TDEM7 – Ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique

0 Exercices classiques vus en cours :

A.1 : Loi d'Ohm locale – Modèle de Drude
A.2 : Neutralité locale d'un métal
A.3 : Prépondérance du courant de conduction sur le courant de déplacement en régime lentement variable
B.1-2 : Equation de diffusion dans un milieu ohmique et solution – Relation de dispersion
C.3.b : Détermination du champ électrique réfléchi sur un dioptre vide / conducteur parfait
C.6.b : Détermination des modes propres d'une cavité 1D avec la méthode de séparation des variables

Capacités exigibles	Ch EM7	Ex 1-2	Ex 3	Ex 4	Ex 5-6	Ex 7	Ex 8	TP
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau. Etablir et interpréter l'expression de la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.	●	●				●		
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire. Etablir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.	●		●	●	●		●	
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire. Etablir la condition de quantification des solutions. *Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.*	●			●	●			11E

Donnée pour l'ensemble des exercices :

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M,t) - \vec{E}_1(M,t) = \frac{\sigma(M,t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\vec{B}_2(M,t) - \vec{B}_1(M,t) = \mu_0 \vec{j}_s(M,t) \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

1 Blocage d'appel

Une des fréquences utilisées pour la 4G est de 2,6 GHz. La conductivité de l'aluminium est $\gamma_{\mathrm{Al}} = 37,7.10^6$ S.m^{-1}.
L'épaisseur typique d'une feuille d'aluminium est de l'ordre de 0,02 mm.

➲ Quelle épaisseur d'aluminium est nécessaire pour bloquer les appels du téléphone portable ? Commenter.

__Donnée__ : Relation de dispersion dans un milieu ohmique : $\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma$

2 Expression du champ électrique dans un milieu ohmique

On considère une onde qui se propage dans le vide (domaine $y < 0$) avec :

$$\vec{E} = E_o e^{i(\omega t - ky)} \vec{u}_z$$

Le demi-espace $y > 0$ est constitué d'un milieu conducteur homogène de conductivité γ.

1- Pour $y > 0$, on écrit :

$$\vec{E} = E_o e^{i\omega t} f(y) \vec{u}_z$$

Déterminer la fonction $f(y)$.

3 ✎ Approche énergétique de l'effet de peau

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\vec{E} = E_0\, \mathrm{e}^{-\alpha z}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x \,.$$

1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de propagation ? La polarisation ?

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ associé.

3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

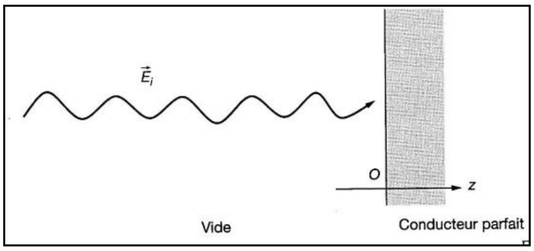
4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur $\mathrm{d}z$. Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.

5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.

6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.

7 - La paroi d'un four à micro-ondes (f = 2,5 GHz) est en aluminium de conductivité $\gamma = 3{,}77.10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Quelle est l'épaisseur minimum de la paroi sachant qu'il faut que l'amplitude de l'onde soit réduite d'un facteur 10^4 dans la paroi ?

4 Aspects énergétiques de la réflexion sur un métal



On munit l'espace d'un repère cartésien (Oxyz).
Le plan z = 0 sépare deux milieux :

- En z > 0 : on a un conducteur parfait ;
- En z < 0 : on a un milieu vide de charge et de courant.

