Chapitre EM8. Rayonnement dipolaire électrique

Une antenne est un dispositif permettant de rayonner (ou de capter) les ondes électromagnétiques. On distingue différents types d'antennes, les plus simples sont les antennes filaires : antennes dipôles, Yagi-Uda (ou antenne « râteau » qui correspond à un réseau d'antennes élémentaires, cf ci-contre)…
L'antenne dipolaire ou « dipôle demi-onde » est constituée d'un élément conducteur de longueur égale à la demi-longueur d'onde.

INTRO :
Dans les chapitres précédents, on a décrit les propriétés des **ondes électromagnétiques** et leur propagation sans préciser les **sources** qui leur ont donné naissance. Ici, on étudie la plus simple des sources : le **dipôle électrique oscillant** et on analyse le champ électromagnétique qu'il rayonne.

Buts de ce chapitre : décrire le modèle du dipôle électrique oscillant ; analyser la structure du champ EM rayonné et les propriétés de la puissance rayonnée.

Prérequis :
MP2I : Superposition d'ondes ; Régime Sinusoïdal Forcé ; Mécanique du point.
MPI : tous les chapitres EM.

Plan du chapitre :

1) Modèle du dipôle oscillant

a) Dipôle électrostatique et moment dipolaire *(rappels ChEM3)*

DEFINITION :
Un **DIPOLE ELECTROSTATIQUE** est un **ensemble de deux charges opposées** $-q$ et q avec $q > 0$, assimilées à des charges ponctuelles : $\{N(-q); P(q)\}$.
Cela décrit un système globalement neutre de taille caractéristique a, tel que le **barycentre des charges positives P et celui des charges négatives N** ne sont **pas confondus.**
On caractérise un dipôle électrostatique par son **MOMENT DIPOLAIRE** :

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \overrightarrow{NP}}$$

b) Dipôle électrique oscillant

DEFINITION :
Un **DIPOLE ELECTRIQUE OSCILLANT** est un ensemble de charges électriques globalement neutre, de taille caractéristique a et de moment dipolaire $\vec{p}$ tel que $\vec{p}$ **a une direction fixe mais sa norme varie périodiquement avec une période T et a une moyenne nulle**.

L'exemple le plus simple de dipôle oscillant est un ensemble de deux charges q et $-q$ dont la première est fixe en $P = O$ et la deuxième oscille de sorte que sa position N est : $\overrightarrow{ON} = a \cdot \cos(\omega t + \psi)\vec{u}$.
On obtient :

$$\vec{p} = -qa \cdot \cos(\omega t + \psi)\,\vec{u} = -p_0 \cdot \cos(\omega t + \psi)\,\vec{u}$$

avec $p_0 = qa$

Exemples :

- L'atome d'hydrogène peut émettre une onde EM visible ou du proche ultraviolet : la charge fixe est le proton du noyau et la charge mobile est l'électron qui oscille avec une amplitude a autour du proton, $a \approx rayon\ atomique = 53\ pm$.
- Les antennes émettant dans le domaine Hertzien : une antenne est un conducteur parcouru par un courant, on a donc un mouvement d'électrons autour des cations fixes du réseau cristallin.
- Les molécules de l'atmosphère se comportent aussi comme des dipôles induits par le champ EM solaire.

c) Trois échelles de longueur et cadre de l'étude

On introduit trois échelles caractéristiques de longueur pour l'étude du rayonnement du dipôle :
- la **taille du dipôle a** ;
- la **distance $r = OM$** entre le dipôle dont le centre est situé en O et M un point où on étudie le champ électromagnétique émis par le dipôle ;
- la **longueur d'onde λ** du champ électromagnétique émis par le dipôle.

♦ **Approximation dipolaire *(rappel ChEM3)***

On étudie le dipôle oscillant dans le cadre de l'**<u>APPROXIMATION DIPOLAIRE</u>** i.e. qu'on étudie le champ qu'il rayonne en des points M tels que $\boldsymbol{r = OM \gg a}$.

<u>Rq</u> : Dans le cadre de l'approximation dipolaire, on obtient la propriété suivante :
Quel que soit le point P de la source, le point M est suffisamment loin de celle-ci pour que la durée de propagation soit considérée comme quasiment constante pour l'ensemble des points P : $\forall\, P, \frac{PM}{c} \approx \frac{OM}{c} = \frac{r}{c}$.

♦ **Cadre de la mécanique classique (non relativiste)**

Pour des charges constitutives du dipôle électrique **non relativistes**, on a $\boldsymbol{a \ll \lambda}$.

➲ <u>A savoir refaire :</u> Démontrer cette condition en déterminant l'ordre de grandeur de la vitesse de déplacement d'une charge oscillante.

