TDEM8 – Rayonnement dipolaire électrique et diffusion

0 Exercices classiques vus en cours :

A.1.c : Interprétation physique de l'approximation $a \ll \lambda$
A.2.b : Analyse des symétries et des invariances – Analyse dimensionnelle - Structure locale d'onde plane
A.3.a-b-c : Vecteur de Poynting → anisotropie du rayonnement et expression de la puissance moyenne
B.2.b : Justification du modèle de la charge élastiquement liée
B.2.c : Dipôle induit déduit de l'étude mécanique du nuage d'électrons de valence
B.2.d : ODG du cadre de la diffusion de Rayleigh
B.3.a-b : Interprétation de la luminosité du ciel et de sa couleur
B.3.d : Lien entre polarisation de la lumière diffusée par le ciel et direction d'observation

Capacités exigibles	Ch EM8	Ex 1-2	Ex 3,5-6	Ex 4
Champ électromagnétique rayonné par un dipôle oscillant dans la zone de rayonnement. Puissance rayonnée. Justifier l'intérêt du modèle du dipôle oscillant et citer des exemples dans différents domaines. Formuler et commenter les approximations reliant les trois échelles de longueur pertinentes. Analyser la structure du champ électromagnétique rayonné, les expressions des champs étant fournies, en utilisant des arguments généraux : symétrie, conservation de l'énergie et analyse dimensionnelle. Effectuer un bilan énergétique, les expressions des champs étant fournies. Représenter l'indicatrice de rayonnement. *Détecter une onde électromagnétique rayonnée.*	•	•	•	
Diffusion d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement par une molécule dans le cadre du modèle de la charge élastiquement liée. **Structure de l'onde diffusée. Puissance diffusée en fonction de la fréquence. Résonance. Domaine de Rayleigh** Déterminer les caractéristiques du dipôle induit en régime établi, par l'action de l'onde incidente sur la molécule. Identifier les domaines de résonances et de Rayleigh. Citer des illustrations de la diffusion d'une onde électromagnétique par un milieu.	•	•		•

<u>Données pour l'ensemble des exercices :</u>

◆ $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1} et $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}$ F.m^{-1}

◆ Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique créé par un dipôle électrique oscillant de moment dipolaire $\vec{p}(t) = p(t)\overrightarrow{u_z} = p_0 \cdot \cos(\omega t + \psi)\,\overrightarrow{u_z}$ est :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r} \cdot \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \overrightarrow{u_\theta} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r} \cdot p_0 \cdot cos(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi r c} \cdot \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \overrightarrow{u_\varphi} = -\frac{\mu_0 \omega^2 \sin(\theta)}{4\pi r c} \cdot p_0 \cdot cos(\omega t - kr + \psi)\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$avec\ \omega = kc\ et\ \ddot{p} = \frac{d^2p}{dt^2}$$

1 ✎ Electron élastiquement lié *(d'après CCINP PC 2014)*

On suppose, dans ce problème, que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront également négligés.

Données :
La charge électrique élémentaire vaut $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.
La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c = 3{,}00.10^8$ m.s^{-1}.
La perméabilité et la permittivité du vide valent : $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ H.m^{-1} et $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9}$ F.m^{-1}.

Lorsqu'une onde électromagnétique rencontre un atome, elle interagit avec les électrons de cet atome. Il apparaît ainsi un moment dipolaire oscillant, source d'émission d'un rayonnement de même fréquence que l'onde incidente excitatrice. Nous allons considérer ici que le milieu est suffisamment dilué (atomes peu nombreux par unité de volume) pour que le champ électrique créé par les atomes excités dans le milieu soit négligeable devant le champ électrique incident.

B3.1- On envoie dans le milieu une onde électromagnétique monochromatique, plane, progressive, polarisée rectilignement selon l'axe (Oz), de champ : $\left\{\overline{E_i}(M,t)\;;\overline{B_i}(M,t)\right\}$. Donner l'expression littérale de la force de Lorentz $\vec{F}$ à laquelle est soumis un électron, possédant un vecteur vitesse $\vec{v}$ situé en M.

