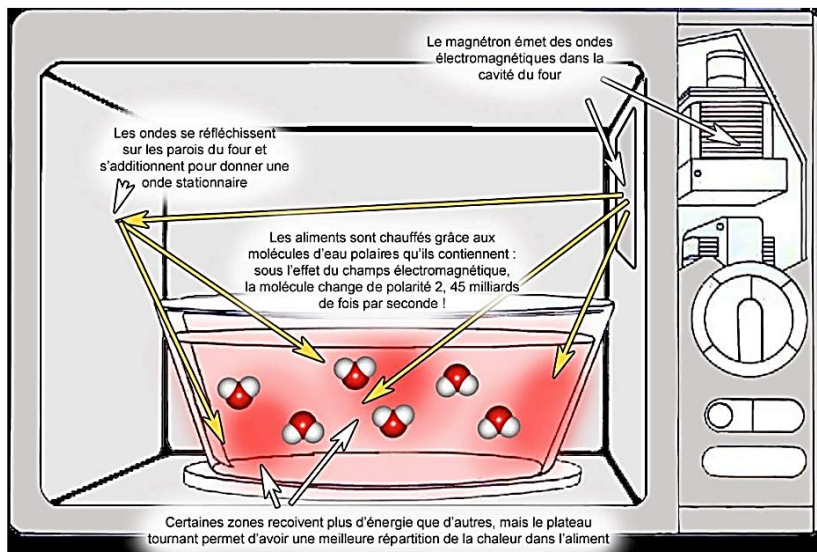


Chapitre EM7. Ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique



Les micro-ondes sont situées entre l'infrarouge et les ondes de radio dans le spectre électromagnétique. Elles ont des fréquences entre 1 et 300 GHz.

← Schéma de principe d'un four à micro-ondes.

Principe de fonctionnement en lien avec une cavité vide délimitée par des parois conductrices, cf § C.6.

INTRO :

Dans ce chapitre, on étudie la **propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique**, par exemple dans un **conducteur métallique**, ainsi que leur **réflexion sur un conducteur parfait**.

On établira les différences avec la propagation dans le vide : équation de diffusion, atténuation : « **effet de peau** ».

Lors de l'étude de la réflexion d'une onde EM sur un dioptré vide / conducteur parfait, on reviendra sur la notion d'ondes stationnaires et de modes propres.

Buts de ce chapitre : établir l'équation d'évolution d'une onde électromagnétique (EM) dans un milieu ohmique ; étudier la réflexion d'une onde EM sur un conducteur parfait et l'onde EM régnant dans une cavité à une dimension.

Prérequis :

1^e année : Superposition d'ondes ; Régime Sinusoïdal Forcé ; Mécanique du point.

2^e année : EM4 Electromagnétisme en régime variable ; EM5-6 Ondes EM dans le vide et dans un plasma ; T2/4 Transferts thermiques.

Plan du chapitre :

A) Approximations usuelles dans un milieu ohmique	2
1) Loi d'Ohm locale	2
2) Neutralité électrique locale	3
3) Courants de conduction et de déplacement – Régime lentement variable	3
4) Bilan : Equations de Maxwell dans un milieu ohmique en régime lentement variable	3
B) Onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable – Effet de peau	4
1) Equation de diffusion dans un milieu ohmique	4
2) Solution de l'équation – Epaisseur de peau	4
3) Effet de peau	6
C) Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait.....	7
1) Conducteur parfait	7
2) Conditions aux limites à l'interface – Relations de passage.....	8
3) Onde réfléchie sur un conducteur parfait.....	8
4) Onde résultante : onde stationnaire.....	11

5) Solution de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires – Séparation des variables.....	12
6) Applications aux cavités à une dimension – Mode d'onde stationnaire	12
Annexe : Ondes progressives et ondes stationnaires.....	15

A) Approximations usuelles dans un milieu ohmique

1) Loi d'Ohm locale

a) Modélisation d'un conducteur métallique : Modèle de Drude

On considère un métal constitué d'ions positifs fixes et d'**électrons de conduction**, de charge $-e$ et de masse m_e , libres de se déplacer dans le métal (cf *MPSI solide cristallin métallique*). On note n^* (USI : m^{-3}) la **densité volumique d'électrons** : $n^* \approx 10^{28} m^{-3}$.

Contrairement au plasma, le métal est un **milieu dense**, on doit donc tenir compte des **collisions entre les électrons et les cations du réseau**.

On modélise les collisions par une force de type frottement fluide $\vec{f} = -m_e \frac{\vec{v}}{\tau_c}$, où \vec{v} est la vitesse d'un électron et τ_c est un paramètre phénoménologique appelé **temps de collision ou de relaxation** : $\tau_c \approx 10^{-14} s$.

b) Expression du champ électromagnétique

Considérons la propagation dans le conducteur métallique d'une **pseudo⁽¹⁾-onde PPM électromagnétique**.

Son champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}})}$$

Avec ω la pulsation de l'émetteur de l'onde ; $\underline{\vec{r}} = \underline{\vec{OM}}$ le vecteur position ;

$\underline{\vec{k}}$ le vecteur d'onde ; dans le métal, le nombre d'onde angulaire \underline{k} peut être complexe⁽¹⁾ :
 $\underline{k} = k' - ik''$ qu'on cherche à déterminer au § B.2 ;

De même, on écrit :

$$\underline{\vec{B}}(M, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}} \cdot \underline{\vec{r}})}$$

Rappel du ChEM5 : Avec cette représentation complexe, le vecteur symbolique nabla s'écrit : $\vec{\nabla} = -i\underline{\vec{k}}$

c) Mouvement des électrons de conduction – Loi d'Ohm locale

Sous l'action du champ électromagnétique, les électrons de conduction vont se mettre en mouvement.

Ils sont supposés être **non relativistes** i.e. que leur vitesse est très inférieure à c , célérité de la lumière dans le vide ainsi, comme dans le cas du plasma, on peut négliger le terme magnétique de la force de Lorentz devant le terme électrique.

On cherche à exprimer le vecteur densité de courant associé au mouvement des électrons de conduction.

Un milieu **ohmique** vérifie la **loi d'ohm locale**⁽²⁾ :

$$\underline{\vec{j}} = \gamma \underline{\vec{E}}$$

où γ (parfois noté σ) est la **conductivité électrique** (USI : $\Omega^{-1} \cdot m^{-1} = S \cdot m^{-1}$) : $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

ODG : $\gamma \approx 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ pour le cuivre.