<u>Retour sur les exemples :</u>
- La condition $a \ll \lambda$ est bien vérifiée pour l'atome d'hydrogène.
- Pour les ondes hertziennes (jusqu'à quelques centaines de MHz), les longueurs d'onde peuvent être supérieures au mètre, ce qui est comparable à la taille des antennes (cf p.1 antenne « demi-onde »). Le modèle du dipôle ne correspond pas à une antenne complète mais à un élément infinitésimal d'antenne.

<u>Rq</u> : La condition $a \ll \lambda$ revient à négliger le délai de propagation, à la célérité c, entre deux points de la distribution de charge devant la période d'oscillation : $\frac{a}{c} \ll T$.

♦ **Zone de rayonnement (champs lointains)**

On se place dans la **<u>ZONE DE RAYONNEMENT</u>** : $\boldsymbol{r = OM \gg \lambda}$

La distance que doit parcourir l'onde entre son émission et sa réception est très grande par rapport à la longueur d'onde : approximation des champs lointains. **On ne peut donc pas négliger les effets liés à la propagation**.
Autrement dit, cette hypothèse sous-entend que la durée Δt de propagation de l'onde entre le dipôle et M est très grande devant la période de l'onde : $\Delta t \approx \frac{r}{c} \gg T = \frac{\lambda}{c}$.

<u>Exemples - ODG :</u>
- En optique, les longueurs d'onde sont de l'ordre de 500 nm, on observe les phénomènes à quelques dizaines de centimètres des sources (ou plus) : il s'agit bien de la zone de rayonnement.
- Pour les ondes radio en modulation de fréquence ($f \approx 100\ MHz$), les longueurs d'ondes sont de l'ordre de quelques mètres ; les récepteurs, à distance de l'émetteur variant entre la centaine de mètres et quelques dizaines de kilomètres, sont bien dans la zone de rayonnement.
- Pour les grandes ondes où les longueurs d'onde sont de l'ordre du kilomètre, les récepteurs ne sont dans la zone de rayonnement que s'ils ne sont pas trop près des émetteurs.

<u>BILAN</u>

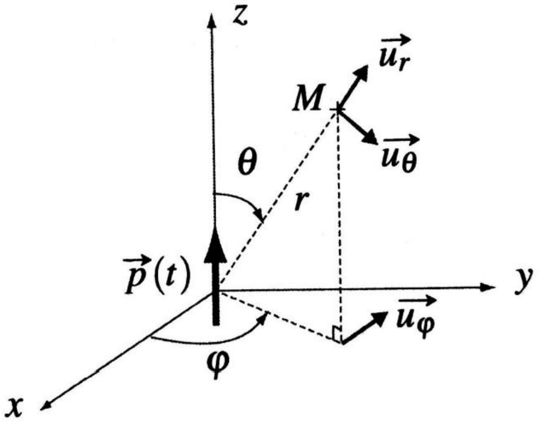
L'étude du rayonnement émis par un dipôle oscillant se fait dans le cadre : $\boldsymbol{a \ll \lambda \ll r}$

2) Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant

On considère un dipôle électrique oscillant sinusoïdalement suivant la direction fixe (Oz) :

$$\vec{p}(t) = p(t)\overrightarrow{u_z} = p_0 \cdot \cos(\omega t + \psi)\,\overrightarrow{u_z}$$

Ce dipôle, supposé seul dans l'espace, crée dans le vide un champ électromagnétique.
On note O le centre du dipôle électrique oscillant.
Dans la suite, on étudie les propriétés du dipôle en **coordonnées sphériques** de centre O et d'axe (Oz).



a) Expression du champ EM dans la zone de rayonnement

Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique créé par le dipôle électrique oscillant est :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r} \cdot \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r} \cdot p_0 \cdot cos(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi rc} \cdot \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \overrightarrow{u_\varphi} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi rc} \cdot p_0 \cdot cos(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$avec\ \omega = kc\ et\ \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2}$$

Ces expressions seront fournies par l'énoncé.

b) Analyse et interprétation de l'expression champ EM rayonné par le dipôle

♦ Analyse des symétries et invariances

➲ A savoir refaire : Vérifier la compatibilité du champ électromagnétique créé par le dipôle avec les symétries et les invariances du dipôle (i.e. de la source du champ EM)

NB : Dépendances des champs en r et en θ.

♦ $\|\vec{E}(M,t)\|$ et $\|\vec{B}(M,t)\|$ décroissent en $\frac{1}{r}$, cf § 3.c.

Le champ électromagnétique du dipôle oscillant est donc un **champ à longue portée**. En effet, il décroît bien plus lentement que :

- le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle qui décroît en $\frac{1}{r^2}$, cf ChEM1
- le champ créé par un dipôle électrostatique qui décroît en $\frac{1}{r^3}$, cf ChEM3.

