

Durée 4h

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la **clarté**, à la **précision** et à la **concision** de la **rédaction**. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un **stylo noir ou bleu foncé non effaçable** pour la rédaction de votre composition ; **d'autres couleurs, excepté le vert**, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les **schémas** et la **mise en évidence des résultats**.
- **Ne pas utiliser de correcteur**.
- **Numéroter les copies** : "i/nombre total".
- **Respecter les notations** de l'énoncé et préciser, dans chaque cas, la **numérotation de la question posée**.
- **Écrire le mot FIN à la fin de votre composition**.

Ex 1 : Chimie

Données :

Élément chimique	H	C	O	Na	P	S	I
Masse molaire (g·mol ⁻¹)	1	12	16	23	31	32	127

Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;

Partie A : Préparation du pastis landais

À la fois moelleux et parfumé, le pastis landais (ou « pastis bourrit ») est une pâtisserie traditionnelle née au XIX^e siècle, très prisée lors des fêtes locales. Il s'agit d'une brioche légère de forme tronconique parsemée de morceaux de sucre concassé (**photo 4**). En patois gascon, « pastis » signifie « gâteau » ou « pâte » et « pastis bourrit » veut dire « gâteau à pâte levée » (cette pâtisserie n'a donc rien à voir avec la célèbre boisson anisée !).



Photo 4 - Le pastis landais

Dans sa recette moderne, on utilise de la levure (ou poudre à lever) dont l'objectif est de libérer du dioxyde de carbone gazeux pour faire gonfler la pâte lors de la cuisson. Une fois la levure

mélangée aux ingrédients et humidifiée, le gaz est obtenu par une réaction acidobasique faisant intervenir l'ion hydrogénocarbonate HCO_3^- .

Soit la composition d'un sachet de 15 g de levure :

* 4 g d'amidon ;

* m_d g de diphosphate disodique $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ (ou dihydrogénodiphosphate de sodium) ;

* m_b g de bicarbonate de sodium NaHCO_3 (ou hydrogénocarbonate de sodium).

L'amidon joue le rôle de stabilisateur pour que les deux composés actifs ne réagissent pas entre eux pendant la durée de stockage du sachet (ce dernier devant être conservé à l'abri de toute trace d'humidité).

Le **tableau 2** donne les noms des ions utiles dans cette partie.

Ions	$\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$	$\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$	$\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$	HCO_3^-	CO_3^{2-}
nom des ions	dihydrogénéodiphosphate	monohydrogénéodiphosphate	diphosphate	hydrogénéocarbonate	carbonate

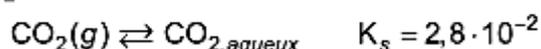
Tableau 2 - Noms des ions diphosphates et carbonates

Données à 25 °C :

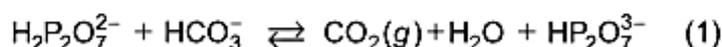
Couples acido-basiques	$\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-} / \text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$	$\text{HP}_2\text{O}_7^{3-} / \text{P}_2\text{O}_7^{4-}$	$\text{CO}_{2,\text{aqueux}} / \text{HCO}_3^-$	$\text{HCO}_3^- / \text{CO}_3^{2-}$
pKa	$\text{pKa}_1 = 6,7$	$\text{pKa}_2 = 9,3$	$\text{pKa}_3 = 6,3$	$\text{pKa}_4 = 10,3$

Tableau 3 - Couples acido-basiques et leur pKa

Équilibre de solubilité du CO_2 dans l'eau et sa constante d'équilibre :



On donne la réaction d'équilibre entre l'ion hydrogénocarbonate HCO_3^- et l'ion dihydrogénodiphosphate $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$:



Q23. En assimilant la réaction dans la pâte à la réaction en solution aqueuse, exprimer en fonction de K_{a1} , K_{a3} et de K_s , la constante d'équilibre de la réaction (1), puis donner sa valeur numérique à 25 °C.

Peu avancée à température ambiante, cette réaction devient totale lors de la cuisson, le chauffage déplaçant l'équilibre dans le sens du dégazage de CO_2 . Des alvéoles se forment alors au sein de la pâte qui se solidifie en une structure "aérienne" et dilatée : c'est la "levée".

Q24. On utilise un sachet de 15 g de levure. Calculer les masses m_d de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7$ et m_b de NaHCO_3 contenues dans le sachet pour assurer la stœchiométrie de la réaction (1).

Q25. Quel volume de CO_2 un sachet de levure peut-il libérer sous une pression égale à 1 bar et une température égale à 170°C si on suppose totale la réaction (1) et si on assimile le gaz à un gaz parfait ?

