

TDEM7 – Ondes électromagnétiques dans un milieu ohmique

0 Exercices classiques vus en cours :

A.1 : Loi d'Ohm locale – Modèle de Drude

A.2 : Neutralité locale d'un métal

A.3 : Prépondérance du courant de conduction sur le courant de déplacement en régime lentement variable

B.1-2 : Equation de diffusion dans un milieu ohmique et solution – Relation de dispersion

C.3.b : Détermination du champ électrique réfléchi sur un dioptré vide / conducteur parfait

C.5-6 : Détermination des modes propres d'une cavité 1D avec la méthode de séparation des variables

Capacités exigibles	Ch EM7	Ex 1-3,9	Ex 4,5	Ex 6	Ex 7,8,10	TP
Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ohmique en régime lentement variable. Effet de peau. Etablir et interpréter l'expression de la longueur caractéristique d'atténuation de l'onde électromagnétique dans un milieu ohmique.	•	•				
Réflexion sous incidence normale d'une onde plane, progressive et monochromatique polarisée rectilignement sur un plan conducteur parfait. Onde stationnaire. Etablir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies. Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface. Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.	•		•	•		
Applications aux cavités à une dimension. Mode d'onde stationnaire. Etablir la condition de quantification des solutions. <i>Mettre en œuvre un dispositif permettant d'étudier une onde électromagnétique dans le domaine des ondes centimétriques.</i>	•			•	•	10E

Données pour l'ensemble des exercices :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} \text{ et } \varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$$

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

1 ✂ Expression du champ électrique dans un milieu ohmique

On considère une onde qui se propage dans le vide (domaine $y < 0$) avec :

$$\vec{E} = E_o e^{i(\omega t - ky)} \vec{u}_z$$

Le demi-espace $y > 0$ est constitué d'un milieu conducteur homogène de conductivité γ .

1- Pour $y > 0$, on écrit :

$$\vec{E} = E_o e^{i\omega t} f(y) \vec{u}_z$$

Déterminer la fonction $f(y)$.

2 Blocage d'appel (d'après oral PT)

Une des fréquences utilisées pour la 4G est de 2,6 GHz. La conductivité de l'aluminium est $\gamma_{Al} = 37,7 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. L'épaisseur typique d'une feuille d'aluminium est de l'ordre de 0,02 mm.

➡ Quelle épaisseur d'aluminium est nécessaire pour bloquer les appels du téléphone portable ? Commenter.

Donnée : Relation de dispersion dans un milieu ohmique : $\underline{k}^2 = -i\omega\mu_0\gamma$

3 Approche énergétique de l'effet de peau (d'après oral PT)

Considérons un conducteur électrique semi-infini de conductivité γ et dans lequel règne un champ

$$\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \alpha z)} \vec{u}_x.$$

- 1 - S'agit-il d'une onde plane ? D'une onde progressive ? Que représente α ? Quelles sont la direction et le sens de polarisation ?
- 2 - Calculer le champ \vec{B} associé.
- 3 - Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.
- 4 - Effectuer un bilan de puissance pour une tranche de conducteur de surface S et de longueur dz . Déterminer la puissance cédée par unité de volume dans le conducteur.
- 5 - Établir une autre expression de la puissance cédée à partir de la loi d'Ohm locale.
- 6 - À partir des deux expressions obtenues, déduire la distance sur laquelle pénètre l'onde avant d'être atténuée.
- 7 - La paroi d'un four à micro-ondes ($f = 2,5 \text{ GHz}$) est en aluminium de conductivité $\gamma = 3,77 \cdot 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Quelle est l'épaisseur minimum de la paroi sachant qu'il faut que l'amplitude de l'onde soit réduite d'un facteur 10^4 dans la paroi ?

4 Aspects énergétiques de la réflexion sur un métal

On munit l'espace d'un repère cartésien (Oxyz).

Le plan $z = 0$ sépare deux milieux :

- En $z > 0$: on a un conducteur parfait ;
- En $z < 0$: on a un milieu vide de charge et de courant.

Le champ électrique associé à l'onde incidente s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

Avec les relations de passage, on peut montrer (cf Ch.EM7) que le champ électrique associé à l'onde réfléchie s'écrit :

$$\vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t + kz + \pi) \vec{e}_x$$

Avec la relation de structure d'une OPPM dans le vide, on obtient (cf Ch.EM7) les champs magnétiques incident et réfléchi :

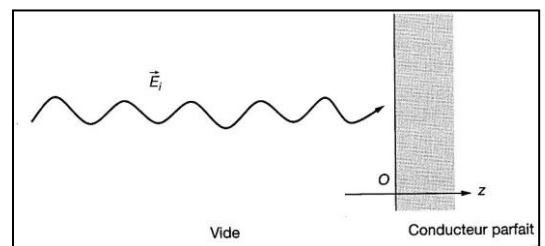
$$\begin{aligned} \vec{B}_i &= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \\ \vec{B}_r &= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y \end{aligned}$$

1) Déterminer l'expression des vecteurs de Poynting associés à l'onde incidente et à l'onde réfléchie.