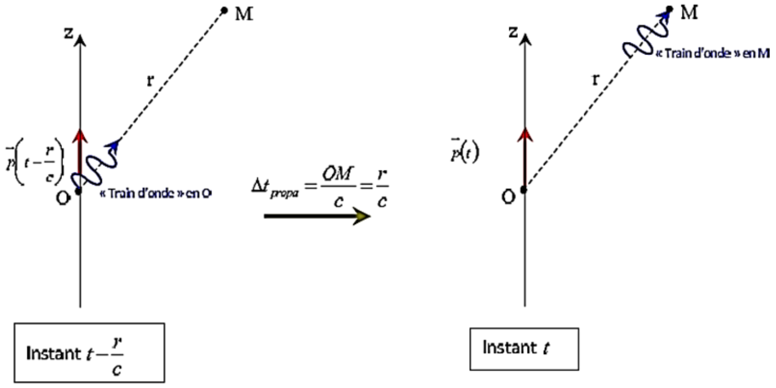
♦ $\|\vec{E}(M,t)\|$ et $\|\vec{B}(M,t)\|$ dépendent de θ : Le champ créé par un dipôle oscillant n'est donc **pas rayonné de manière isotrope**, cf § 3.b.

♦ Analyse dimensionnelle

➲ A savoir refaire : Vérifier l'homogénéité des expressions des champs électrique et magnétique.
Pour cela, vous pouvez exploiter les théorèmes de Gauss et d'Ampère.

♦ **Durée de propagation**

Le champ électromagnétique mesuré à la date t en M est fonction de l'état du dipôle oscillant à l'instant « retardé » $\boldsymbol{t_{retard\acute{e}} = t - \frac{r}{c}}$. La différence entre $t_{retard\acute{e}}$ et t correspond à la durée de propagation de l'onde, à la célérité c, entre le dipôle et le point M.



♦ **Structure locale d'onde plane**

L'onde rayonnée par un dipôle électrique oscillant n'est donc pas plane mais elle a <u>LOCALEMENT une structure d'onde plane</u> :

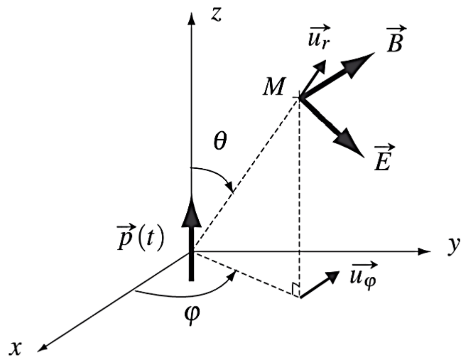
le **trièdre ($\vec{k}$, $\vec{E}$,$\vec{B}$)** est **orthogonal direct** et on a $\boldsymbol{\vec{B} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{c}}$

➲ <u>A savoir refaire :</u> Etablir ce résultat.

i) Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde EM rayonnée (autrement dit identifier la direction locale de propagation de l'onde).

ii) Que peut-on dire des directions locales de $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$?

iii) Vérifier que $\vec{B}$ peut s'écrire localement selon la relation de structure d'onde plane : $\vec{B} = \frac{\vec{u_r} \wedge \vec{E}}{c}$.



*<u>Rq</u> : Si l'on se place dans un plan perpendiculaire à $\vec{u_r}$, l'amplitude des champs n'est pas constante, puisque r et θ varient. Mais si l'on « explore » le plan sur une distance faible par rapport à r, les variations de r et θ sont négligeables : d'où le terme de structure **<u>locale</u>** d'onde plane.*

♦ **Polarisation**

Le champ électrique en M garde constamment la direction du vecteur $\vec{u_\theta}$. Ceci est dû au fait que l'on a pris un dipôle oscillant gardant une direction fixe.

Plus généralement, pour un dipôle oscillant de direction fixe :
- L'onde rayonnée est **polarisée rectilignement** en tout point M ;
- La **direction de polarisation** est contenue dans le **plan contenant M et le dipôle** et **perpendiculaire à la direction de propagation**.

3) Aspects énergétiques

a) Vecteur de Poynting

Avec les champs électrique et magnétique, on calcule le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \cdot \ddot{p}^2\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \overrightarrow{u_r} = \frac{\mu_0 \omega^4 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2 c} \cdot {p_0}^2 \cdot cos^2(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{u_r}$$

➲ <u>A savoir refaire :</u> Etablir ce résultat et en déduire sa valeur moyenne.