Le champ électrique associé à l'onde incidente s'écrit :

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}$$

Avec les relations de passage, on peut montrer (cf Ch.EM7) que le champ électrique associé à l'onde réfléchie s'écrit :

$$\overrightarrow{E_r} = E_0 cos(\omega t + kz + \pi)\overrightarrow{e_x}$$

Avec la relation de structure d'une OPPM dans le vide, on obtient (cf Ch.EM7) les champs magnétiques incident et réfléchi :

$$\overrightarrow{B_i} = \frac{E_0}{c} cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{B_r} = \frac{E_0}{c} cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}$$

1) Déterminer l'expression des vecteurs de Poynting associés à l'onde incidente et à l'onde réfléchie.
On définit le coefficient de réflexion en énergie :

$$R = \frac{< \overrightarrow{\Pi_r} \cdot (-\overrightarrow{u_z}) >}{< \overrightarrow{\Pi_i} \cdot (\overrightarrow{u_z}) >}$$

2) Déterminer l'expression de R. Commenter.

5 ✎ Onde électromagnétique entre deux conducteurs (= exo de cours)

On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_i = E_0 \, e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$.

1 - Montrer que $\omega = kc$.

On admet que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2} \qquad \mu_0 \vec{j}_s = \vec{n}_{1\to 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\,,$$

où σ et $\vec{j}_s$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

2 - On place un conducteur parfait en $z = 0$. Montrer que les relations de passage pour $\vec{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

4 - Déterminer quels types d'onde peuvent exister et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

5 - Qu'impliquent les relations de passage pour $\vec{B}$? Interpréter.

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \text{cte}$?

6 Four à micro-ondes *(d'après CCS 2023)*

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2{,}45\,\text{GHz}$, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant d$.

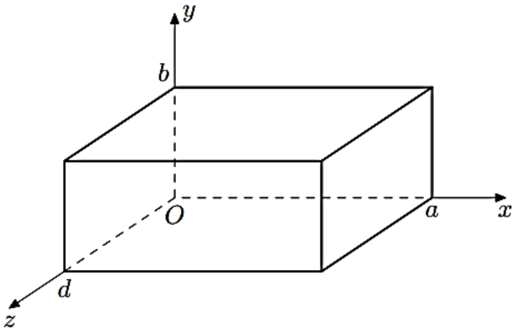


Figure 7 Cavité d'un four à micro-ondes

I.C.1)

On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x,y,z,t) = E_1 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t) \\ E_y(x,y,z,t) = E_2 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\cos(\omega t) \\ E_z(x,y,z,t) = E_3 \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\cos(\omega t) \end{cases}$$

Q 29. Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x, k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m, n et ℓ.

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

Q 30. En déduire l'expression des fréquences $f_{mn\ell}$ des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36{,}0$ cm, $b = 24{,}0$ cm et $d = 26{,}5$ cm, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2{,}45$ GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($CoCl_2, 6H_2O$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La figure 8 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