B3.2- L'atome va être modélisé de la façon suivante. Le centre d'inertie sera placé en O et un électron de masse m_e, de charge électrique $q_e = -e$, situé au point M, sera soumis à une force de rappel élastique : $-m_e \cdot \omega_0^2 \cdot \overline{OM}$, une force de frottement : $-m_e \cdot \Gamma \cdot \dfrac{d\overline{OM}}{dt}$, une force de Lorentz $\overline{F}$, où ω_0 et Γ sont des constantes caractéristiques de l'atome.

B3.2.1- Pour un milieu dilué, on aura : $B_i \cong \dfrac{E_i}{c}$. En considérant que la vitesse de l'électron est très petite devant la vitesse de la lumière dans le vide (approximation non relativiste), simplifier l'expression de la force de Lorentz à laquelle il est soumis.

B3.2.2- Montrer, qu'au niveau atomique (dimension de l'ordre du dixième de nanomètre), nous pouvons négliger la variation spatiale d'une onde électromagnétique excitatrice associée à de la lumière visible.

B3.2.3- Rechercher l'expression complexe du mouvement forcé de l'électron $\underline{\vec{r}} = \underline{\overline{OM}} = \underline{\vec{r}_0} \cdot \exp(j\omega t)$ en considérant $\underline{\overline{E_i}}(O,t) = \underline{\overline{E_0}} \cdot \exp(j\omega t)$.

B3.3- Puissance rayonnée.

B3.3.1- En considérant que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon l'axe (Oz) de vecteur unitaire $\vec{e_z}$: $\underline{\overline{E_i}}(M,t) = E_0 \cdot \exp(j\omega t) \cdot \vec{e_z}$, donner l'expression littérale de l'amplitude p_0 du moment dipolaire $\vec{p}$ acquis par l'atome. En déduire, en utilisant la formule de Larmor sous la forme : $P_r(\omega) = \dfrac{\mu_0 \cdot \omega^4 \cdot p_0^2}{12 \cdot \pi \cdot c}$, l'expression de la puissance moyenne $P_r(\omega)$ alors rayonnée.

B3.3.2- Représenter l'allure de la puissance moyenne $P_r(\omega)$ rayonnée. Préciser, en particulier, l'expression de la pulsation ω_r pour laquelle elle est maximum (considérer que $\Gamma < \sqrt{2} \cdot \omega_0$). Simplifier l'expression de la pulsation ω_r lorsque $\Gamma << \omega_0$; que représente physiquement ce cas ?

B3.3.3- Justifier qu'à basse fréquence ($\omega << \omega_0$), cette puissance moyenne rayonnée peut se mettre sous la forme : $P_r(\lambda) = A \cdot \dfrac{1}{\lambda^4}$. Préciser l'expression de la constante A. Expliquer alors la couleur bleue du ciel.

2 ✎ Filtre polarisant *(d'après CCINP MP 2021)*

Un filtre polarisant est un accessoire qui se fixe devant l'objectif. On admet qu'il se comporte comme les polariseurs utilisés en travaux pratiques de physique : il permet de polariser rectilignement la lumière qui le traverse. On appelle " axe du polariseur " ou " direction de polarisation " la direction de polarisation du champ électrique de l'onde électromagnétique transmise par le polariseur.
Le champ électrique émergent est la projection sur l'axe de polarisation du champ électrique incident. La rotation du filtre sur lui-même permet de choisir la direction de la polarisation de la lumière filtrée. Le **document 9**, décrit les effets qu'on peut obtenir avec un filtre polarisant.

Document 9 - Utilisation d'un filtre polarisant
Le filtre polarisant est l'un des accessoires préférés des amateurs de photographie, en particulier de ceux qui pratiquent la photo de paysages. Les effets obtenus avec ce type de filtre sont impossibles à obtenir avec un logiciel de retouche. Deux effets sont particulièrement appréciés : • le filtre polarisant permet d'atténuer voire de supprimer les reflets sur toutes les surfaces (eau, verre) sauf sur les parties métalliques brillantes. Il suffit de faire tourner le filtre polarisant jusqu'à disparition des reflets ; • il permet également d'augmenter la saturation de bleu du ciel. La couleur du ciel est donc d'un bleu plus renforcé. Pour obtenir un effet maximal, le photographe doit se trouver à 90° par rapport à la direction des rayons du soleil. Par contre le filtre polarisant fait perdre de la lumière. Il faut donc en tenir compte pour le réglage de l'exposition. Source : d'après *apprendre-la-photo.fr*

On cherche à expliquer les effets obtenus en photographie avec l'utilisation de ce type de filtre.