Il est aussi bien connu des amateurs pâtisseries que le bicarbonate de sodium seul peut être utilisé comme poudre à lever, mais qu'il donne un goût amer aux pâtisseries en raison du caractère basique de l'ion carbonate formé. La formulation combinée d'un sachet de levure en bicarbonate et en dihydrogénodiphosphate évite cet inconvénient en permettant des valeurs de pH modérément basiques. On se propose de vérifier ce point.

Le diagramme simulé **figure 8** représente le logarithme décimal des concentrations des espèces H_3O^+ , OH^- , $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$, $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$ et $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$ en fonction du pH, dans une solution de concentration totale C_p en espèces phosphorées. La valeur numérique de C_p a été choisie pour correspondre à la situation de la question **Q27**.

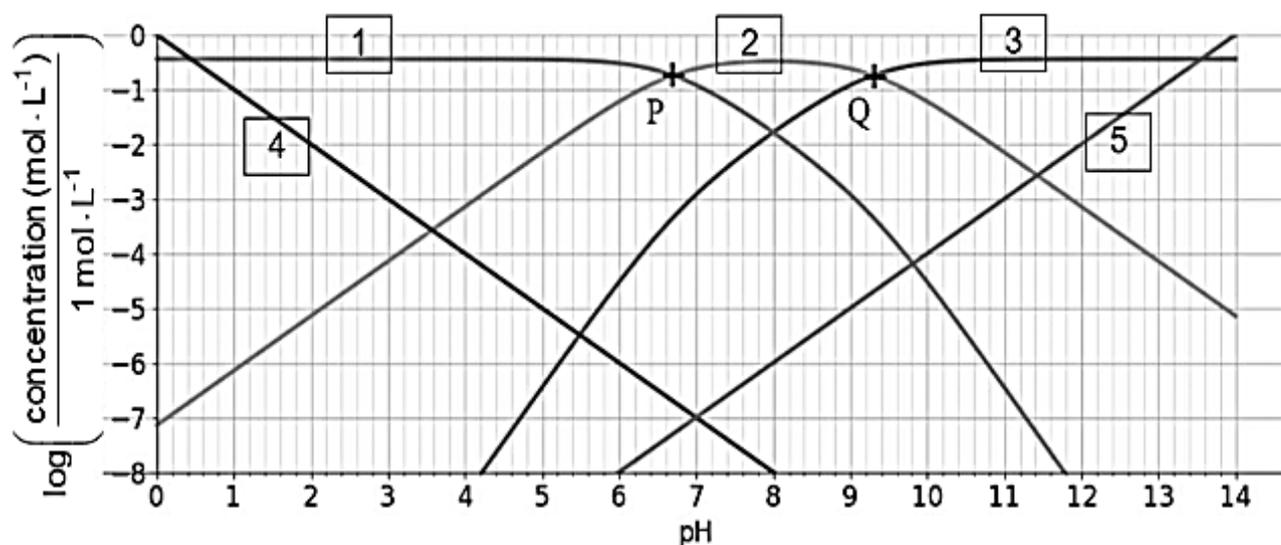
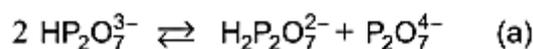


Figure 8 - Diagramme pour les espèces H_3O^+ , OH^- , $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$, $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$ et $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$

- Q26.** a) Pour chaque numéro de courbe de la **figure 8**, attribuer l'espèce correspondante.
 b) Déterminer C_p par lecture sur le diagramme.
 c) Expliquer à quelles valeurs théoriques correspondent les abscisses des points P et Q.
- Q27.** On réalise l'expérience suivante : un sachet de 15 g de levure est dissous dans 100 mL d'eau. On chauffe pour rendre la réaction (1) totale. Après retour à température ambiante et en négligeant la quantité de CO_2 dissous restant en solution après dégazage dans l'air, trouver, par lecture en **figure 8**, le pH de la solution finale obtenue, sachant que, dans cette hypothèse, le pH est déterminé par la seule réaction d'équilibre (a) suivante :



Partie B : Bronzage sur les plages de la Côte d'Argent et protection solaire

Données :

Couple d'oxydoréduction	$C_6H_6O_6 / C_6H_8O_6$	I_2 / I^-	$S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$
Potentiel standard E° (en V)	0,13	0,54	0,08

La plage est le lieu privilégié pour le bronzage. Cependant, l'exposition aux rayons ultraviolets (UV) constitue le principal facteur des cancers de la peau. Une dose excessive de rayons UV agresse les cellules cutanées et peut provoquer des dommages irréversibles. Il est donc essentiel de se protéger, par exemple par l'application sur la peau d'une crème solaire.

Les crèmes solaires contiennent des anti-oxydants, c'est-à-dire des substances réductrices qui défendent les cellules contre les molécules instables, nommées radicaux libres, générées par l'action des rayonnements UV.