On définit le coefficient de réflexion en énergie :

$$R = \frac{\langle \vec{\Pi}_r \cdot (-\vec{u}_z) \rangle}{\langle \vec{\Pi}_i \cdot (\vec{u}_z) \rangle}$$

2) Déterminer l'expression de R . Commenter.



5 ✍ Voile solaire (d'après CCINP MP 2025)

À une grandeur physique évoluant sinusoïdalement avec le temps $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, on associera la grandeur complexe $\underline{f}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$, dont la partie réelle s'identifie à la grandeur physique $f(t)$ et où i est l'unité imaginaire, nombre complexe dont le carré vaut -1 .

Par commodité de représentation, les figures de l'énoncé ne respectent pas les échelles.

Certaines données sont regroupées ci-dessous. Lorsqu'une application numérique est demandée, le candidat pourra se contenter d'exprimer le résultat avec un seul chiffre significatif.

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Une voile solaire est un dispositif de propulsion spatiale qui utilise la pression du rayonnement solaire pour générer une force de poussée. Le procédé permettrait à un engin déjà placé en orbite de quitter l'attraction terrestre. Plusieurs prototypes de petite taille, destinés à mettre au point les systèmes de déploiement et de contrôle d'orientation particulièrement délicats, ont été placés en orbite, comme par exemple le NanoSail-D2, lancé par la NASA en 2019 et dont une vue d'artiste est représentée **figure 10**.

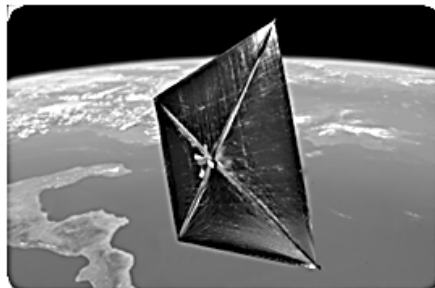


Figure 10 - Voile solaire NanoSail-D2. Vue d'artiste. Crédit : NASA

On considère une voile solaire de surface carrée $S = a^2$ modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω , de polarisation rectiligne suivant \vec{e}_z et se propageant selon \vec{e}_x depuis les $x < 0$. L'onde incidente, en un point $M(x, y, z)$ et à l'instant t , s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

où $k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$ est la pulsation spatiale de l'onde, norme du vecteur d'onde \vec{k} et où E_0 représente l'amplitude réelle de l'onde.

On admet que les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} associés à une onde électromagnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

III.1 - Pression de radiation

On suppose tout d'abord que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPH. Le référentiel d'étude est lié à la voile. Dans ce référentiel, la voile solaire se confond avec le plan $x = 0$, comme représenté **figure 11**.

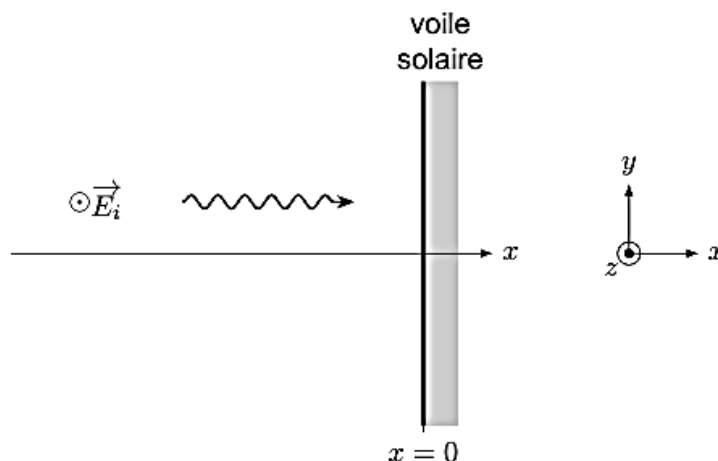


Figure 11 - Représentation de l'onde incidente arrivant en incidence normale sur la voile solaire

On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux ① et ②, de normale \vec{n}_{12} orientée de ① vers ② :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

où $\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{E}_2$ et \vec{B}_2 désignent les champs électriques et magnétiques au voisinage immédiat de l'interface dans les milieux ① et ② et où σ et \vec{j}_s sont les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, respectivement.