La loi d'Ohm traduit la mise en place d'un **courant de conduction** (déplacement d' e^-) sous l'action de $\underline{\vec{E}}$.

⁽²⁾ La loi d'ohm est vérifiée tant que les fréquences ne sont pas trop grandes : $f \ll 10^{13} Hz \approx \frac{1}{2\pi\tau_c}$.

➤ Exercice classique :

i) Sachant que pour un électron non relativiste $\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, montrer que le vecteur vitesse \vec{v} d'un électron situé en M vérifie l'équation : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{v}}{\tau_c} = \frac{-e}{m_e} \cdot \underline{\vec{E}}(M, t)$.

⇒ Sous l'effet du champ, l'électron a un mouvement d'oscillation de même pulsation ω que le champ.

- ii) Exprimer le vecteur densité de courant \vec{j} dû au mouvement des électrons en fonction de e , \vec{v} et n^* .
- iii) En RSF, on introduit les notations complexes de \vec{v} et \vec{j} . Exprimer \vec{v} avec l'équation du mouvement transposée en notations complexes puis en déduire que la conductivité électrique complexe du métal s'écrit : $\underline{\gamma} = \frac{n^* e^2 \tau_c}{m_e (1 + i \tau_c \omega)}$.
- iv) Pour ω « assez faible », simplifier cette expression pour retrouver la loi d'Ohm locale avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$.
- Rq : Pour $f \gg 10^{13}$ Hz, $\underline{\gamma} \rightarrow 0$: les e^- ne parviennent pas à suivre les variations trop rapides du champ.

Conséquence : Le champ fournit toujours de la puissance au milieu ohmique :

$$P_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma} > 0$$

C'est **l'effet Joule**. Un milieu ohmique est un **milieu absorbant**.

2) Neutralité électrique locale

Un **milieu ohmique** est **globalement neutre** (dans le cas du cuivre, chaque atome $Cu_{(s)}$ libère un électron et devient un cation Cu^+). Il est également **localement neutre à tout instant** : $\rho(\underline{M}, t) \approx 0$.

➡ Exercice classique : Démontrer la neutralité électrique locale du milieu ohmique.

On se place en un point M quelconque et on note ρ_0 la valeur initiale de $\rho(M, t)$.

- i) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\rho(M, t)$ en utilisant l'équation locale de conservation de la charge, la loi d'Ohm locale et l'équation de Maxwell-Gauss.
- ii) Introduire un temps caractéristique τ de variation de $\rho(M, t)$ et donner son ODG pour conclure.

3) Courants de conduction et de déplacement – Régime lentement variable

Dans le cas général, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\overrightarrow{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Avec $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ la densité du **courant de déplacement** et dans un milieu ohmique, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$: la densité du **courant de conduction**.

Dans un **milieu ohmique**, en régime lentement variable^(*), $\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|$.

^(*) pour $f \ll 10^{17}$ Hz $\approx \frac{1}{2\pi\tau}$ (condition vérifiée dans le cadre de la validité de la loi d'Ohm : $f \ll 10^{13}$ Hz).

➡ Exercice classique : Démontrer ce résultat.

Conséquence : Dans un milieu ohmique en régime lentement variable, le théorème d'Ampère s'énonce comme en magnétostatique.

4) Bilan : Equations de Maxwell dans un milieu ohmique en régime lentement variable

D'après les § précédents, $\rho \approx 0$; $\vec{j} = \gamma \vec{E}$; $\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|$ d'où la simplification des équations de Maxwell :

Maxwell-Gauss	$div \vec{E}(M, t) =$
Maxwell-flux ou -Thomson	$div \vec{B}(M, t) =$
Maxwell-Faraday	$\overrightarrow{rot} \vec{E}(M, t) =$
Maxwell-Ampère	$\overrightarrow{rot} \vec{B}(M, t) =$

B) Onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable – Effet de peau

1) Equation de diffusion dans un milieu ohmique

Dans un milieu ohmique en régime lentement variable, le champ électrique vérifie l'équation :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

☛ Exercice classique : Démontrer cette équation en utilisant la méthode décrite au ChEM5 p.2.

Par un raisonnement analogue, on obtient : $\Delta \vec{B} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Et avec la loi d'Ohm locale, on obtient : $\Delta \vec{J} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

Analyse de l'équation : analogie avec la conduction thermique et comparaison à l'équation de d'Alembert :

Onde EM dans le vide	Onde EM dans un milieu ohmique	« Onde thermique »
$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ <p>Equation de d'Alembert</p>	$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ <p>On peut poser $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$</p>	$\Delta T = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ <p>Avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ Equation de la chaleur sans source, cf ChT2/4</p>
Equations aux dérivées partielles <u>linéaires</u> et à coefficients constants		
<p>Terme en dérivée 2^{de} temporelle → Phénomène <i>invariant par renversement du temps</i></p>	<p>Terme en dérivée 1^e temporelle → Phénomène irréversible</p>	
Equation de <u>propagation</u>	Equation de <u>diffusion</u>	

2) Solution de l'équation – Epaisseur de peau

Position du problème :

On suppose qu'un milieu ohmique occupe le demi-espace $z > 0$.

On suppose que le champ électrique est polarisé rectilignement selon \vec{e}_x : $\vec{E} = E(z, t) \vec{e}_x$ et qu'il se propage selon $+\vec{e}_z$: $\vec{k} = k \vec{e}_z$.

Rq : Les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses d'après les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux.

La notation complexe du champ électrique est donc :

$$\underline{\vec{E}}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi_0)} \vec{e}_x$$

Rappel : Dans le milieu ohmique, k est, a priori, complexe (**pseudo-OPPM**).

Dans un milieu ohmique, la **relation de dispersion** est :

$$\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ grandeur homogène à une **longueur**.

\underline{k} est donc **complexe** et vérifie : $\underline{k} = k' - ik'' = \pm \left(\frac{1}{\delta} + \frac{-i}{\delta}\right)$ (racine carrée complexe).

➔ **Démonstration à connaître** : établir cette relation (cf méthode ChEM5) ; en déduire les expressions du champ électrique complexe puis du champ électrique réel.

NB : La relation de dispersion s'obtient aussi pour le cas plus général où $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$; $\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ (cf p.2) et $\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}$; $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow +i\omega$.