VI.1 - Rayonnement d'un dipôle oscillant

Un dipôle oscillant peut être considéré comme étant constitué de deux charges :

- une fixe placée en un point A et de charge – q,
- une mobile placée en B et de charge + q,

les charges étant constantes.
La distance $AB = d$ représente la taille du dipôle.

Q31. a) Définir le moment dipolaire associé à ce doublet de charges. Avec quelle unité s'exprime-t-il dans le Système International ?
b) À l'échelle microscopique, les atomes et certaines molécules peuvent être considérés comme des dipôles. Donner l'ordre de grandeur de leur moment dipolaire.

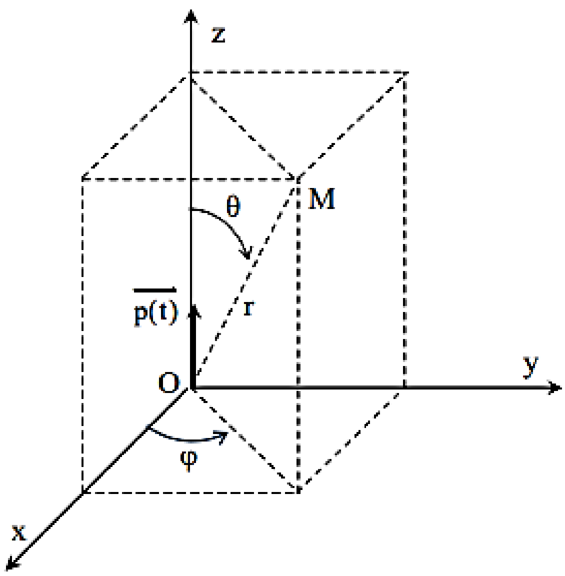

Figure 6 - Coordonnées sphériques d'un point M

On considère à présent ce dipôle oscillant harmonique placé à l'origine O d'un repère (O,x,y,z) et dont le moment dipolaire est donné par la formule $\overrightarrow{p(t)} = p_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$ avec $p_0 = q \cdot d_{max}$.

Le repère est associé à la base cartésienne $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$.

On étudie le rayonnement de ce dipôle oscillant en un point M de l'espace repéré (**figure 6**) par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).

Q32. On étudie le rayonnement de ce dipôle dans la **zone de rayonnement**, en se plaçant dans **l'approximation dipolaire** et dans le cadre d'une **hypothèse non relativiste.**
Traduire ces approximations par trois inégalités reliant trois échelles de longueurs pertinentes en les justifiant.

Ces approximations étant vérifiées, on étudie l'onde électromagnétique rayonnée par le dipôle ; les champs électrique et magnétique en M sont donnés par les formules :

$$\overline{E}(M,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} \sin(\theta)\cos(\omega t - kr)\overline{e_\theta} \quad \text{et} \quad \overline{B}(M,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{rc} \sin(\theta)\cos(\omega t - kr)\overline{e_\varphi}.$$

L'onde électromagnétique a localement la structure d'une onde plane progressive harmonique de pulsation ω. On pose $\overline{k} = k\overline{e_r}$ avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Q33. a) Montrer que la puissance surfacique moyenne rayonnée en un point M de la zone de rayonnement peut se mettre sous la forme $P = K\omega^4 \dfrac{\sin^2(\theta)}{r^2}$.

b) Exprimer K en fonction de μ_0, c et p_0.

Q34. Le rayonnement est-il isotrope ? Si non, dans quel plan est-il maximal ?

Q35. a) Donner l'expression de la puissance moyenne totale P_{totale} rayonnée par ce dipôle en fonction de μ_0, c, p_0 et ω.

b) Cette expression ne dépend pas de r. Quelle signification peut-on en donner ?