Q36. La voile donne naissance à une onde réfléchie de même pulsation ω que celle de l'onde incidente. On cherche cette onde réfléchie sous la forme d'une OPPH se propageant en sens inverse de l'onde incidente et de polarisation transverse *a priori* quelconque :

$$\vec{E}_r(M, t) = \underline{E}_{0y}' e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y + \underline{E}_{0z}' e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z.$$

En utilisant la relation de passage relative au champ électrique, simplifier l'expression du champ électrique complexe de l'onde réfléchie.

Q37. Après avoir déterminé le champ magnétique complexe total régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$), établir l'expression de la densité surfacique de courant réelle $\vec{j}_s(t)$ qui apparaît sur celle-ci.

On s'intéresse, dans la suite, à la force électromagnétique exercée par l'onde sur la voile. On admet que cette force est égale, dans ce cas d'étude particulier, à la force de Laplace exercée sur les courants surfaciques par la moitié du champ magnétique total régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$).

On définit le scalaire j_s par la relation :

$$\vec{j}_s = j_s \vec{e}_z.$$

On considère un élément de la voile rectiligne, représenté en grisé sur la **figure 12**, de longueur a , de largeur dy et parcouru par un courant d'intensité $\delta i = j_s dy$ orienté vers les $z > 0$.

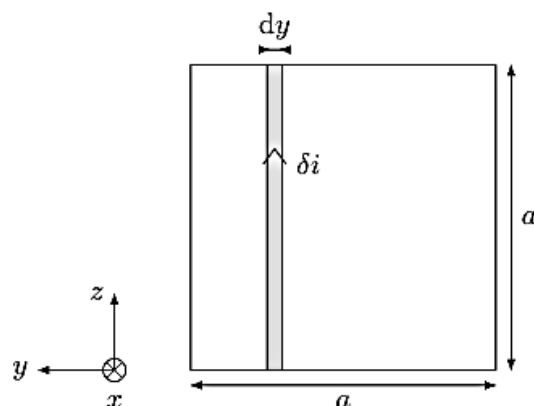


Figure 12 - Représentation d'un élément de la voile rectiligne, parcouru par un courant d'intensité δi

Q38. Exprimer la force électromagnétique $\delta \vec{F}_L$ due au champ électromagnétique sur cette portion rectiligne en fonction de a , dy , $\vec{j}_s(t)$ et du champ magnétique incident à la surface de la voile $\vec{B}_i(x=0, t)$. En déduire la force électromagnétique totale \vec{F}_L exercée sur l'ensemble de la voile en fonction de a , $\vec{j}_s(t)$ et de $\vec{B}_i(x=0, t)$.

Q39. En déduire la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\langle \vec{f} \rangle$ et montrer qu'elle peut s'écrire de la façon suivante :

$$\langle \vec{f} \rangle = P_m \vec{e}_x$$

où P_m est une grandeur, appelée *pression de radiation*, que l'on exprimera en fonction de l'intensité I de l'onde incidente (puissance surfacique transportée à travers une section droite, moyennée temporellement) et de la célérité c de la lumière dans le vide.

Q40. Évaluer l'ordre de grandeur de la surface S nécessaire pour donner à un vaisseau de masse $m = 2\,000\text{ kg}$ une accélération environ égale au millième de l'intensité de la pesanteur g régnant à la surface de la Terre, sachant que l'intensité du rayonnement solaire à proximité de la Terre est d'environ $1\,000\text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Commenter.

Dans le cas plus général d'une inclinaison quelconque de la voile (**figure 13**), on peut montrer que la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\langle \vec{f} \rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$\langle \vec{f} \rangle = P_m \cos^2(\varphi) \vec{n} \quad (6)$$

où φ est l'angle caractérisant l'inclinaison par rapport à l'axe Ox du vecteur unitaire \vec{n} normal à la voile.

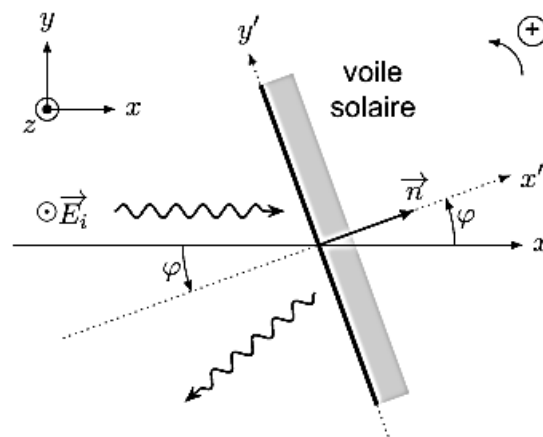


Figure 13 - Représentation de la réflexion d'une onde arrivant avec un angle d'incidence quelconque sur la voile

6 Onde électromagnétique confinée (d'après oral CCMP PSI) (= exo de cours)

On rappelle que les champs \vec{E} et \vec{B} sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad \mu_0 \vec{j}_s = \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1),$$

où σ et \vec{j}_s sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface.