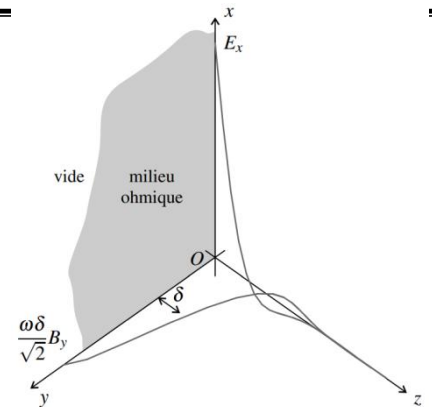
Analyse du champ électrique réel :

$$\vec{E} = E_0 e^{\left(-\frac{z}{\delta}\right)} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_0\right) \vec{e}_x$$

♦ Le facteur $\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_0\right)$ correspond au phénomène de **propagation** selon $+\vec{u}_z$, identique au modèle de l'OPPM. Il fait intervenir la **partie réelle k' du vecteur d'onde**.

♦ Le facteur $e^{\left(-\frac{z}{\delta}\right)}$ correspond au phénomène d'**ATTENUATION** de l'onde, suivant $+\vec{u}_z$, dans le milieu ohmique. Il fait intervenir la **partie imaginaire k'' du vecteur d'onde (*)**. L'atténuation est due à l'absorption d'énergie par le milieu ohmique : c'est l'**effet Joule**.

♦ $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ est la **longueur caractéristique d'atténuation** de l'onde appelé **EPAISSEUR DE PEAU**.



(*) Notion de pseudo-OPPM : l'onde est au sens strict plane (plans d'onde : $z = \text{cste}$) et monochromatique (dépendance temporelle sinusoïdale avec une unique pulsation ω) mais elle n'est pas progressive car elle ne peut pas se mettre sous la forme : $\vec{E}(z, t) = \vec{f}\left(t - \frac{z}{c}\right)$.

Analyse graphique :

L'amplitude de l'onde est quasi-nulle au-delà d'une distance $\approx 5\delta$. Une oscillation spatiale de l'onde s'étend sur une distance $= \frac{2\pi}{k'} = 2\pi\delta \approx 6\delta$. Ainsi, **une seule oscillation est visible**.

Rq :

- On peut introduire la vitesse de phase de la pseudo-OPPM : $v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$
Elle dépend de ω ainsi un milieu ohmique est dispersif.
- On obtient le champ magnétique avec l'équation de Maxwell-Faraday et la densité de courant avec la loi d'Ohm.
- Rappel : Dans un plasma occupant le demi-espace $z > 0$, pour $\omega < \omega_p$, \underline{k} est un imaginaire pur. Pour un champ électrique polarisé rectilignement selon \vec{e}_x , on a une **onde évanescence** : $\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_x$ à distinguer d'une onde qui se propage dans un milieu absorbant tel qu'un milieu ohmique.

3) Effet de peau

♦ **Influence de la fréquence** pour un conducteur en cuivre :

Fréquence	50 Hz (secteur)	1 MHz (radio)	10 GHz (μondes)	1 THz (IR)
δ	9 mm	60 μm	0,6 μm	65 nm

Lorsqu'une onde électromagnétique, de **fréquence élevée**, est envoyée sur **un conducteur**, **cette onde et le courant sont non nuls uniquement au voisinage de la surface dans une couche d'épaisseur** $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

On parle d'**EFFET DE PEAU** étant donné le caractère superficiel de la répartition des champs EM et des courants dans le conducteur.

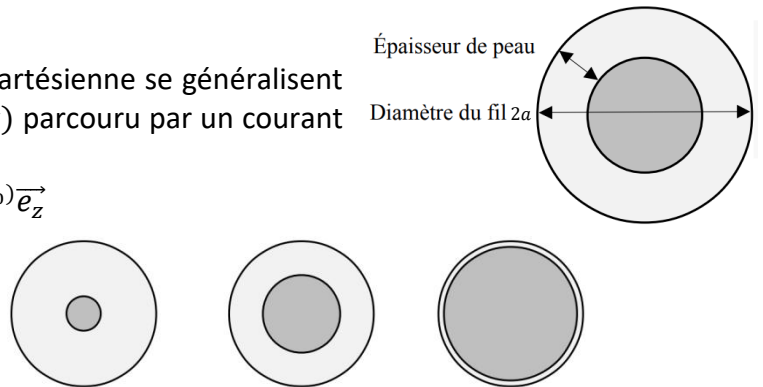
On introduit alors (§ C.3) une densité de courant surfacique.

Conséquences – Cas d'un conducteur cylindrique :

On admet que les résultats établis en géométrie cartésienne se généralisent à un conducteur cylindrique de rayon a d'axe (Oz) parcouru par un courant sinusoïdal $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_z$:

$$\vec{E}(r, t) = E_0 e^{i(\omega t - k(a-r) + \varphi_0)} \vec{e}_z$$

Evolution de δ lorsque la fréquence augmente :



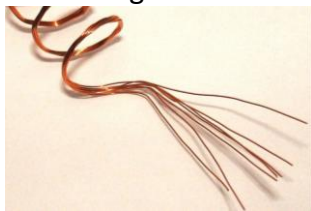
A la fréquence du secteur EDF, pour les fils domestiques de sections normalisées à 1,5 mm² pour l'éclairage, à 2,5 mm² pour les prises de courant et 4 mm² pour les fours ou plaques électriques, soit des rayons respectifs de 0,7 mm ; 0,9 mm et 1,1 mm, **l'effet de peau n'a pas d'incidence** ($\delta = 9$ mm).

Aux fréquences plus élevées, l'effet de peau entraîne une **augmentation de la résistance** du conducteur puisque sa section utile diminue.

Aux fréquences des ondes radio, seule une peau de 60 μm « travaille ». On peut alors utiliser un fil constitué de **multiples brins** (diam. 0,05 mm environ) tressés ensemble, cf figure 1.

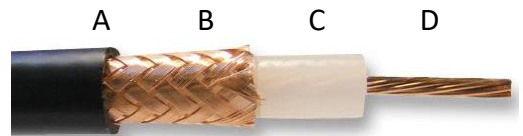
Par ailleurs, pour le transport d'énergie à haute fréquence, on peut utiliser des **guides d'ondes** : le signal est guidé entre deux cylindres métalliques séparés par un diélectrique (câble coaxial, cf figure 2).