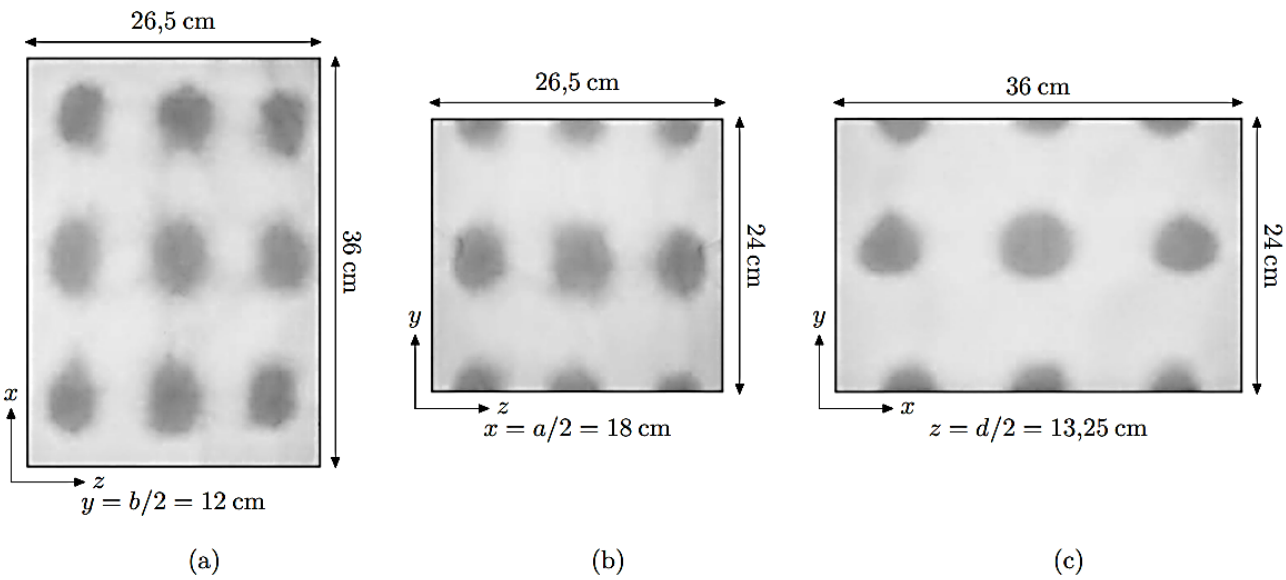


Figure 8 Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four — les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q 31. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ).

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

Justifier précisément l'aspect de la figure 8b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

7 Guide d'ondes

A. 1^e version

Un guide d'onde est constitué deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = \left[A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 y} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 y}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_1 x)}\,\vec{e}_z\,.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}\,,$$

avec $\vec{u}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés $\vec{k}_\pm$. On notera K la norme de ces vecteurs.

2 - Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n.

3 - Déterminer l'inclinaison $\theta_\pm$ des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a.

4 - En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.

5 - Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y.

6 - Déterminer les vitesses de phase et de groupe de l'onde. Commenter.

7 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting moyen associé à cette onde. Commenter.

B. 2^e version *(méthode de séparation des variables)*

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_y\,.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}\,,$$

avec $\vec{u}$ le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k.

2 - Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.

3 - On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?

4 - Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = -\frac{k}{\omega}E_0 \sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_x + \mathrm{i}\frac{n\pi}{a\omega}E_0\cos\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}\,\vec{u}_z\,.$$

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

8 Transparence ultra-violette des métaux

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique *de haute fréquence* à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N. Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin,

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}\,.$$

1 - Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

2 - Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.

3 - Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$.

4 - Établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\gamma}\,\omega\,.$$

5 - En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.

6 - Expliquer le titre de l'exercice.

7 – *Prolongement* : préciser le domaine de pulsations tel que l'onde dans le métal est évanescente.

Données :

- ▷ dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5\cdot 10^7\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$ et $\tau = 10^{-14}\,\mathrm{s}$;
- ▷ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$;

9 Dioptre entre deux milieux diélectriques –Réflexion et transmission en incidence normale

On considère deux milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. Dans la région $z < 0$, l'indice du milieu est n_1. Dans la région $z > 0$, l'indice du milieu est n_2. On rappelle qu'on a $n = \dfrac{ck}{\omega}$ avec k le nombre d'onde. Au point d'incidence I, une partie de l'onde est réfléchie et l'autre partie est transmise. Les champs électriques incident, réfléchi et transmis se mettent respectivement sous la forme : $\underline{\vec{E}_i} = E_0\exp[j(\omega t - k_1 z)]\vec{e}_y$, $\underline{\vec{E}_r} = \underline{r}E_0\exp[j(\omega t + k_1 z)]\vec{e}_y$ et $\underline{\vec{E}_t} = \underline{t}E_0\exp[j(\omega t - k_2 z)]\vec{e}_y$. Il n'y a ni charge, ni courants à l'interface.

1. Déterminer les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ en amplitude pour le champ électrique en fonction de n_1 et n_2.
2. Calculer les vecteurs de Poynting moyens incidents, réfléchis et transmis. En déduire les coefficients en puissance de réflexion $R = |\langle\Pi_r\rangle/\langle\Pi_i\rangle|$ et de transmission $T = |\langle\Pi_t\rangle/\langle\Pi_i\rangle|$. Que vaut $R + T$? Comment l'interpréter ?

