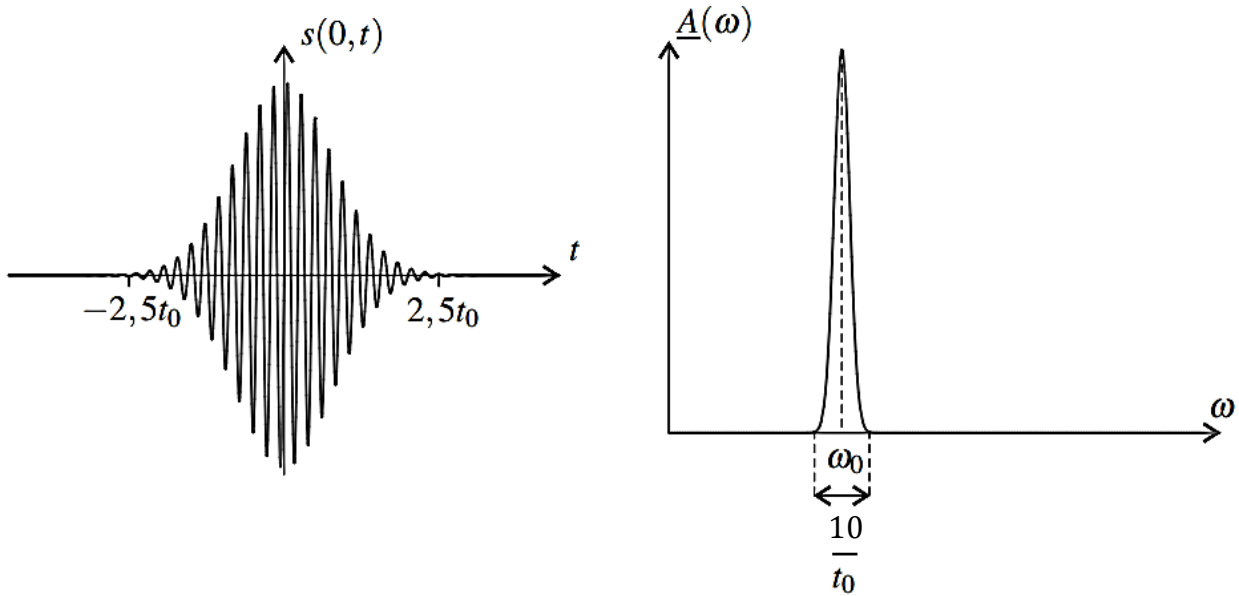
On appelle paquet d'ondes gaussien une onde telle que :

$$s(0,t) = s_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{t_0}\right)^2\right) \cos(\omega_0 t),$$

où ω_0 et τ sont des constantes telles que $\omega_0 t_0 \gg 1$. Ce signal ne prend de valeur appréciable que pour t compris entre $-2,5t_0$ et $2,5t_0$ (car $\exp(-2,5^2) \simeq 0,002$). On peut dire qu'il dure environ $\tau = 5t_0$.

Pour ce signal la fonction d'amplitude est : $\underline{A}(\omega) \simeq \frac{s_0 t_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{4}t_0^2(\omega - \omega_0)^2\right)$. Elle est quasiment nulle en dehors de l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{5}{t_0}, \omega_0 + \frac{5}{t_0}\right]$: il s'agit d'un paquet d'ondes de largeur $\Delta\omega = \frac{10}{t_0} \ll \omega_0$. On a : $\Delta\omega \times \tau = 50$.

Ce signal et son spectre sont représentés sur la figure 19.6 dans le cas où $\omega_0 t_0 = 10\pi$ (valeur pas trop grande pour que les oscillations du signal restent visibles).



La figure 19.8 montre la propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu de propagation ayant la relation de dispersion : $k(\omega) = \alpha\omega^2$ où α est une constante. Pour la figure on a pris : $\omega_0 = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $t_0 = 0,08 \text{ s}$ et $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ USI}$. Les instants successifs sont : $t_1 = 1 \text{ s}$, $t_2 = 2 \text{ s}$ et $t_3 = 3 \text{ s}$.

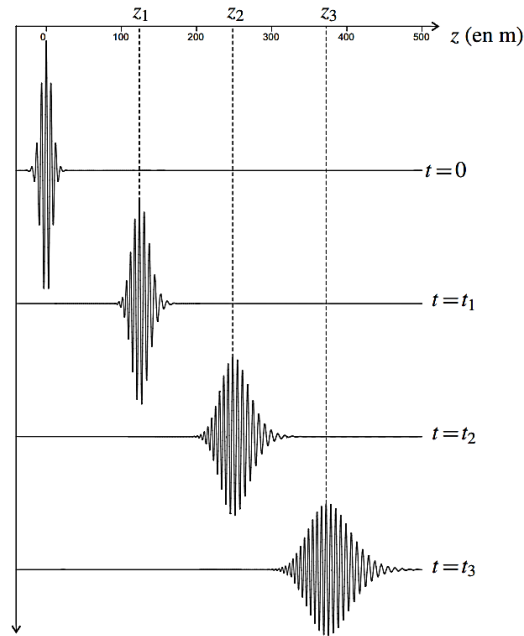


Figure 19.8 – Propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans un milieu dispersif.

Vitesse du paquet d'ondes Le paquet d'ondes est localisé dans l'espace. Il se déplace dans le sens positif le long de l'axe (Oz) avec une vitesse que l'on peut évaluer, en mesurant les positions z_1 , z_2 et z_3 du maximum du signal aux instants t_1 , t_2 et t_3 (ce maximum est en 0 à $t = 0$). On trouve :

$$v_{\text{paquet}} = \frac{z_1}{t_1} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \frac{z_3 - z_2}{t_3 - t_2} = 124 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

À quoi correspond cette valeur ? La vitesse de phase pour la pulsation moyenne du paquet d'ondes ω_0 est :

$$v_{\phi}(\omega_0) = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)} = \frac{1}{\alpha \omega_0} = 250 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Ce n'est pas cette vitesse que l'on a mesurée car elle est deux fois plus grande. La vitesse de groupe trouvée au paragraphe précédent est :

$$v_g(\omega_0) = \frac{1}{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0}} = \frac{1}{2\alpha\omega_0} = 125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse de groupe est bien la vitesse du paquet d'ondes .

Déformation du paquet d'ondes On observe aussi que l'extension spatiale du paquet d'ondes augmente au fur et à mesure qu'il se propage et que sa valeur maximale diminue. Ceci est dû au fait que la vitesse de groupe $v_g(\omega) = \frac{1}{2\alpha\omega}$ dépend de ω . Elle diminue avec ω donc les ondes ayant les plus faibles pulsations se propagent le plus rapidement ; or ce sont celles qui ont les plus grandes longueurs d'onde puisque $\lambda = v_{\phi}T = v_{\phi} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\alpha\omega^2}$. On peut effectivement observer que les oscillations spatiales sont plus écartées à l'avant du paquet d'ondes et plus resserrées à l'arrière.