La vitamine E (ou α -tocophérol, de formule brute $C_{29}H_{50}O_2$) et la vitamine C (ou acide ascorbique, de formule brute $C_6H_8O_6$) sont de puissants antioxydants.

On propose d'étudier le titrage iodométrique de l'acide ascorbique contenu dans une poudre (p) intervenant comme matière première dans la fabrication d'une crème solaire.

Pour ce faire, on prépare les trois solutions ci-dessous :

- une solution (a) obtenue par dissolution de 500 mg de (p) dans 100 mL d'eau ;
- une solution (i) obtenue par dissolution de 1,250 g de cristaux de diiode dans 100 mL d'eau ;
- une solution (t) obtenue par dissolution de 1,500 g de cristaux de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ dans 100 mL d'eau.

Dans un erlenmeyer, on introduit un volume $V_a = 20,0$ mL de solution (a). On note n_a la quantité d'acide ascorbique inconnue contenue dans ce prélèvement. On verse ensuite un volume $V_i = 30,0$ mL de solution (i).

L'erlenmeyer est bouché, le mélange est agité puis laissé au repos pendant 15 min.

On dose ensuite le diiode en excès par la solution (t). Le volume obtenu à l'équivalence est égal à $V_t = 19,4$ mL.

Q36. Calculer les concentrations en quantité de matière C_i et C_t des solutions (i) et (t) en diiode et en ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$.

Q37. Écrire l'équation bilan de la réaction (supposée totale) se produisant dans l'erlenmeyer avant l'étape de dosage, puis écrire l'équation bilan de la réaction de dosage.

Q38. Exprimer n_a en fonction de C_i , V_i , C_t et de V_t .

Q39. Déterminer le degré de pureté de (p) défini par la fraction massique de (p) en acide ascorbique.

Ex 2 : Haut-parleur électrodynamique

On représente ci-dessous un haut-parleur électrodynamique (**figure 1**). Celui-ci est constitué d'une bobine d'axe ($X'X$), de résistance R , d'inductance propre L , solidaire d'une membrane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction ($X'X$) normale à son plan. Lorsque la bobine s'écarte de sa position d'équilibre d'un écart algébrique $x(t)$, elle est rappelée vers cette position d'équilibre par une force élastique modélisée par un ressort de raideur k . De plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement fluide, proportionnelle à sa vitesse de déplacement, qui s'écrit $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$. On ne tiendra pas compte du poids de l'équipage mobile bobine-membrane.

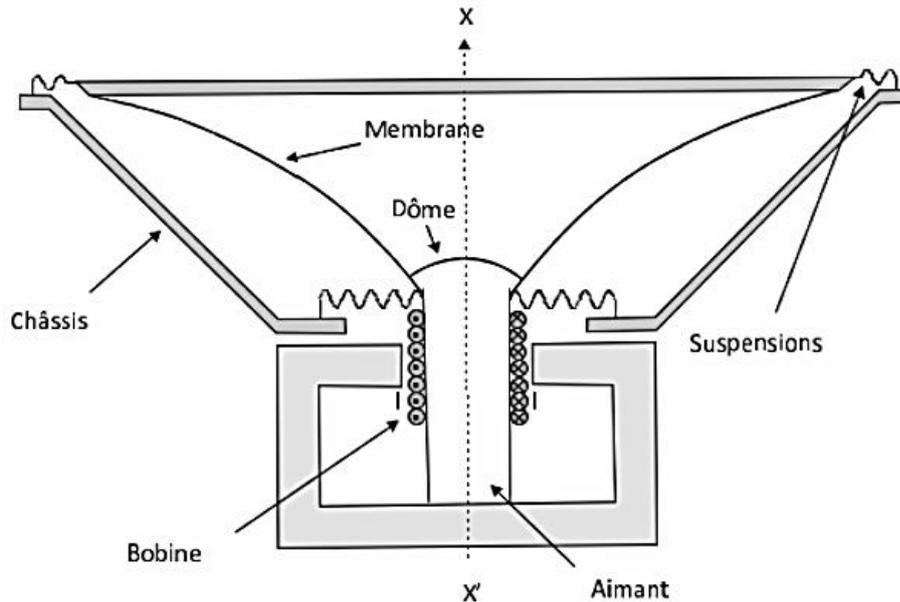


Figure 1 - Schéma du haut-parleur de l'étude

La bobine est placée dans un champ magnétique radial \vec{B} , uniforme en norme, normal à ($X'X$), créé par un aimant permanent. On se place dans un modèle simplifié de haut-parleur basé sur la configuration des rails de Laplace, représentée sur la **figure 2**. Le générateur de force électromotrice (f.é.m.) $E(t)$ délivre un signal électrique que l'on veut transformer en signal sonore. La membrane et l'air sont mis en mouvement par l'intermédiaire de la barre de largeur ℓ qui se déplace de $x(t)$. Cette grandeur $x(t)$ représente l'élongation du ressort par rapport à la position d'équilibre, elle-même caractérisée par la longueur ℓ_0 . La membrane du haut-parleur est solidaire de la barre. On note m_T la masse du système {barre, haut-parleur}. On suppose donc que la verticale est définie par l'axe z , l'axe x étant horizontal. On note $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base des vecteurs unitaires de la **figure 2**.