On peut considérer que l'atmosphère est constituée de molécules de diazote et de dioxygène.
Ces molécules peuvent être polarisées si elles sont soumises à une onde électromagnétique : l'onde électromagnétique provoque l'apparition d'un moment dipolaire induit $\overline{p_i}$ dans chaque molécule, ce dernier étant proportionnel au champ électrique de l'onde incidente : $\overline{p_i} = \alpha\overline{E}$ où $\overline{E}$ est le champ électrique de l'onde électromagnétique incidente et α un coefficient réel qui dépend (entre autres) de la molécule.
Les molécules se comportent alors comme des dipôles oscillants de moment dipolaire $\overline{p_i}$. On admettra que ce phénomène, appelé diffusion Rayleigh, est le seul qui intervient par beau temps.

Q36. La diffusion Rayleigh se produit lorsque la taille des molécules diffusantes est faible par rapport à la longueur d'onde de l'onde électromagnétique incidente. Montrer, par un calcul d'ordre de grandeur, que cette condition est vérifiée si on envisage la diffusion de la lumière visible par les molécules de l'atmosphère.

VI.2 - Utilisation d'un filtre polarisant pour augmenter la saturation du bleu du ciel

Un photographe cherche à prendre une photo d'un personnage (point A **figure 7**) avec, en arrière-plan, le ciel bleu. Le temps est sec et la position du photographe (point O), du personnage (point A) ainsi que la direction des rayons du soleil sont donnés sur la figure pour laquelle l'axe Oz est vertical et ascendant. On suppose que la lumière solaire ne présente pas de direction de polarisation particulière.

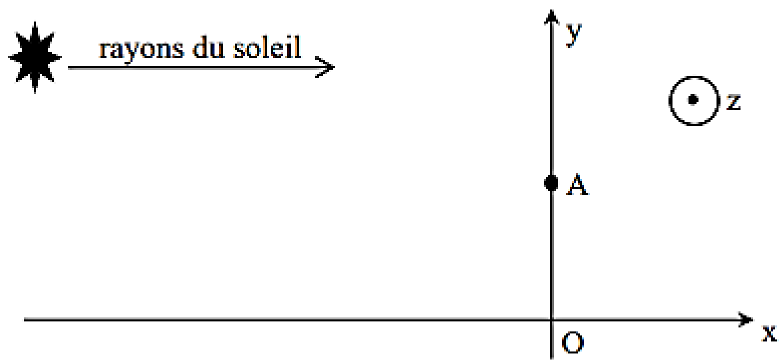

Figure 7 - Prise de vue par temps clair

Q37. En utilisant la réponse à **Q34**, justifier la couleur bleue du ciel, vue par le photographe.

Q38. **a)** Montrer que la lumière reçue par le photographe provenant de la diffusion par les molécules de l'atmosphère est polarisée rectilignement.

b) Montrer en quoi l'utilisation d'un filtre polarisant peut augmenter la saturation du bleu du ciel (telle que définie dans le **document 9**).

c) Expliquer la phrase du document : « Pour obtenir un effet maximal, le photographe doit se trouver à 90° par rapport à la direction des rayons du soleil ».

d) Expliquer la phrase du document : « Par contre le filtre polarisant fait perdre de la lumière ».

3 Zone statique et zone de rayonnement

On donne l'expression du champ électromagnétique créé dans le vide par un dipôle électrique oscillant $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\vec{u_z}$ placé en O, en un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) (avec $r \gg \ell$, taille caractéristique du dipôle) :

$$\vec{E} = \frac{p_0 \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}\cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr)\right)\vec{u_r}$$
$$+\frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{r^2}\cos(\omega t - kr) - \frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr) - \frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kr)\right)\vec{u_\theta},$$

et

$$\vec{B} = \frac{p_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 cr}\left(-\frac{\omega}{cr}\sin(\omega t - kr) - \frac{\omega^2}{c^2}\cos(\omega t - kr)\right)\vec{u_\varphi},$$

en notant $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1. Vérifier l'homogénéité de ces expressions.

2. Simplifier ces expressions dans le cas où $kr \ll 1$ en ne gardant pour chaque champ que le(s) terme(s) sinusoïdal(aux) de plus forte amplitude. Commenter les expressions simplifiées. Comparer les densités volumiques moyennes d'énergie électrique et magnétique dans ce cas.