On note que $\vec{\Pi}(M,t)$ est porté par le vecteur $\overrightarrow{u_r}$: **la direction locale de propagation de l'énergie est donc radiale**, ce qui est cohérent avec le § A.2.b.

b) Anisotropie du rayonnement

Le vecteur de Poynting dépend de θ : l'émission dipolaire est **<u>anisotrope</u>**. Elle est **maximale** dans les **directions perpendiculaires au moment dipolaire** et elle est **nulle dans la direction du dipôle.**

➲ <u>A savoir refaire :</u> Retrouver les directions de maximum et de minimum d'émission.

Pour caractériser l'anisotropie, on trace **<u>L'INDICATRICE DE RAYONNEMENT</u>**. A une distance r donnée, il s'agit de la surface définie par :

$$R(\theta,\varphi) = \frac{\left\|\langle\vec{\Pi}\rangle(\theta,\varphi)\right\|}{\left\|\langle\vec{\Pi}\rangle_{max}\right\|} = \sin^2(\theta)$$

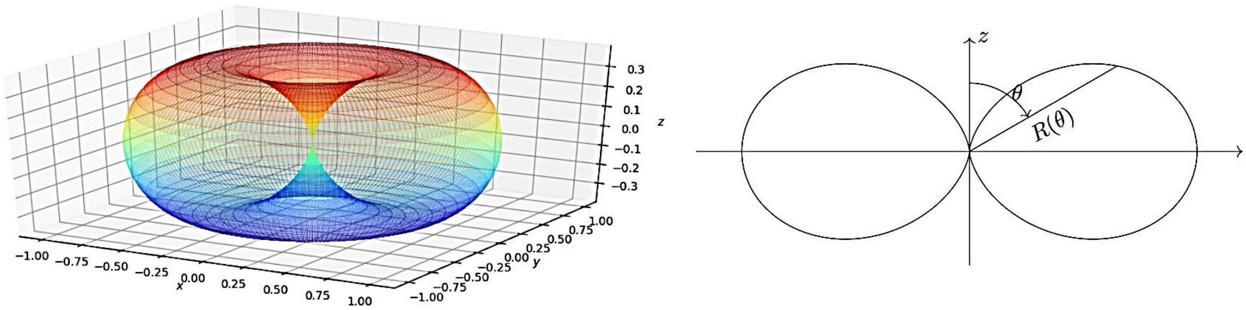


FIGURE 2 – Indicatrice de rayonnement d'un dipôle électrique oscillant parallèle à (Oz).

Le lobe de droite de la figure de droite représente la coupe de l'indicatrice par un plan méridien φ = constante.
Le lobe de gauche correspond à $\varphi' = \varphi + \pi$.

c) Puissance moyenne

La puissance moyenne rayonnée au travers d'une sphère de rayon r s'écrit :

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0\langle\ddot{p}^2\rangle}{6\pi c} = \frac{\mu_0\omega^4}{12\pi c}{p_0}^2$$

➲ A savoir refaire : Etablir ce résultat sachant que $\int_0^\pi sin^3(\theta).d\theta = \frac{4}{3}$.

♦ **Conservation de l'énergie - Décroissance de l'amplitude du champ rayonné**

La **puissance moyenne $\langle P\rangle$ est indépendante de r**, le rayon de la sphère considérée. Ainsi, toutes les sphères de centre O sont traversées par la même puissance moyenne, ce qui traduit la **conservation de l'énergie** : entre deux sphères de centre O, il n'y a pas d'énergie électromagnétique produite ni consommée, la puissance traversant les deux sphères doit donc être la même. Cette puissance est la puissance rayonnée par le dipôle électrique oscillant.

Ce résultat est à relier à la décroissance en $\frac{1}{r}$ des champs électrique et magnétique. Cette décroissance de l'amplitude des champs lorsque la distance à la source augmente ne doit pas être confondu avec une atténuation due à des pertes (cf ChEM7).

La décroissance des champs électrique et magnétique en $\frac{1}{r}$ traduit la conservation de l'énergie.

♦ **Dépendance en ω**

La **puissance moyenne $\langle P\rangle$ est proportionnelle à ω^4**.
Elle augmente donc très rapidement avec la fréquence émise, autrement dit, elle diminue très rapidement avec la longueur d'onde. Ceci permet d'expliquer la **couleur bleue du ciel**.

♦ **Généralisation**

La **puissance moyenne $\langle P\rangle$ est proportionnelle à $\langle\ddot{p}^2\rangle$.**
En revenant au modèle du dipôle constitué d'une charge fixe et d'une charge oscillante, la **puissance moyenne $\langle P\rangle$ est donc proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'accélération de la charge en mouvement** :

$$\langle P\rangle = \frac{\mu_0\cdot q^2\cdot\langle acc^2\rangle}{6\pi c}$$

Il s'agit de la formule de Larmor, formule générale qui relie la puissance rayonnée par une charge q, non relativiste, au carré de son accélération : toute particule chargée accélérée émet dans l'espace une puissance électromagnétique donc perd de l'énergie.