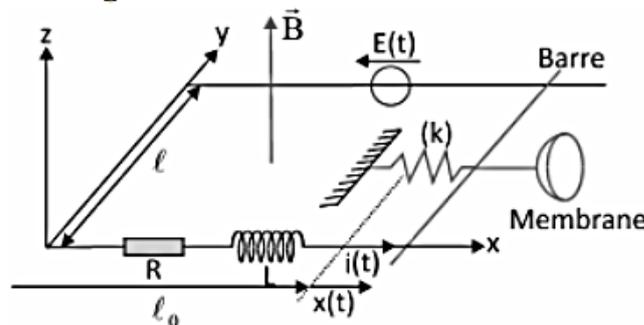


Figure 2 - Configuration des rails de Laplace de l'étude

Q1. Montrer que la f.é.m. induite e dans le cadre vaut $e = -B\ell v(t)$ où $v(t)$ est la vitesse, dérivée de $x(t)$.

Q2. Dédurre de la question précédente l'équation électrique (E.E.) traduisant le comportement du circuit. Faire le schéma électrique équivalent en tenant compte de la f.é.m. induite. On notera $i(t)$ le courant induit dans ce circuit.

Q3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'ensemble {barre + haut-parleur} de masse m_T . En déduire l'équation différentielle mécanique relative au mouvement de la barre (équation E.M.).

Q4. Faire un bilan de puissances en combinant les équations E.E. et E.M. Le commenter.

Q5. Comparer la puissance de la f.é.m. $P_{fem} = ei$ à la puissance de la force de Laplace P_L .

Q6. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $E(t)$ de pulsation ω . On utilisera les notations complexes, pour lesquelles $\underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$, $E(t)$ s'identifiant alors avec la partie réelle de $\underline{E}(t)$. Montrer que l'on a $\underline{E} = (R + jL\omega + \underline{Z}_m)\underline{i} = \underline{Z}_m \underline{i}$ où \underline{i} est le courant complexe traversant le circuit et \underline{Z}_m est une grandeur, appelée impédance motionnelle, dont on donnera l'expression en fonction de $B, \ell, \alpha, m_T, \omega$ et k .

Q7. Montrer que l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$ peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{Y}_m = \frac{1}{R_m} + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}.$$

Donner l'expression des termes R_m, C_m et L_m en fonction de B, ℓ, α, m_T et k .

Q8. Dédurre de ce qui précède le schéma électrique équivalent du haut-parleur.

Le rendement η du haut-parleur est défini comme le rapport de la puissance moyenne émise par l'onde sonore sur la puissance moyenne fournie par la source de tension.

Q9. Montrer que la relation établie à la question Q4. devient, en raisonnant sur les moyennes temporelles, en régime périodique établi :

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle \alpha v^2 \rangle.$$

Commenter ce résultat.

Q10. En identifiant la puissance émise par l'onde sonore $\langle P_{son} \rangle$ à $\langle \alpha v^2 \rangle$, où v est la vitesse de la membrane, montrer que η est de la forme :

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_m} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}.$$

On donnera les expressions de Q et ω_0 en fonction de α, m_T et k .

Q11. Commenter la forme obtenue. On pourra par exemple effectuer l'étude asymptotique du comportement en basses et hautes pulsations, ainsi que pour une pulsation proche de ω_0 .

Ex 3 : Electromagnétisme : GSM 4G

Données :

- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ou l'air : $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$,
- permittivité diélectrique du vide ou de l'air : $\epsilon_0 = \frac{1}{36 \pi 10^9} \text{ F m}^{-1}$,
- perméabilité magnétique du vide ou de l'air : $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$.

On s'intéresse à l'un des deux standards de télécommunication, candidat pour la 4^e génération de la téléphonie mobile, « Long Term Evolution – Advanced ». Il est constitué, en France, de deux bandes de fréquences dites 800 MHz et 2 600 MHz. Par le déploiement de technologies particulières, des débits supérieurs à 30 Mbits / seconde pour des mobiles en mouvement sont visés.

L'espace est défini par un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et on considère un point M de l'espace repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On pose $\overline{OM} = \vec{r}$.