Figure 1



Câble électrique à fils de Litz : il est constitué de plusieurs fils isolés électriquement les uns des autres. L'ensemble des fils est gainé pour former un seul câble.

Figure 2



A : Gaine extérieure en plastique

B : Blindage en cuivre

C : Isolant

D : Conducteur central (âme) en cuivre

♦ **Influence du milieu :**

L'épaisseur de peau δ dépend aussi de γ la conductivité du milieu. Le **phénomène d'effet de peau est d'autant plus marqué que le milieu est bon conducteur**, cf « limite du conducteur parfait » au § C.1.

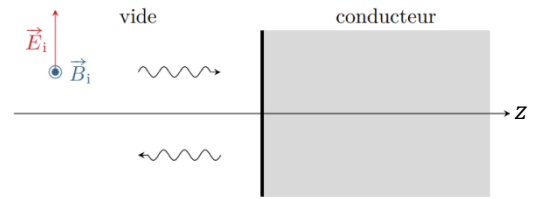
Rq : L'eau de mer a une conductivité $\gamma \approx 1 \text{ S.m}^{-1}$, $\delta \approx \frac{500}{\sqrt{f}}$ en m avec f en Hz. Pour communiquer, les sous-marins doivent utiliser des ondes radio de très basse fréquence : entre 3 et 30 kHz.

C) Réflexion d'une OPPM sur un conducteur parfait

Position du problème – Expression de l'onde incidente

Considérons un **conducteur** occupant tout le demi-espace $z > 0$, le demi-espace $z < 0$ étant occupé par un **milieu vide de charge et de courant** (par ex, de l'air).

Soit une **onde incidente PPM polarisée rectilignement** selon (Ox) se propageant dans le vide et qui frappe le dioptré $z = 0$ en **incidence normale** :



$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

On note \vec{k}_i son vecteur d'onde : $\vec{k}_i = k \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$ (d'après la relation de dispersion dans le vide).

But : Déterminer ce qu'il advient lorsque cette onde atteint le conducteur.

1) Conducteur parfait

DEFINITION :

CONDUCTEUR PARFAIT = Conducteur dont la résistivité est nulle. Autrement dit : γ (conductivité) $\rightarrow \infty$.

Or, la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur est :

$$P_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$$

Pour un conducteur parfait, il faut que $E^2 \rightarrow 0$ pour que cette **puissance volumique reste finie**.

\Rightarrow au sein d'un conducteur parfait, $\vec{E} = \vec{0}$

On déduit de l'équation de **Maxwell-Faraday** que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow$ seul un champ \vec{B} statique peut exister dans un conducteur parfait. En se limitant aux champs variables temporellement,

\Rightarrow au sein d'un conducteur parfait, $\vec{B} = \vec{0}$

On déduit de l'équation de **Maxwell-Ampère** que $\mu_0 \vec{j} = \text{rot} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$.

\Rightarrow au sein d'un conducteur parfait, $\vec{j} = \vec{0}$

On déduit de l'équation de **Maxwell-Gauss** que $\frac{\rho}{\epsilon_0} = \text{div} \vec{E} = 0$.

\Rightarrow au sein d'un conducteur parfait, $\rho = 0$

BILAN : En régime variable, au sein d'un **conducteur parfait**,

- les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls
- la **densité volumique de charges** ρ et le vecteur **densité de courant volumique** \vec{j} sont nuls

Les charges et les courants ne peuvent être que surfaciques, cf § C.3.d.

NB : Autre raisonnement possible :

D'après l'étude du § B, l'épaisseur de peau s'écrit $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

Dans le cas d'un **conducteur parfait** en régime variable ($\omega \neq 0$), $\gamma \rightarrow \infty \Rightarrow \delta \rightarrow 0$. Ce qui conduit à des champs \vec{E} et \vec{B} nuls au sein du conducteur parfait. Puis à $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ via les équations de Maxwell.

On peut **assimiler un conducteur à un conducteur parfait** si $\delta \ll \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ la longueur d'onde dans le vide et si δ négligeable vis-à-vis des dimensions géométriques du conducteur.

Cf Animation www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/reflexionConducteur.html permettant de visualiser l'onde EM à l'interface entre le vide et un conducteur (ondes incidente et réfléchiée en bleu ; onde totale en rouge ; abscisses graduées en termes de longueur d'onde dans le vide).

On a la limite du conducteur parfait pour $\delta/\lambda \rightarrow 0$.

R = coefficient de réflexion en énergie.

2) Conditions aux limites à l'interface – Relations de passage

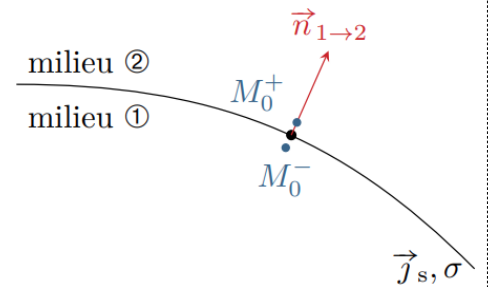
Considérons une interface entre deux milieux ① et ②, de normale $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Lorsque des charges ou des courants sont fortement localisés au voisinage de cette interface (répartition surfacique), on peut avoir discontinuité des champs \vec{E} et \vec{B} (cf ChEM1-2). Les conditions aux limites sont données par les **relations de passage**, admises et qui seront fournies par l'énoncé.

De part et d'autre d'un point M_0 se trouvant sur l'interface,

$$\forall t, \quad \begin{cases} \vec{E}_2(M_0^+, t) - \vec{E}_1(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M_0^+, t) - \vec{B}_1(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_S(M_0, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

Avec σ la densité surfacique de charges et \vec{j}_S le vecteur densité de courant surfacique à l'interface, et $\vec{E}_{1/2}$ et $\vec{B}_{1/2}$ les champs dans les milieux ①/②.



→ s'il y a discontinuité de champ électrique à l'interface, alors elle ne peut concerner que la composante normale à la surface ;

→ s'il y a discontinuité de champ magnétique, alors elle ne peut concerner que les composantes tangentielles à la surface.

Les deux **composantes tangentielles du champ électrique** et la **composante normale du champ magnétique** sont toujours **continues** à l'interface entre deux milieux.