1 - On considère un champ électrique dans le vide de la forme $\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x$. Montrer que $\omega = kc$.

2 - On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour \vec{E} impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde totale.

3 - En déduire le champ magnétique

4 - Qu'impliquent les relations de passage pour \vec{B} ? Interpréter.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5 - Déterminer les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n .

6 - Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = \text{cte}$?

7 Four à micro-ondes (d'après CCS MP 2023)

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence $f = 2,45 \text{ GHz}$, acheminée par un guide d'onde vers la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$.

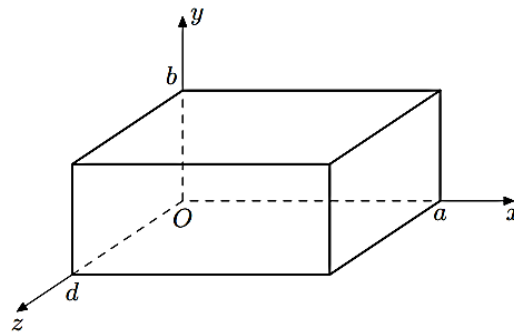


Figure 7 Cavité d'un four à micro-ondes

I.C.1)

On considère dans un premier temps que les parois sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide.

On cherche le champ électrique sous la forme

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q 29. Montrer que seules des valeurs discrètes de k_x , k_y et k_z sont possibles, repérées respectivement par des entiers m , n et ℓ .

Le triplet (m, n, ℓ) caractérise un mode propre.

Q 30. En déduire l'expression des fréquences $f_{mn\ell}$ des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures $a = 36,0 \text{ cm}$, $b = 24,0 \text{ cm}$ et $d = 26,5 \text{ cm}$, alimenté par un klystron de fréquence $f = 2,45 \text{ GHz}$. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ($\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue. La figure 8 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

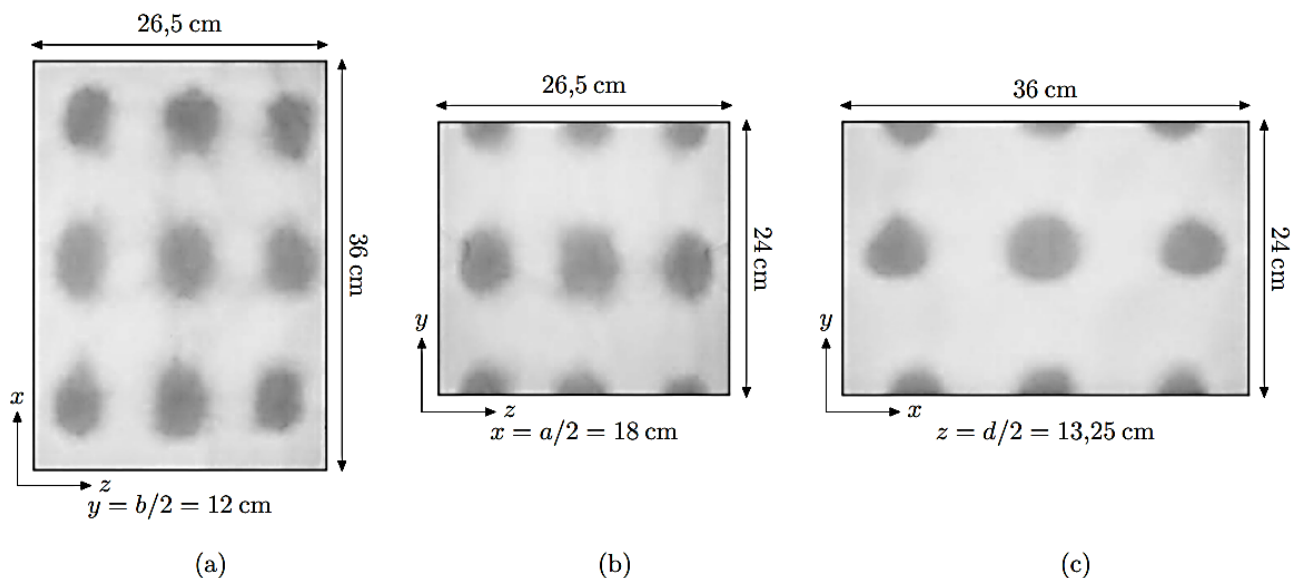


Figure 8 Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four — les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

Q 31. Déterminer la valeur du triplet (m, n, ℓ) .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ?