PARTIE III : PROPAGATION DANS L'AIR

III.1. Propagation

- III.1.1.** Donner, en les nommant, les équations de Maxwell sous leurs formes locales dans l'air en l'absence de sources. On traitera des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ comme n'étant pas nécessairement ceux d'une Onde Plane Progressive Sinusoïdale (OPPS).
- III.1.2.** Etablir l'équation de propagation en champ électrique et en déduire l'expression de la vitesse de propagation de l'onde, en fonction des données de l'énoncé.
- III.1.3.** On considère à présent que le champ $\vec{E}(M, t)$ est celui d'une OPPS polarisée rectilignement parallèlement à \vec{e}_x , se propageant suivant les z croissants et dont la formulation générale est donnée par l'expression complexe $\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_m e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. \vec{k} est le vecteur d'onde de norme constante k , ω est la pulsation et $\underline{\vec{E}}_m$ est une constante complexe vectorielle.
- III.1.3.a.** Préciser et justifier l'expression de \vec{k} et la direction de $\underline{\vec{E}}_m$.
- III.1.3.b.** Donner l'expression de $\vec{E}(M, t)$ en fonction des coordonnées de M et en projection dans la base cartésienne \mathcal{B} associée à \mathcal{R} .
- III.1.3.c.** Expliciter les deux termes de l'équation de propagation en fonction de k , ω et $\underline{\vec{E}}(M, t)$.
- III.1.3.d.** En déduire la relation de dispersion du milieu.
- III.1.4.** Dans l'hypothèse de la question précédente, expliciter le champ $\vec{B}(M, t)$ dans la base cartésienne \mathcal{B} en fonction de $\underline{\vec{E}}_m$, c , k et ω .

III.1.5. En notant $\underline{E}_m = E_m e^{j\varphi}$, φ étant une constante, expliciter les champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$.

III.2. Puissance et rayonnement

III.2.1. Donner la définition du vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ en fonction des champs et son interprétation physique. Quelle est sa dimension physique ?

III.2.2. Montrer que la valeur moyenne temporelle de la norme de $\vec{R}(M,t)$ peut s'écrire $\langle \|\vec{R}\| \rangle = \alpha c \varepsilon_0 E_m^2$ pour les champs de l'OPPS définie dans la partie III.1. On donnera la valeur de la constante α .

III.2.3. Dans le cas d'une antenne réelle, l'hypothèse de l'OPPS n'est valable que localement. On sait alors que la valeur de $\langle \vec{R} \rangle$ dépend de la distance d à l'antenne, de la puissance P_a d'alimentation et de son gain G , lequel dépend de la direction d'observation. On peut ainsi écrire : $4\pi d^2 \langle \|\vec{R}(d)\| \rangle = P_a G$. Exprimer l'amplitude E_m du champ en fonction de c , ε_0 , P_a , G et d .

III.3. Exposition

Il est parfois nécessaire de privilégier un sens de fonctionnement de l'antenne. L'énergie rayonnée par une antenne est alors répartie de manière inégale dans l'espace et il existe des directions privilégiées, appelées "lobes de rayonnement". Ces différentes directions peuvent être visualisées à l'aide du diagramme de rayonnement réalisé en trois dimensions. Le lobe le plus important est appelé "lobe principal". Il est dirigé vers l'avant de l'antenne. Les lobes secondaires, moins importants, sont dirigés vers l'arrière ou sur les côtés de l'antenne.

La norme sanitaire pour ce type de rayonnement est actuellement en France $E_{\max} = 61 \text{ V/m}$. Elle correspond à un seuil défini sur la base des effets thermiques (échauffement) liés au champ électromagnétique. A titre de comparaison, la norme en Italie, Russie, Pologne et Chine est de $E_1 = 6 \text{ V/m}$.

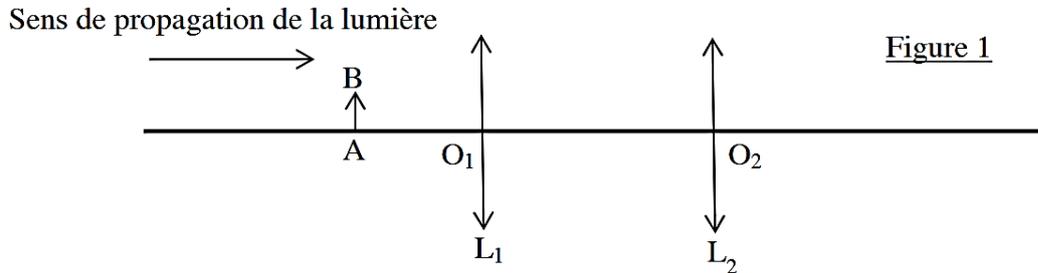
III.3.1. Dans le cadre d'une implantation urbaine, il se peut que certains locaux interceptent le lobe principal. En considérant dans ce cas une puissance $P_a = 50 \text{ W}$, un gain $G = 63$ et une distance $d = 100 \text{ m}$, calculer l'intensité du champ E_{m1} . Commenter le résultat.