3. Reprendre la questions précédente dans le cas où $kr \gg 1$.

4 Interprétation quantitative de la couleur rouge du coucher de Soleil

On reprend la situation étudiée au § B.2 du ChEM8 :
On étudie une charge élastiquement liée soumise à une OPPM polarisée rectilignement :

$$\overrightarrow{E_i} = E_0 cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x} \Leftrightarrow \underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u_x}$$

<u>Rq</u> : ici, l'onde se propage selon $+\overrightarrow{u_z}$ et est polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$.

Dans le cadre de la diffusion de Rayleigh, on a obtenu :

$$\langle P_{diff} \rangle = \frac{\mu_0 q^4 {E_0}^2}{12\pi m^2 c {\omega_0}^4}\omega^4$$

Avec $\omega_0 = 1.10^{16}\ rad.s^{-1}$.

Pour simplifier, on suppose ici que chaque molécule n'a qu'un électron de valence.

a. Déterminer l'expression de l'intensité I de l'onde excitatrice (moyenne temporelle de la norme du vecteur de Poynting) en fonction de E_0.

b. Exprimer la puissance rayonnée sous la forme $\langle P_{diff} \rangle = \sigma(\omega) I$. Quelle est la dimension de $\sigma(\omega)$?

c. On suppose que le milieu contient N électrons par unité de volume. L'énergie diffusée par ces électrons est prélevée à l'onde incidente ce qui fait que l'intensité $I(z)$ diminue avec z. En faisant un bilan d'énergie sur un cylindre dont les bases sont dans les plans de cotes z et $z + \mathrm{d}z$, établir une équation différentielle de la forme $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{\delta} I(z) = 0$ où δ est fonction de ω et des paramètres du modèle. Résoudre cette équation. Quelle est la signification physique de δ ?

d. *Application numérique :* $N = 3{,}0.10^{26}\ \mathrm{m}^{-3}$, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg, $c = 3{,}0.10^8\ \mathrm{m.s}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H.m}^{-1}$. Calculer δ pour une lumière bleue ($\lambda_{\text{bleu}} = 0{,}45\ \mu$m) et pour une lumière rouge ($\lambda_{\text{rouge}} = 0{,}75\ \mu$m).

e. Expliquez à l'aide de ce modèle la couleur du soleil couchant.

5 ✎ Rayonnement et perte d'énergie

Dans le modèle classique de l'atome d'Hydrogène, on considère qu'un électron est en mouvement circulaire uniforme de rayon $r_0 = 10^{-10} m$, à la vitesse angulaire ω autour du proton immobile. Ce mouvement est la superposition de 2 dipôles oscillants, perpendiculaires, d'amplitude p_0 et de pulsation ω.

1) Exprimer puis calculer ω, p_0 et l'énergie mécanique E_m du système.
2) Expliquer l'anomalie énergétique de ce modèle.

6 Rayonnement d'une antenne demi-onde

Une antenne filiforme, colinéaire à l'axe Oz, de longueur $l = \dfrac{\lambda}{2}$, centrée à l'origine, est le siège d'un courant sinusoïdal d'intensité :

$$\underline{I}(z,t) = I_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \exp(i\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Un point M est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'origine O, d'axe Oz. On se place dans la zone de rayonnement, $r \gg \lambda$.
On admet que le champ magnétique total rayonné en M par l'antenne est :

$$\underline{\vec{B}}(M,t) = i\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{u_\varphi},$$

et que localement ce champ électromagnétique a la structure d'une onde plane progressive de direction de propagation $\vec{u_r}$.

1. Calculer le vecteur de Poynting en M et sa valeur moyenne dans le temps. Dans quelle direction l'antenne rayonne-t-elle le maximum d'énergie ? Représenter l'indicatrice de rayonnement.

2. Calculer la puissance moyenne $\mathscr{P}$ rayonnée par l'antenne à travers une sphère de rayon r.
On donne : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\, d\theta = 1{,}22.$
En déduire la résistance de rayonnement R de l'antenne définie par $\mathscr{P} = RI_{\text{eff}}^2$. Calculer numériquement R. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $\mathscr{P} = 2100\,\text{kW}$ (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter à Allouis).
Quelle est l'amplitude du champ électrique rayonné dans le plan équatorial de cette antenne à 100 km de l'antenne ?

__Donnée__ : $\cos\left(\frac{\pi}{2}cos\theta\right) \approx 0{,}95.sin^2\theta$