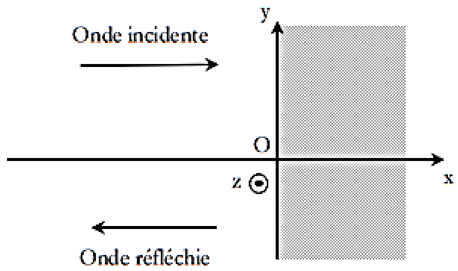
10 Réflexion d'une onde sur un métal « parfait » - Pression de radiation

Une OPPM, à polarisation rectiligne, se propage dans le vide dans la direction (Ox), dans le sens des x croissants :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y \qquad \text{(on supposera } E_0 \text{ réel positif)}$$

En x = 0, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur, dans lequel les champs **E** et **B** sont nuls, et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants :

$$\underline{\vec{E}}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$



a) En écrivant les conditions aux limites que doivent vérifier les champs **E** et **B** en x = 0, déterminer :

* L'amplitude E_{0r} du champ réfléchi en fonction de E_0.

* La charge surfacique σ et le courant surfacique $\mathbf{j}_s$ qui peuvent se trouver sur la surface métallique en x = 0.

b) Déterminer le champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace x < 0. Caractériser brièvement l'onde résultante. Calculer la valeur moyenne de son vecteur de Poynting.

c) Le champ électromagnétique exerce sur une surface dS du miroir une force dF dont l'expression est, en notation réelle :

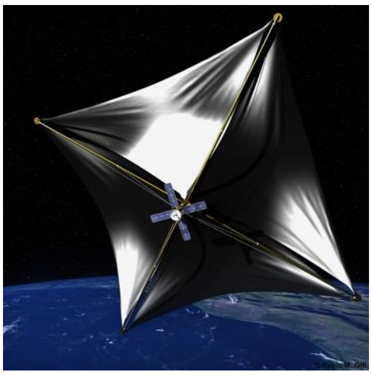
$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\left(\sigma\vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}\right) dS$$

* Vérifier l'homogénéité de cette expression.
* En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne <P> en fonction de la densité volumique d'énergie $<e_i>$ de l'onde incidente au voisinage immédiat du plan. P est appelée « pression de radiation ».

* Calculer <P> pour une onde incidente fournie par un laser de puissance moyenne $<W_i>$=3 mW, dont la section droite est s=0,4 mm².

<u>**Données**</u> : Relations de passage pour le champ électromagnétique :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$$
$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{J_S} \wedge \vec{n}_{12}$$



*Le projet Breakthrough Starshot, lancé en 2016, vise à envoyer des milliers de sondes spatiales d'environ 1 g, équipées de voiles solaires, vers Alpha du Centaure, le système stellaire le plus proche du système solaire. Le faible poids de ces sondes, allié à la puissance du LASER terrestre utilisé pour les propulser jusqu'à 100 GW, permettrait à ces dernières d'atteindre 0,2*c et ainsi de pouvoir nous retourner des images des exoplanètes potentielles d'Alpha du Centaure en 40 à 50 ans (au lieu de plusieurs centaines d'années avec des propulsions conventionnelles).*

Par Kevin Gill from Nashua, NH, United States — Solar Sail, CC BY-SA 2.0

Ondes stationnaires

11 Tuyau sonore

On modélise le corps d'un instrument à vent par une cavité remplie d'air de longueur ℓ. Les conditions aux limites sont alors cruciales pour fixer la note. On admet qu'on peut utiliser les conditions approchées suivantes :

- Au contact d'une ouverture, la pression acoustique est nulle (nœud de vibration)
- Au contact d'une paroi, la pression acoustique est extrémale (ventre de vibration)

On étudie un instrument à vent fermé à une extrémité et ouvert à l'autre (instruments à anches : clarinette…).

1) Que doit valoir ℓ pour que la plus faible fréquence d'une onde stationnaire dans cet instrument soit égale à $f_1 = 440$ Hz ?

2) Quelle est la fréquence immédiatement supérieure f_2 pouvant être émise par cet instrument ?

3) Exprimer de manière générale les fréquences f_n pouvant être émises par l'instrument en fonction de n (entier) et f_1.

4) Où doit-on placer un trou dans l'instrument afin de supprimer f_2 du spectre du son émis ?