III.3.2. Une autre possibilité d'être exposé au rayonnement d'une antenne relais concerne le lobe secondaire orienté vers le sol. Dans ce cas le gain est plus faible, mais la distance également. Calculer, pour la même puissance $P_a = 50 \text{ W}$, le champ E_{m2} dans le cas où $G = 2$ et $d = 10 \text{ m}$. Commenter le résultat.

Ex 4 : Microscope optique

Le microscope est modélisé sur la figure 1, par un système de deux lentilles minces convergentes, l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image $f'_1=5$ mm), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2 de centre O_2 et de distance focale image $f'_2= 15$ mm).

On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120$ mm . On choisit le sens positif dans le sens de propagation de la lumière.



On rappelle la relation de conjugaison d'une lentille et l'expression du grandissement γ :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

A.1.1 Les relations précédentes sont valables à condition que les rayons lumineux satisfassent les conditions de Gauss. Donner ces 2 conditions.

A.1.2 Si F'_1 est le foyer image de L_1 et F_2 le foyer objet de L_2 , on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1 , f'_2 , D_0 , puis calculer sa valeur.

A.1.3 Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de L_1 , à sa gauche, de façon à ce que l'image A'B' donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

A.1.3.1 Exprimer d en fonction de f'_1 et Δ , puis calculer sa valeur.

A.1.3.2 Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f'_1 et Δ , puis calculer sa valeur.

A.1.3.3 Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet ?

A.1.3.4 Faire une construction géométrique faisant apparaître l'objet, l'image intermédiaire, ainsi que l'angle α' sous lequel est observée l'image finale à travers le microscope.

A.1.4 Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right|$ où α est l'angle sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu placé à une distance $D = 250$ mm.

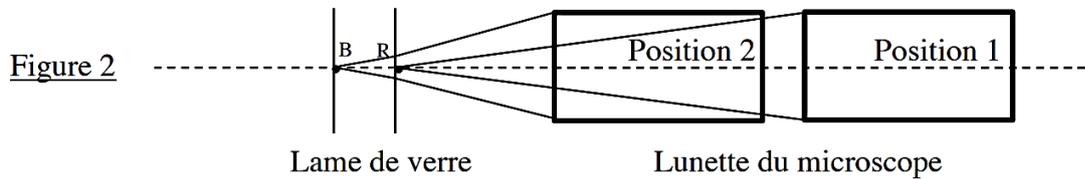
L'objet étant de très petite taille, ces deux angles seront bien sûr très faibles.

Exprimer G en fonction de Δ , D , f'_1 et f'_2 , puis calculer sa valeur.

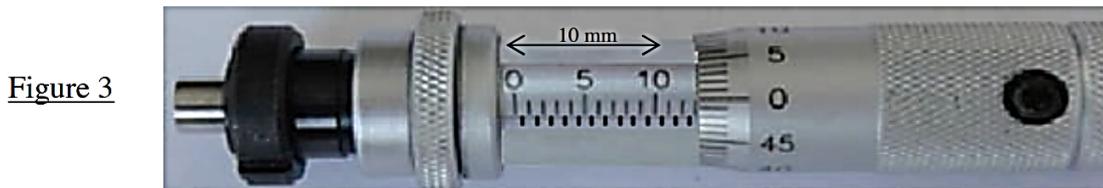
A.1.5 On utilise ce microscope pour mesurer l'épaisseur e d'une mince lame de verre à faces parallèles, d'indice $n=1.5$.

On colle une petite pastille bleue (B) sur la face gauche de la lame et une petite pastille rouge (R) sur sa face droite.

On positionne d'abord la lunette (ensemble objectif+oculaire) du microscope de façon à faire la mise au point sur la pastille rouge (Figure 2, Position 1). Puis, grâce à une vis micrométrique, on translate la lunette d'une distance ϵ , de façon à faire la mise au point sur l'image de la pastille bleue (Figure 2, Position 2) :



La figure 3 ci-dessous montre la position 2 de la vis micrométrique, la position 1 correspondant à la graduation 40 de la partie mobile.



A.1.5.1 Déterminer la valeur mesurée de ϵ en mm, avec une estimation de l'incertitude de mesure.

A.1.5.2 En tenant compte du phénomène de réfraction et en considérant les rayons lumineux très peu inclinés par rapport à l'axe optique, exprimer e en fonction de n et ϵ , puis calculer sa valeur.

Ex 5 : Luge

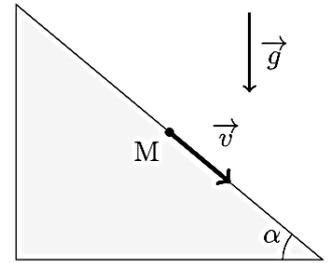
La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé, sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.