Justifier précisément l'aspect de la figure 8b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois $y = 0$ et $z = 0$.

8 Guide d'ondes

A. 1^e version

Un guide d'onde est constitué deux plans parfaitement conducteurs situés en $y = 0$ et $y = a$ entre lesquels est confinée une onde électromagnétique de la forme

$$\vec{E} = [A e^{ik_2 y} + B e^{-ik_2 y}] e^{i(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_z.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u},$$

avec \vec{u} le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Montrer que cette onde est une superposition de deux ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS) dont on exprimera les vecteurs d'onde notés \vec{k}_{\pm} . On notera K la norme de ces vecteurs.

2 - Que valent les champs dans un conducteur parfait ? Établir une relation entre A et B et une condition sur k_2 dépendant d'un entier n .

3 - Déterminer l'inclinaison θ_{\pm} des deux OPPS avec l'axe du guide en fonction de leur longueur d'onde λ et a .

4 - En déduire que toutes les ondes ne peuvent pas se propager dans le guide.

5 - Exprimer l'onde totale. Commenter sa structure dans les directions x et y .

6 - Déterminer les vitesses de phase et de groupe de l'onde. Commenter.

7 - Déterminer l'expression du vecteur de Poynting moyen associé à cette onde. Commenter.

B. 2^e version (méthode de séparation des variables)

Une cavité vide, supposée invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z , est taillée dans un conducteur occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > a$. On souhaite utiliser cette cavité comme guide d'onde : on s'intéresse à la propagation dans cette cavité d'une onde électromagnétique sous la forme

$$\vec{E}(M, t) = f(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y.$$

Donnée : On rappelle la relation de passage pour le champ électrique à l'interface entre deux milieux 1 et 2,

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u},$$

avec \vec{u} le vecteur normal dirigé de 1 vers 2.

1 - Déterminer $f(x)$ et la relation entre ω et k .

2 - Montrer que l'onde ne peut se propager que si ω est supérieure à une pulsation de coupure ω_c à exprimer.

3 - On appelle modes propagatifs du guide les différentes ondes pouvant se propager dans le guide pour une pulsation donnée. Pour quel intervalle de pulsation le guide d'onde est-il monomode, c'est-à-dire qu'il n'y existe qu'un seul mode propagatif ? Même question pour un guide multimode, possédant plusieurs modes propagatifs ?

4 - Le champ magnétique dans le guide s'écrit

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{k}{\omega} E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x + i \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos \frac{n\pi x}{a} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_z.$$

Déterminer l'expression du vecteur de Poynting instantané et interpréter physiquement chacune de ses composantes.

9 Transparence ultra-violette des métaux (d'après oral PT)

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique *de haute fréquence* à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω .

Les porteurs de charge dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e , présents en densité volumique N . Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin,

$$\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}.$$

1 - Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\omega\tau}$$

où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.

2 - Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.

3 - Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal pour une OPPH quelconque $\vec{E} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

4 - Établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0 \underline{\gamma} \omega.$$

5 - En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.

6 - Expliquer le titre de l'exercice.

7 - *Prolongement* : préciser le domaine de pulsations tel que l'onde dans le métal est évanescence.

Données :

- ▷ dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\tau = 10^{-14} \text{ s}$;
- ▷ perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$;

10 Tuyau sonore

On modélise le corps d'un instrument à vent par une cavité remplie d'air de longueur ℓ . Les conditions aux limites sont alors cruciales pour fixer la note. On admet qu'on peut utiliser les conditions approchées suivantes :

- Au contact d'une ouverture, la pression acoustique est nulle (nœud de vibration)
- Au contact d'une paroi, la pression acoustique est extrême (ventre de vibration)

On étudie un instrument à vent fermé à une extrémité et ouvert à l'autre (instruments à anches : clarinette...).

1) Construire une analogie entre les ondes acoustiques présentes dans l'instrument et les ondes électromagnétiques présentes dans une cavité vide de charge et de courant.

2) En s'appuyant sur des schémas, indiquer la valeur de ℓ pour que la plus faible fréquence d'une onde stationnaire dans cet instrument soit égale à $f_1 = 440 \text{ Hz}$?

3) Quelle est la fréquence immédiatement supérieure f_2 pouvant être émise par cet instrument ?

4) Exprimer de manière générale les fréquences f_n pouvant être émises par l'instrument en fonction de n (entier) et f_1 .

5) Où doit-on placer un trou dans l'instrument afin de supprimer f_2 du spectre du son émis ?