Les autres composantes peuvent être discontinues.

3) Onde réfléchie sur un conducteur parfait

a) Continuité du champ électrique tangentiel – Nécessité d'une onde réfléchie

Dans le cas du dioptré étudié vide/conducteur parfait, les relations de passages donnent :

$$\forall t, \forall (x, y) \quad \begin{cases} \vec{E}_{cond}(x, y, z = 0^+, t) - \vec{E}_{vide}(x, y, z = 0^-, t) = \frac{\sigma(x, y, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{B}_{cond}(x, y, z = 0^+, t) - \vec{B}_{vide}(x, y, z = 0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_S(x, y, t) \wedge \vec{e}_z \end{cases}$$

Avec $\vec{E}_{cond}(x, y, z = 0^+, t) = \vec{0}$ pour un conducteur parfait.

$$\Rightarrow \forall t, \forall (x, y), \quad -\vec{E}_{vide}(x, y, z = 0^-, t) = \frac{\sigma(x, y, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Raisonnons par l'absurde :

Hypothèse (H) : on suppose qu'il n'y a pas d'onde réfléchie.

$$\Rightarrow \vec{E}_{vide}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

La relation de passage impose :

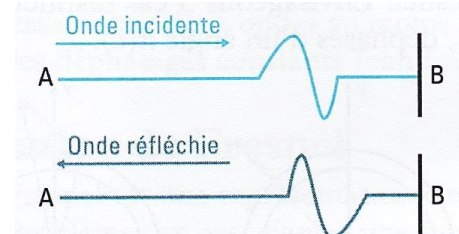
$$\forall t, \forall (x, y), \quad -E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x = \frac{\sigma(x, y, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \text{en projetant selon } (Ox) : \forall t, \quad -E_0 \cos(\omega t) = 0$$

Seule solution possible : $E_0 = 0 \Rightarrow$ onde incidente nulle \Rightarrow **l'hypothèse (H) est donc fausse.**

Il faut donc qu'un **champ électrique RÉFLÉCHI** se superpose au champ électrique incident pour que la continuité du champ électrique tangentiel soit vérifiée en $z = 0$.

Rq : le phénomène de réflexion ne se limite pas aux ondes électromagnétiques \rightarrow réflexion d'une onde se propageant le long d'une corde sur l'extrémité fixe B.





Dioptré ❶ vide
/ ❷ conducteur
parfait

**Méthode pour
obtenir les
caractéristiques
de l'onde
réfléchie**

① D'après les informations du sujet, on donne la **notation complexe** des champs électriques dans le milieu ❶ : **incident** \vec{E}_i et **réfléchi** \vec{E}_r . On a $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

NB : les champs \vec{E}_i et \vec{E}_r sont **transverses** car OPP dans le vide.

② Milieu ❷ **conducteur parfait** $\Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{0}$.

③ Exploitation de la **relation de passage** sur l'interface (S) :

$$\forall t, \forall M_0 \in (S), \vec{E}_2(M_0^+, t) - \vec{E}_1(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$\Rightarrow \forall t, \forall M_0 \in (S)$, **composantes tangentielles du champ électrique continues**

④ Par **identification**, on obtient amplitude, phase, polarisation et pulsation de \vec{E}_r . On obtient la norme du vecteur d'onde via la **relation de dispersion dans le vide**.

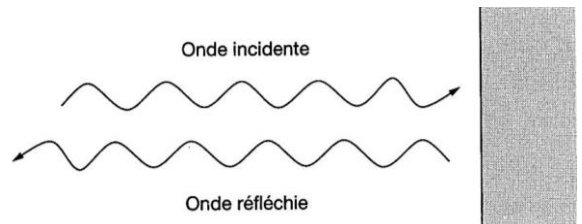
⑤ On déduit les champs magnétiques \vec{B}_i et \vec{B}_r de la **relation de structure dans le vide**.

b) Expression du champ électrique réfléchi (cours-TD)

On note \vec{E}_r le champ électrique réfléchi et $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ le champ électrique résultant dans le vide ($z < 0$).

On cherche l'onde **réfléchie** qui se **propage selon** $-\vec{e}_z$ sous la forme d'une **OPPM**, d'où en notation complexe :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cdot e^{i(\omega_r t + k_r z)}$$



➡ **Exercice classique** : Avec la méthode ci-dessus, exprimer les caractéristiques du champ électrique réfléchi (\vec{E}_{0r} , ω_r et k_r) en fonction de celles du champ électrique incident et des vecteurs de base.

BILAN :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x \Leftrightarrow \vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + kz + \pi) \vec{e}_x$$

Les champs électriques incident et réfléchi :

- ont la **même amplitude**: réflexion sans perte d'énergie ;
- ont la **même pulsation**: RSF ;
- se **propagent selon la même direction** (loi de Descartes !) mais dans des **sens opposés** : $\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_z$;
- ont la **même direction de polarisation** (\vec{e}_x ici) ;
- sont **en opposition de phase en $z = 0$** .

c) Expression du champ magnétique

On obtient SÉPARÉMENT les champs \vec{B} incident et réfléchi via la **relation de structure** :

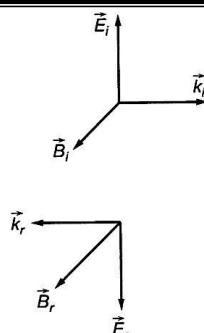
$$\vec{B}_i = B_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \text{ avec } B_0 = \frac{E_0}{c} \Leftrightarrow \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_r = B_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \text{ avec } B_0 = \frac{E_0}{c} \Leftrightarrow \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$$

Même comparatif que pour les champs électriques incident et réfléchi MAIS :

Contrairement aux champs électriques, les champs magnétiques incident et réfléchi sont **en phase en $z = 0$** .

SCHEMA - RESUME :



Vide

Conducteur parfait

Rq: Lors de la réflexion métallique en incidence normale, on a $r_{E\perp} = -1$ et $r_{B\perp} = 1$.

Avec $r_{E\perp} = \frac{E_r(z=0^-,t)}{E_i(z=0^-,t)}$ et $r_{B\perp} = \frac{B_r(z=0^-,t)}{B_i(z=0^-,t)}$ les coefficients de réflexion en incidence normale.

d) Etat surfacique du conducteur parfait

Avec les expressions des champs électrique et magnétique réfléchis obtenus et des relations de passage, on peut déterminer l'existence d'éventuels **charges ou courants surfaciques à la surface du conducteur**.