1 • Trajectoires.

Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge+lugeur} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse $m = 100$ kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

Descente rectiligne

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse $v_0 = 5,0 \text{ m.s}^{-1}$. Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale. Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.



1.1 - Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.

1.2 - Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α .

1.3 - L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse $v_a = 30 \text{ m.s}^{-1}$? Application numérique.

1.4 - Quelle est la distance parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Application numérique.

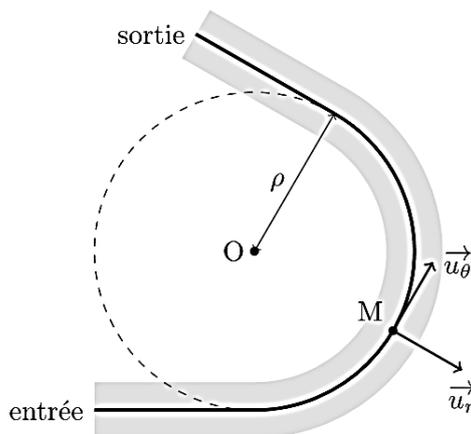
Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V , sur un cercle de rayon ρ .

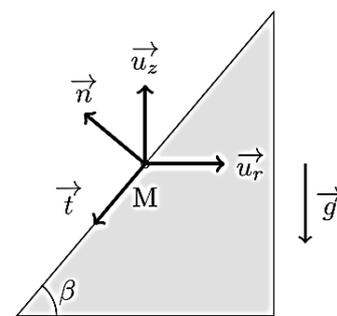
La piste est inclinée latéralement d'un angle $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

La trajectoire se situe dans un plan horizontal : $\vec{v} = V \vec{u}_\theta$. Le trièdre de vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct.

On désigne par $\vec{R} = R_N \vec{n} + R_T \vec{t}$ la réaction de la piste, qui n'est plus uniquement normale. Les vecteurs unitaires \vec{n} (normal) et \vec{t} (tangent) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

- 1.5 - Exprimer l'accélération \vec{a} en fonction de V , ρ et de \vec{u}_r . Justifier physiquement le sens de l'accélération.
- 1.6 - La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère (\vec{t}, \vec{n}) .
- 1.7 - En déduire les expressions des réactions R_N et R_T en fonction de V , ρ , β , g et m .
- 1.8 - Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors R_T en fonction de m , ρ , β et $(V^2 - V_c^2)$.

Soit $f = 0,4$ le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| < f R_N$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V \geq V_c$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

- 1.9 - Montrer que V^2 doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage :

$$V^2 (\cos \beta - f \sin \beta) \leq g \rho (\sin \beta + f \cos \beta)$$

- 1.10 - En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V . Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f . Faire l'application numérique, en degrés.
- 1.11 - Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g , ρ , β et f . Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?
- 1.12 - Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c . Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

Ex 6 : Arrosage automatique

On se propose d'étudier le montage électronique de la figure 9 qui illustre un système d'arrosage automatique.

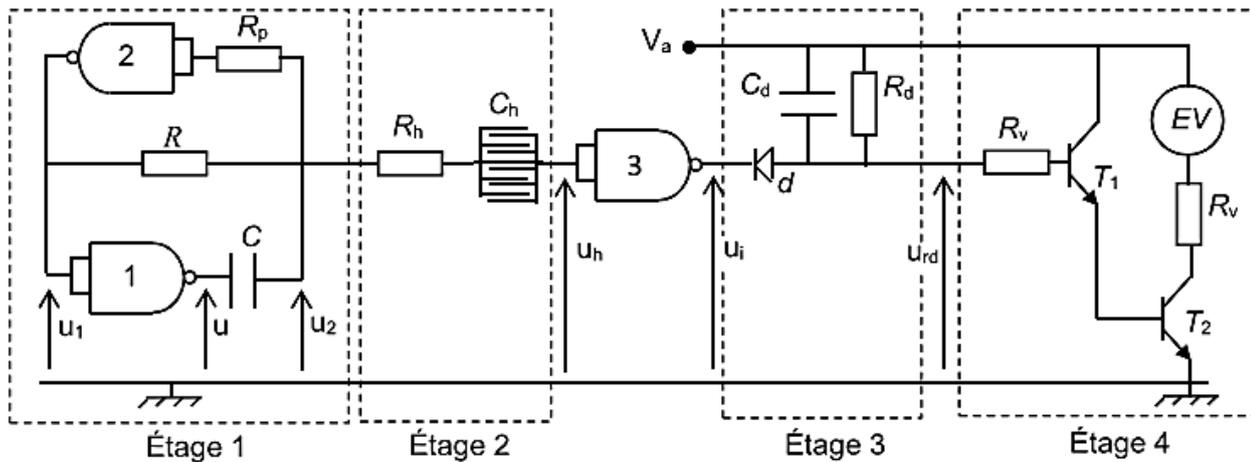


Figure 9 - Schéma d'un système électronique d'arrosage automatique

Il s'agit d'un montage comportant trois portes NAND à deux entrées reliées entre elles.