Relations de passage dans le cas général :

$$\forall t, \quad \begin{cases} \vec{E}_2(M_0^+, t) - \vec{E}_1(M_0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{B}_2(M_0^+, t) - \vec{B}_1(M_0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_S(M_0, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \end{cases}$$

Dans le cas de l'incidence normale d'une OPPM sur un dioptré ①vide/②conducteur parfait situé en $z = 0$:

$$\forall t, \quad \begin{cases} \vec{0} - \vec{E}_{vide}(z = 0^-, t) = \frac{\sigma(M_0, t)}{\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \vec{0} - \vec{B}_{vide}(z = 0^-, t) = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{Sx}(M_0, t) \\ j_{Sy}(M_0, t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{e}_z \end{cases}$$

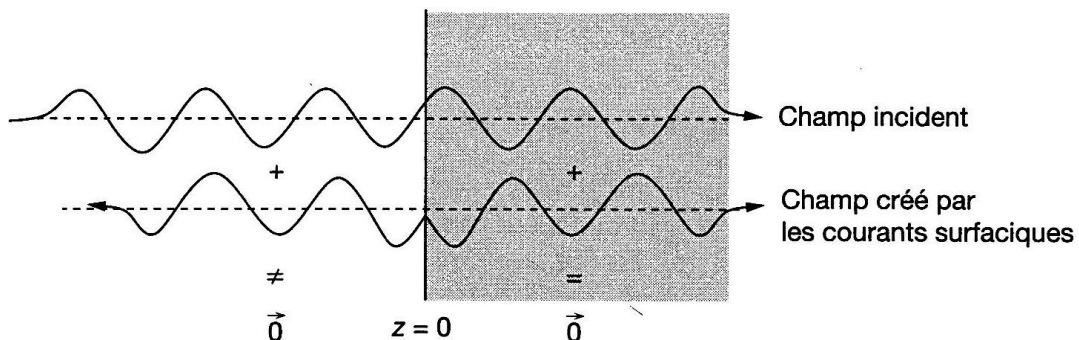
avec $\vec{E}_{vide}(z = 0^-, t) = \vec{E}_i(z = 0^-, t) + \vec{E}_r(z = 0^-, t) = E_0(\cos(\omega t) - \cos(\omega t))\vec{e}_x = \vec{0}$

$\Rightarrow \sigma(M_0, t) = 0$: il n'y a donc **pas de charge surfacique** à la surface du conducteur parfait.

et $\vec{B}_{vide}(z = 0^-, t) = \vec{B}_i(z = 0^-, t) + \vec{B}_r(z = 0^-, t) = \frac{E_0}{c}(\cos(\omega t) + \cos(\omega t))\vec{e}_y$

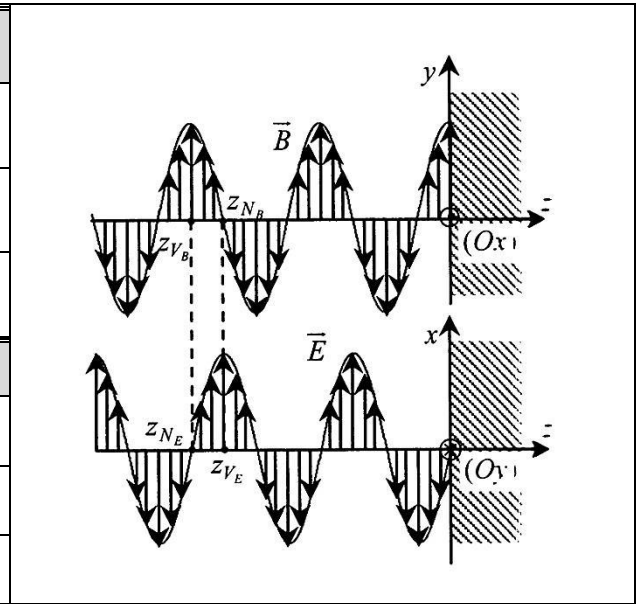
$\Rightarrow \boxed{\vec{j}_S = 2 \frac{E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_x}$: il y a un courant surfacique à la surface du conducteur parfait, le vecteur densité de courant est colinéaire au champ électrique incident.

L'onde incidente engendre un courant à la surface du conducteur. Les électrons étant mis en mouvement par le champ électrique, les courants ainsi créés sont parallèles à ce dernier. **Ces courants oscillants** sont à leur tour une source du champ électromagnétique et **sont** notamment **à l'origine de l'onde réfléchie**.



4) Onde résultante : onde stationnaire

Champ magnétique	
Incident	$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$
Réfléchi	$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$
Résultant	$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y$
Champ électrique	
Incident	$\vec{E}_i = + E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$
Réfléchi	$\vec{E}_r = - E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{e}_x$
Résultant	$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2 E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$



Commentaires sur l'expression des champs résultants (*Rappels ChEM5*) :

- Les dépendances spatiale (en z) et temporelle (en t) n'apparaissent pas au sein de la même fonction \cos/\sin : on parle de **SEPARATION DES VARIABLES spatio-temporelles** (z et t) et d'**onde STATIONNAIRE**.

- On peut aussi écrire les champs sous la forme :

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = B_{tot}(z) \cdot \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

Avec $B_{tot}(z) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kz)$

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{tot}(z) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x$$

Avec $E_{tot}(z) = 2 E_0 \sin(kz)$

Ainsi, en un point M fixé, i.e. en z fixé, les champs sont des fonctions sinusoïdales de t de pulsation ω et d'amplitudes respectives $|2 \frac{E_0}{c} \cos(kz)|$ et $|2 E_0 \sin(kz)|$ **qui dépendent donc du point considéré**.

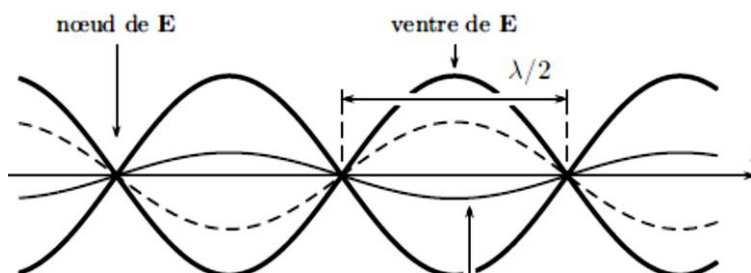
Les champs vibrent sur place : il n'y a plus de propagation ni vers la droite, ni vers la gauche.

Contrairement au cas de l'onde progressive où ils sont en phase, les champs électrique et magnétique vibrent en quadrature de phase pour l'onde stationnaire*.

L'amplitude du champ électrique $|2 E_0 \sin(kz)|$ s'annule périodiquement pour des valeurs de z **distantes de $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$** : ce sont les **NŒUDS DE VIBRATION**.

Entre deux nœuds du champ électrique se situe un maximum d'amplitude = **VENTRE DE VIBRATION**.

Rq : On peut mener le même raisonnement sur l'amplitude du champ magnétique.



Nœuds et ventres de vibration sont caractéristiques d'une onde stationnaire.

* Comparatif des ondes progressives et stationnaires : cf annexe.

5) Solution de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires – Séparation des variables

On note ici $s(z, t)$ la vibration scalaire associée à l'onde ($s(z, t) = E_x(z, t)$ ou $B_y(z, t)$).


L'étude de la réflexion d'une onde EM sur un conducteur parfait a montré que l'onde dans le vide est **stationnaire**. On introduit ici une méthode permettant de déterminer efficacement son expression à partir de l'équation de d'Alembert vérifiée dans le vide.

La vibration associée à une onde stationnaire est de la forme : $s(z, t) = F(t) \cdot K(z)$

→ **découplage des variables spatio-temporelles.**

Déterminons l'expression de $F(t)$ et $K(z)$ telles que $s(z, t)$ soit solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (E0)$$

 <p>Méthode de SEPARATION DES VARIABLES</p> <p><i>Cf ex 8 TDEM5</i></p>	<p>① Equivalence de l'équation de d'Alembert par injection de la solution :</p> $\forall F \neq 0 \text{ et } \forall K \neq 0 : \quad (E0) \Leftrightarrow \frac{\frac{d^2 K}{dz^2}}{K(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{\frac{d^2 F}{dt^2}}{F(t)} \quad (E1)$ <p>② Découplage : les variables respectives z et t des fonctions $F(t)$ et $K(z)$ étant indépendantes, on a :</p> $(E1) \Leftrightarrow \frac{d^2 K}{dz^2} = \alpha K(z) \text{ et } \frac{d^2 F}{dt^2} = c^2 \alpha F(t)$ <p>avec α une constante</p> <p>③ Solutions des EDL en z et en t : la forme des solutions dépend du signe de α. Seul le cas $\alpha < 0$ est physiquement acceptable pour une onde stationnaire¹, on a² :</p> $F(t) = F_0 \cos(c\sqrt{ \alpha }t + \varphi_t) \text{ et } K(z) = K_0 \cos(\sqrt{ \alpha }z + \varphi_z)$ <p>④ Expressions usuelles : on pose $k = \sqrt{ \alpha }$ et $\omega = kc$, il vient³ :</p> $s(z, t) = F_0 \cdot K_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_t) \cdot \cos(kz + \varphi_z)$
---	---

¹ cf ex 8 TDEM5 : le cas $\alpha \geq 0$ est à rejeter : en effet, il correspond soit à une solution $F(t)$ divergente, soit à une solution $F(t)$ transitoire.

² solutions d'EDL du type oscillateur harmonique.

³ cohérent avec § C.4 ; il faut ensuite tenir compte d'éventuelles conditions aux limites, cf § C.6.

6) Applications aux cavités à une dimension – Mode d'onde stationnaire

Dans un milieu continu illimité, la longueur d'onde λ (et donc k) et la fréquence f (et donc ω) des ondes solutions de l'équation d'onde peuvent prendre n'importe quelle valeur.

A l'inverse, si une onde se propage dans un **milieu limité spatialement** et que des **conditions aux limites** du milieu sont imposées alors **k et ω sont quantifiés**, on les note k_n et ω_n , qui dépendent des **dimensions du milieu**. La solution de l'équation d'onde associée aux valeurs k_n et ω_n est appelée **mode propre n** .

a) Modes propres pour la corde vibrante

Les vibrations d'une corde fixée à ses deux extrémités ($\forall t, y(z = -a, t) = 0 = y(z = 0, t)$) sont des modes d'onde stationnaire.

Ex : cordes d'instruments (guitare, violon ou piano).

Résultats obtenus : $k_n = \frac{n\pi}{a}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on en déduit : $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$; $\omega_n = k_n c$ et $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$.

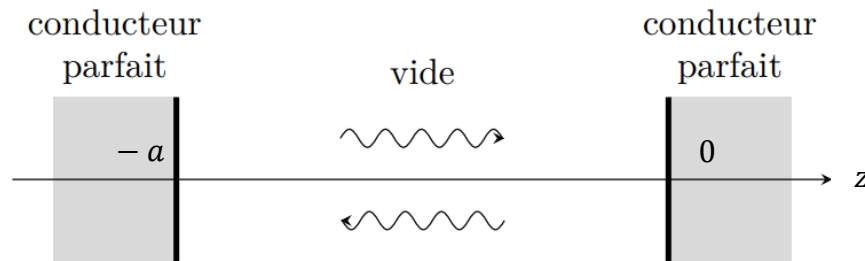
→ Visualisation expérimentale des modes propres avec la **corde de Melde**, cf TP10E.

Rq : Démarche similaire pour l'étude des tuyaux sonores.

b) Modes d'onde électromagnétique → « cavité »

♦ Une **cavité électromagnétique** est un **volume vide délimité par des parois conductrices**.

Considérons une cavité à une dimension, formée de deux plans parfaitement conducteurs parallèles, distants de a le long du même axe (Oz). On recherche les ondes pouvant exister dans cette cavité.



Rq : Un LASER comporte une cavité similaire.

Dans la cavité, l'onde va subir des réflexions successives au niveau des dioptries vide/conducteur ainsi cette onde est **stationnaire**, avec un **nœud de vibration au niveau de chaque paroi** d'après les relations de passage.

On recherche le champ électrique dans la cavité sous la forme d'une onde stationnaire polarisée rectilignement : $\vec{E}(z, t) = F(t) \cdot K(z) \cdot \vec{e}_x$.