EV est une électrovanne permettant l'arrivée d'eau, d est une diode et T_1 et T_2 sont des transistors de puissance. Aucune connaissance sur le fonctionnement de ces composants n'est nécessaire.

La tension de sortie des portes NAND est $V_a > 0$ pour une sortie à l'état logique "1" et 0 pour une sortie à l'état logique "0".

La tension V_a est aussi utilisée comme potentiel imposé au point représenté sur le montage.

On note V_b (avec $V_b < V_a$) la tension de basculement des portes logiques : une tension d'entrée $V_e < V_b$ correspond à un niveau logique "0" en entrée de porte. Inversement une tension d'entrée $V_e > V_b$ correspond à un niveau logique "1".

On néglige la résistance de sortie des portes logiques et on considère leur résistance d'entrée comme infinie.

Q28. Rappeler la table de vérité d'une porte NAND à deux entrées indépendantes. Quelle est la fonction de cette porte lorsque ses deux entrées sont reliées entre elles ?

On étudie l'étage 1. La résistance R_p est une résistance de protection (indispensable en pratique) mais elle ne joue aucun rôle dans l'étude théorique de l'étage 1. De plus, le prélèvement en courant, réalisé par la connexion à l'étage 2, est supposé négligeable (ce qui est assuré par la grande valeur de la résistance R_h).

Q29. Établir que l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_c(t) = u_2(t) - u(t)$ s'écrit

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = u_1 - u \text{ dans laquelle on exprimera le temps caractéristique } \tau.$$

Q30. a) À l'instant initial de date $t = 0$, le condensateur C est déchargé et $u_1 = V_a$. Que vaut alors $u(t = 0^+)$? En déduire les expressions de $u_c(t)$ et de $u_2(t)$, valables tant que $u_1 = V_a$.

b) Exprimer la date t_b de fin de validité des expressions précédentes de $u_c(t)$ et de $u_2(t)$. On donnera t_b en fonction de τ , V_a et de V_b .

Q31. a) Écrire, en justifiant, la nouvelle équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$, valable à partir de la date t_b et jusqu'à une nouvelle date de fin de validité $t'_b > t_b$.

b) Obtenir alors les nouvelles expressions de $u_c(t)$ et de $u_2(t)$ pour $t_b < t < t'_b$.

c) Exprimer $t'_b - t_b$ en fonction de τ , V_a et de V_b .

Q32. a) Quelle équation différentielle est à considérer à partir de la date t'_b et jusqu'à une nouvelle date de fin de validité $t''_b > t'_b$? Exprimer alors $u_c(t)$ et $u_2(t)$ pour $t'_b < t < t''_b$.

b) En déduire $t''_b - t'_b$ en fonction de τ , V_a et de V_b .

Q33. Faire un tracé soigné des chronogrammes de $u(t)$, $u_c(t)$ et $u_2(t)$ sur une même figure.

Q34. a) Déduire l'expression de la période T des signaux obtenus pour $t > t_b$.

b) Calculer T pour $V_a = 5 \text{ V}$, $V_b = 1,5 \text{ V}$, $R = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 20 \text{ nF}$.

c) Quel rôle assure l'étage 1 pour les étages postérieurs à lui ? Quel nom porte ce type de circuit en électronique ?

L'étage 2 correspond à un capteur capacitif d'humidité enfoui dans le sol. Il s'agit d'un condensateur de capacité C_h variable avec le taux d'humidité. La tension $u_h(t)$ en sortie de capteur est envoyée à l'entrée de la porte NAND 3, qui fournit une tension $u_i(t)$ à sa sortie. L'étage 3, constitué de la diode d en série avec un circuit (R_d, C_d) , réalise un redressement-filtrage qui transforme $u_i(t)$ en une tension $u_{rd}(t)$ quasi-constante (on ne demande pas de justifier ce point). Lorsque u_{rd} dépasse 3,5 V, l'électrovanne EV est alimentée en courant (grâce aux transistors présents à l'étage 4), ce qui déclenche l'arrosage.

Les chronogrammes de $u_h(t)$, $u_i(t)$ et de $u_{rd}(t)$ sont donnés en **figure 10a** lorsque $C_h = 1\,000 \text{ pF}$ et en **figure 10b** lorsque $C_h = 700 \text{ pF}$ (l'origine des temps sur ces graphes a été choisie arbitrairement).