Cette onde doit vérifier :

- l'équation de d'Alembert dans le vide : $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$
- les conditions aux limites imposées par les relations de passage en $z = 0$ et $-a$:
$$\forall t, \vec{E}(z = 0^-, t) = \vec{0} \text{ et } \vec{E}(z = -a^+, t) = \vec{0}$$

Les deux plans conducteurs parallèles forment une cavité résonante de dimension a entraînant l'apparition de modes d'ondes stationnaires. Le mode n a :

pour longueur d'onde : $\lambda_n = \frac{2a}{n}$ et pour fréquence $f_n = \frac{nc}{2a}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi, les ondes pouvant exister dans la cavité sont celles pour lesquelles la longueur de la cavité correspond à un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

Toute onde pouvant exister dans la cavité s'écrit comme une **superposition des modes propres**. Mathématiquement, pour une onde polarisée rectilignement selon \vec{e}_x :

$$\vec{E}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \cos\left(\frac{n\pi c}{a}t + \varphi_n\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cdot \vec{e}_x$$

L'amplitude E_{0n} et la phase φ_n du mode d'ordre n sont fixées par les conditions initiales.

Rq : Mêmes résultats que pour la corde vibrante fixée en ses 2 extrémités car mêmes équation d'onde et CL.


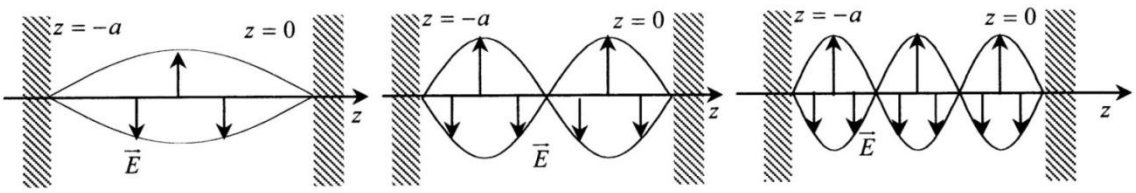
☞ Exercice classique : Etablir l'expression de $\vec{E}(z, t)$ et en déduire les résultats de quantification de λ et f .

i) Appliquer la méthode de séparation des variables (donnée p.12).

ii) Exploiter les conditions aux limites pour en déduire les valeurs possibles du vecteur d'onde.

iii) Conclure en exploitant la relation entre k et λ et entre λ et f .

On retrouve ces résultats à l'aide de quelques schémas :

<p>Méthode</p>  <p>Détermination de l'expression des λ_n des modes propres avec des schémas !</p>	<ol style="list-style-type: none"> ① Nœuds de vibration imposés en $z = -a$ et $z = 0$ par les parois conductrices ; ② Mode fondamental ($n = 1$) mode avec nombre de nœuds minimal i.e. 2 ; ③ Un nœud supplémentaire en passant du mode n au mode $n + 1$; ④ Longueur d'onde du mode n déduite de a et de la distance entre deux nœuds consécutifs : $\frac{\lambda_n}{2}$; ⑤ Détermination λ_n pour $n = 1, 2$ et 3 puis généralisation pour n quelconque.  <p style="text-align: center;">Mode $n=1$ Mode $n=2$ Mode $n=3$</p>
---	---

♦ Retour sur le cas du micro-ondes – Aspects énergétiques :

Le chauffage par micro-ondes se fait par conversion d'énergie électromagnétique en énergie thermique : le champ \vec{E} variable agit sur les molécules d'eau polaires des aliments qui, pour suivre les oscillations du champ, se mettent en rotation et dissipent l'énergie que le champ a rayonné.

A partir des expressions des champs \vec{E} et \vec{B} (cf § C.4), on a :

$$\vec{I} = c\epsilon_0 E_0^2 \sin(2\omega t) \sin(2kz) \vec{e}_z$$

Ainsi aux nœuds de \vec{I} , le transfert d'énergie du champ à l'aliment est nul et au contraire il est maximal aux ventres de \vec{I} . Pour obtenir une température plus homogène de l'aliment, on utilise un plateau tournant.

Rq : En mécanique quantique, on verra une autre situation où apparaissent des modes propres :

Onde de matière :

Cas de la particule quantique libre confinée dans un puits de potentiel infini à une dimension.

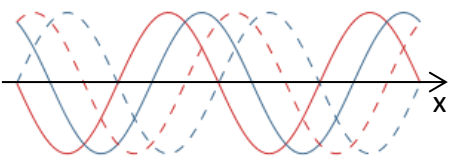
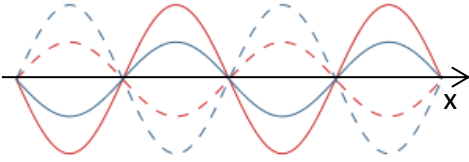
On considère une particule quantique qui ne peut se déplacer que le long de l'axe (Oz) entre $z = -a$ et $z = 0$ et qui, en ses positions accessibles, n'est soumise à aucune interaction (énergie potentielle : $V(-a < z < 0) = 0$: particule « **libre** »).

Par ailleurs, on a des **parois « infranchissables »** en $z = -a$ et $z = 0$ ($V(z = -a \text{ ou } 0) \rightarrow \infty$) : la particule est donc **confinée** entre $z = -a$ et $z = 0$.

→ On traite cet exemple par **analogie avec la corde vibrante fixée en ses 2 extrémités**.

On en déduit que l'énergie de la particule est quantifiée (avec $E = \frac{1}{2}mv^2$ et la relation de De Broglie).

Annexe : Ondes progressives et ondes stationnaires

Onde plane monochromatique	Progressive	Stationnaire
Expression proportionnelle à ...	$\cos(\omega t - kx)$	$\cos(\omega t) \cdot \cos(kx)$
Relation de dispersion dans le vide	$\omega = kc$	
Chronophotographie	 <p> — $t = 0$ --- $t = T/3$ — $t = T/6$ --- $t = T/2$ </p>	 <p> — $t = 0$ --- $t = T/3$ — $t = T/6$ --- $t = T/2$ </p>
Double périodicité	La longueur d'onde et la période T vérifient : $\lambda = cT$	
Propagation	Progression de l'onde à la célérité c	Pas de progression mais vibration « sur place »
Déformation	Tous les points sont soumis, au cours du temps, aux mêmes perturbations.	Certains points ne vibrent pas (nœuds) alors que d'autres subissent des vibrations maximales (ventres).